Πραγματική Ανάλυση

14 Νοεμβρίου 2011

1. (α) Έστω (X,d) μετρικός χώρος και έστω $x_0 \in X$ και $r > 0$. Αποδείξτε ότι το σύνολο $\widehat{B}(x_0,r) = \{x \in X : d(x,x_0) \leq r\}$ είναι κλειστό.

(β) Έστω (X,d) μετρικός χώρος. Αν $C \subseteq X$ με $\delta(C)$ συμβολίζουμε την διάμετρο του C: δηλαδή,

$$\delta(C) = \sup\{d(x,y) : x,y \in C\}.$$

Αποδείξτε ότι

(i) Αν $A,B \subseteq X$ και $A \cap B \neq \emptyset$ τότε $\delta(A \cup B) \leq \delta(A) + \delta(B)$.

(ii) Αν $A \subseteq X$, $r > 0$ και $A_r = \{x \in X : d(x,A) < r\}$, τότε $\delta(A_r) \leq \delta(A) + 2r$.

(2 μον.)

2. (α) Έστω (X,d) μετρικός χώρος και έστω $G \subseteq X$. Αποδείξτε ότι το G είναι ανοικτό αν και μόνο αν υπάρχει $f : X \to \mathbb{R}$ συνεχής ώστε $G = \{x \in X : f(x) \neq 0\}$.

(β) Έστω (X,d) και (Y,σ) μετρικοί χώροι και έστω $f : X \to Y$. Χρησιμοποιώντας τον χαρακτηρισμό της συνέχειας μέσω ακολουθιών (αρχή της μεταφοράς), αποδείξτε ότι η f είναι συνεχής αν και μόνο αν για κάθε $A \subseteq X$ ισχύει $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$.

(2 μον.)

3. Έστω $f : (X,d) \to (Y,\sigma)$ ομοιομορφισμός. Εξετάστε αν καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθής ή ψευδής (δώστε απόδειξη ή αντιπαράδειγμα):

(α) Αν ο (X,d) είναι ολικά φραγμένος τότε ο (Y,σ) είναι ολικά φραγμένος.

(β) Αν ο (X,d) είναι διαχωρίσιμος τότε ο (Y,σ) είναι διαχωρίσιμος.

(γ) Αν ο (X,d) είναι πλήρης τότε ο (Y,σ) είναι πλήρης.

(2 μον.)

4. (α) Έστω (X,d) μετρικός χώρος και έστω $x \in X$. Αν για κάθε $\varepsilon > 0$ το σύνολο $X \setminus B(x,\varepsilon)$ είναι συμπαγές, αποδείξτε ότι ο X είναι συμπαγής.

(β) Έστω (X,d) συμπαγής μετρικός χώρος και έστω $f : X \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Αποδείξτε ότι το γράφημα $G(f) = \{(x,f(x)) : x \in X\}$ είναι συμπαγές υποσύνολο του $X \times \mathbb{R}$.

(2 μον.)

5. (α) Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος και D πυκνό υποσύνολο του X. Αποδείξτε ότι: αν κάθε βασική ακολουθία (x_n) στοιχείων του D συγκλίνει σε κάποιο $x \in X$, τότε ο X είναι πλήρης.

(β) Έστω $f, f_n : (X,d) \to \mathbb{R}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο X. Έστω $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση. Δείξτε ότι $g \circ f_n \to g \circ f$ ομοιόμορφα στο X.

(2 μον.)

6. (α) Εξετάστε ως προς την κατά σημείο και την ομοιόμορφη σύγκλιση την ακολουθία συναρτήσεων $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ με $f_n(x) = \begin{cases} n^2 x, & 0 \leq x < \frac{1}{n} \\ \frac{1}{(n+1)x-1}, & \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \end{cases}$.

(β) Αποδείξτε ότι η σειρά συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2 \cos(nx)}{n^2}$ συγκλίνει κατά σημείο στο $\mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη σε κάθε κλειστό διάστημα $[-\alpha,\alpha] \subset \mathbb{R}$ και συμπεράνατε ότι η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2 \cos(nx)}{n^2}$ είναι συνεχής.

(2 μον.)

Καλή Επιτυχία!