Πραγματική Ανάλυση – Εξέταση 2 Σεπτεμβρίου 2010

Ακολουθούν κάπως σύντομες υποδείξεις για τις λύσεις.
Ασφαλώς υπάρχουν κι άλλοι τρόποι λύσης των θεμάτων.
Αν κάποια θέματα υπάρχουν στις σημειώσεις ή στις ασκήσεις του μαθήματος, παραπέμπουμε εκεί.

1. *Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος.*
(α) *Χρησιμοποιώντας μόνο τους ορισμούς, αποδείξτε ότι κάθε κλειστή μπάλα $\hat{B}(x,r) = \{y \in X : \rho(y,x) \leq r\}$ είναι κλειστό σύνολο.*

(β) *Έστω A ανοικτό υποσύνολο του X και (x_n) ακολουθία στοιχείων του X ώστε $x_n \to x \in A$. Δείξτε ότι υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geq n_0$ η ανοικτή μπάλα $B(x_n, \frac{1}{n}) = \{y \in X : \rho(y,x_n) < \frac{1}{n}\}$ να περιέχεται στο A.*

(γ) *Έστω $y_1, \ldots, y_m$, $m \geq 2$, διαφορετικά ανά δύο σημεία του X. Δείξτε ότι υπάρχουν ξένα ανά δύο ανοικτά σύνολα $G_1, \ldots, G_m \subseteq X$ ώστε $y_i \in G_i$ για κάθε $i = 1, \ldots, m$.*

(2 μονάδες)

Υποδ. **(α)** Παράδειγμα 3.1.11 (β).

(β) Αφού $x \in A = A^\circ$, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $B(x,\delta) \subseteq A$. Αφού $x_n \to x$ και $1/n \to 0$, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε αν $n \geq n_0$ να ισχύει $\rho(x_n,x) < \delta/2$ και $1/n < \delta/2$. Τότε, $B(x_n,\frac{1}{n}) \subseteq B(x,\delta) \subseteq A$ γιατί αν $y \in B(x_n,\frac{1}{n})$ τότε $\rho(y,x) \leq \rho(y,x_n) + \rho(x_n,x) < \frac{1}{n} + \frac{\delta}{2} < \delta$.

(γ) Αφού τα y_i είναι διαφορετικά, έχω $\rho(y_i,y_j) > 0$ όταν $i \neq j$, οπότε $r := \min\{\rho(y_i,y_j) : i \neq j\} > 0$. Τώρα τα $G_i := B(y_i, \frac{r}{2})$ είναι ξένα, γιατί αν $z \in G_i \cap G_j$ τότε $\rho(y_i,y_j) \leq \rho(y_i,z) + \rho(z,y_j) < r$ άρα $i = j$.

2. *Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος και F κλειστό υποσύνολο του X. Για κάθε $x \in X$ ορίζουμε $d(x,F) = \inf\{\rho(x,y) : y \in F\}$. Αποδείξτε ότι:*

(α) *$d(x,F) = 0$ αν και μόνο αν $x \in F$.*

(β) *Για κάθε $\varepsilon > 0$, το σύνολο $U_\varepsilon = \{x \in X : d(x,F) < \varepsilon\}$ είναι ανοικτό.*

(γ) *Το F είναι σύνολο G_δ (δηλ. γράφεται ως αριθμήσιμη τομή ανοικτών συνόλων).*

(1.5 μονάδα)

Υποδ. (α) και (β): Ασκ. 3.27 (α) και (γ)

Για το (γ): Δείξε ότι $F = \bigcap_{n=1}^\infty U_{1/n}$: Η σχέση $F \subseteq U_{1/n}$ για κάθε n δείχνει ότι $F \subseteq \bigcap_{n=1}^\infty U_{1/n}$. Αντίστροφα, αν $x \in U_{1/n}$ για κάθε n, τότε $0 \leq d(x,F) < \frac{1}{n}$ για κάθε n, άρα $d(x,F) = 0$ και από το (α) έπεται ότι $x \in F$.

3. *Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος, $f : X \to \mathbb{R}$ και $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συναρτήσεις. Για καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις δώστε απόδειξη ή αντιπαράδειγμα:*

(i) *Αν οι f και g είναι ομοιόμορφα συνεχείς, τότε η $g \circ f : X \to \mathbb{R}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής.*

(ii) *Αν η f είναι ομοιόμορφα συνεχής και φραγμένη και η g είναι συνεχής, τότε η $g \circ f : X \to \mathbb{R}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής.*

(iii) *Αν η f είναι συνεχής και φραγμένη και η g ομοιόμορφα συνεχής, τότε η $g \circ f : X \to \mathbb{R}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής.* **(1.5 μονάδα)**

Υποδ. **(i)** ΙΣΧΥΕΙ: Αφου g ομ. συν., $\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta_1 > 0$ ώστε αν $s,t \in \mathbb{R}$ και $|s-t| < \delta_1$ να έχω $|g(s) - g(t)| < \epsilon$.
Όμως αφού f ομ. συν. υπάρχει $\delta > 0$ ώστε αν $x,y \in X$ και $\rho(x,y) < \delta$ να έχω $|f(x) - f(y)| < \delta_1$.

Συνεπώς αν $x,y \in X$ και $\rho(x,y) < \delta$ τότε $|f(x) - f(y)| < \delta_1$ άρα (εφαρμόζοντας την προηγούμενη με $s = f(x)$ και $t = f(y)$) έχω $|g(f(x)) - g(f(y))| < \epsilon$.

(ii) ΙΣΧΥΕΙ: Αφού f φραγμένη, το σύνολο $f(X)$ είναι φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$, αρα περιέχεται σε ένα $[a,b]$ (που είναι συμπαγές). Όμως η $g|_{[a,b]}$ είναι (συνεχής σε συμπαγές, άρα) ομοιόμορφα συνεχής, άρα εφαρμόζεται το (i).

(iii) ΔΕΝ ΙΣΧΥΕΙ: Υπάρχει $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής και φραγμένη, αλλά όχι ομοιόμορφα συνεχής (π.χ. η $f(t) = \cos(t^2)$, δες Ασκ. 4.8). Πάρε τώρα $g(t) = t$: Η $g \circ f$ είναι η f.

4. **(α)** *Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος και $D \subseteq X$ πυκνό υποσύνολο. Αν για κάθε βασική ακολουθία (x_n) στοιχείων του D υπάρχει $x \in X$ ώστε $x_n \to x$, δείξτε ότι ο (X,ρ) είναι πλήρης μετρικός χώρος.*

(β) *Για καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις δώστε απόδειξη ή αντιπαράδειγμα:*

(i) *Αν ο (X,ρ) είναι πλήρης μετρικός χώρος, τότε ο (X,ρ) είναι συμπαγής.*

(ii) *Αν ο (X,ρ) είναι συμπαγής μετρικός χώρος, τότε ο (X,ρ) είναι πλήρης.*

(iii) *Αν ο (X,ρ) είναι συμπαγής μετρικός χώρος και ο (Y,σ) είναι πλήρης μετρικός χώρος, τότε ο $(X \times Y, d)$ (όπου d η μετρική: $d((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = \max\{\rho(x_1,x_2),\sigma(y_1,y_2)\}$) είναι πλήρης μετρικός χώρος.* **(2 μονάδες)**

Υποδ. **(α)** Πάρε μια (x_n) βασική στον X. Αφού D πυκνό, για κάθε n βρίσκεις $y_n \in D$ με $\rho(x_n,y_n) < \frac{1}{n}$. Απο τριγωνική (αφού $\frac{1}{n} \to 0$) δείχνεις ότι η (y_n) είναι βασική. Από την υπόθεση, υπάρχει $x \in X$ ώστε $y_n \to x$. Από τριγωνική, δείχνεις ότι $x_n \to x$.

(β) **(i)** ΔΕΝ ΙΣΧΥΕΙ: Πάρε τον $(\mathbb{R}, |\cdot|)$.

(ii) ΙΣΧΥΕΙ: Θεώρημα 6.1.4.

(iii) ΙΣΧΥΕΙ: Από το (ii), είναι και οι δύο πλήρεις χώροι. Αν $((x_n,y_n))$ είναι βασική ακολουθία στον $(X \times Y, d)$, τότε, επειδή $\rho(x_n,x_m) \leq d((x_n,y_n),(x_m,y_m))$, η (x_n) είναι βασική στον (X,ρ), άρα υπάρχει $x \in X$ με $\rho(x_n,x) \to 0$. Ομοίως υπάρχει $y \in Y$ με $\sigma(y_n,y) \to 0$. Τότε όμως $d((x_n,y_n),(x,y)) \to 0$.

5. **(α)** *Έστω $f : (X,\rho) \to (Y,\sigma)$ συνεχής συνάρτηση μεταξύ μετρικών χώρων. Αν K είναι συμπαγές υποσύνολο του X, δείξτε ότι το $f(K)$ είναι συμπαγές υποσύνολο του Y.*

(β) *Έστω (X,ρ) συμπαγής μετρικός χώρος ($X \neq \emptyset$) και $f : X \to X$ συνεχής συνάρτηση. Ορίζουμε τα σύνολα $X_1 = X, X_2 = f(X_1), \ldots, X_{n+1} = f(X_n), \ldots$.*
(i) *Δείξτε επαγωγικά ότι $X_{n+1} \subseteq X_n$ για κάθε n.*
(ii) *Δείξτε ότι το σύνολο $Y = \bigcap_{n=1}^{\infty} X_n$ είναι μη κενό.*
(iii) *Δείξτε ότι $f(Y) = Y$.*

(2 μονάδες)

Υποδ. **(α)** Θεώρημα 6.4.2.

(β) **(i)** Αφού $X_1 = f(X)$, προφανώς $X_1 \subseteq X$, άρα $f(X_1) \subseteq f(X)$. Δηλαδή $X_2 \subseteq X_1$. Επαγωγικό βήμα: Αν $X_k \subseteq X_{k-1}$, τότε $f(X_k) \subseteq f(X_{k-1})$, δηλαδή $X_{k+1} \subseteq X_k$.
Παρατήρησε επίσης ότι $X_1 \neq \emptyset$ και άρα (επαγωγικά) $X_n \neq \emptyset$ για κάθε n.

(ii) Απο (a), τα X_n είναι συμπαγή, άρα κλειστά, και (από (ι)) έχουν την ιδιότητα της πεπερασμένης τομής. Απο συμπάγεια, η τομή $\bigcap X_n$ δεν είναι κενή. Πράγματι: αν $\bigcap X_n = \emptyset$, τότε θέτοντας $G_n = X_n^c$ έχουμε $\bigcup G_n = X$. Αφού X συμπαγής, η ανοικτή κάλυψη $\{G_n : n \in \mathbb{N}\}$ έχει πεπερασμένη υπακάλυψη: υπάρχουν $n_1, \ldots n_k$ ώστε $\bigcup_{i=1}^{k} G_{n_i} = X$. Αλλά η (G_n) είναι φθίνουσα από το (i), άρα $\bigcup_{i=1}^{k} G_{n_i} = G_{n_k}$. Άρα $G_{n_k} = X$, δηλαδή $X_{n_k} = \emptyset$. Αυτό είναι άτοπο, όπως παρατηρήσαμε στο (i).

(iii) Έστω $x \in Y$. Για κάθε n, έχω $x \in X_n$ άρα $f(x) \in f(X_n) = X_{n+1}$. Άρα $f(x) \in \bigcap_n X_{n+1} = Y$. Έδειξα ότι $f(Y) \subseteq Y$.

Έστω $y \in Y$, οπότε για κάθε n, έχω $y \in X_n$ άρα υπάρχει $z_n \in X_n$ ώστε $y = f(z_n)$. Η ακολουθία (z_n) είναι στον συμπαγή μ.χ. (X,ρ), άρα έχει συγκλίνουσα υπακολουθία, έστω z_{k_n}. Αν $z = \lim z_{k_n}$, τότε $f(z) = \lim f(z_{k_n})$. Όμως $f(z_{k_n}) = y$ για κάθε n, άρα $f(z) = y$.

Ισχυρίζομαι ότι $z \in Y$ (οπότε θα έχω δείξει ότι $y = f(z) \in f(Y)$ και άρα $Y \subseteq f(Y)$). Πράγματι, έστω $m \in \mathbb{N}$ τυχόν: θα δείξω ότι $z \in X_m$. Υπάρχει n_0 ώστε αν $n \geq n_0$ να ισχύει $k_n \geq m$ (π.χ. $n_0 = m$) οπότε $z_{k_n} \in X_m$. Όμως X_m κλειστό, άρα $z = \lim z_{k_n} \in X_m$.

6. **(α)** *Αν $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$, $n = 1,2,\ldots$ είναι συνεχείς και $f_n \to f$ ομοιόμορφα, δείξτε ότι $\int_a^b f_n(t)dt \to \int_a^b f(t)dt$.*

(β) *Ορίζουμε $f_n : (0,1] \to \mathbb{R}$, $n = 1,2,\ldots,$ με* $f_n(x) = \begin{cases} n^2, & 0 < x \leq \frac{1}{n} \\ \frac{1}{x^2}, & \frac{1}{n} < x \leq 1 \end{cases}$ *Εξετάστε την ακολουθία (f_n) ως προς την κατά σημείο και την ομοιόμορφη σύγκλιση.*

(γ) *Έστω $\alpha > 1/2$. Δείξτε ότι η σειρά συναρτήσεων* $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x}{k^\alpha(1+kx^2)}$ *συγκλίνει ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$.* **(3 μονάδες)**

Υποδ. **(α)** (δες και Θεώρημα 7.2.11). Η $|f_n - f|$ είναι συνεχής και άρα ολοκληρώσιμη, και ικανοποιεί $|f_n(t) - f(t)| \leq \|f_n - f\|_\infty$ για κάθε $t \in [a, b]$ (όπου $\|g\|_\infty = \sup\{|g(t)| : t \in [a, b]\}$. Άρα

$$\int_a^b |f_n(t) - f(t)|dt \leq \int_a^b \|f_n - f\|_\infty dt = (b - a)\|f_n - f\|_\infty \to 0$$

καθώς $n \to \infty$, από την υπόθεση. Άρα $|\int_a^b f_n(t) - \int_a^b f(t)dt| \leq \int_a^b |f_n(t) - f(t)|dt \to 0$.

(β) Έστω $x \in (0, 1]$. Υπάρχει $n_x \in \mathbb{N}$ ώστε $\frac{1}{n} < x$ για κάθε $n \geq n_x$. Οπότε για κάθε $n \geq n_x$ έχουμε $f_n(x) = \frac{1}{x^2}$, άρα $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \frac{1}{x^2}$ δηλ. $f_n \to f$ κατά σημείο, όπου $f(x) = \frac{1}{x^2}$.

Η σύγκλιση δεν είναι ομοιόμορφη: παρατηρήστε ότι

$$\|f_n - f\|_\infty = \sup_{0<x<\frac{1}{n}} \left| n^2 - \frac{1}{x^2} \right| = +\infty$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Άλλος τρόπος: βάλε π.χ. $x_n = \frac{1}{2n}$, οπότε $|f_n(x_n) - f(x_n)| = |n^2 - 4n^2|$ που δεν τείνει στο 0 (δες και την Ασκ. 7.32 (β)).

(γ) Ασκ. 7.8.