Πραγματική Ανάλυση (2010–11)

Ενδιάμεση Εξέταση – 11 Δεκεμβρίου 2010

Θέμα 1. (α) Έστω (X,d) μετρικός χώρος και $G_1,\ldots,G_n$ ανοικτά υποσύνολα του X. Δείξτε ότι το $G = G_1 \cap \cdots \cap G_n$ είναι ανοικτό.

(β) Έστω (X,d) μετρικός χώρος και έστω G ανοικτό υποσύνολο του X. Αν $A \subseteq X$ δείξτε ότι $G \cap A \neq \emptyset$ αν και μόνο αν $G \cap \overline{A} \neq \emptyset$.

(γ) Θεωρούμε το $\mathbb{R}$ με τη συνήθη μετρική. Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς (αιτιολογήστε την απάντησή σας):

(i) Αν A είναι μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ τότε $A' = (\overline{A})'$. Δηλαδή, τα A και $\overline{A}$ έχουν τα ίδια σημεία συσσώρευσης.

(ii) Αν $A \subseteq B \subseteq \mathbb{R}$ και το x_0 είναι μεμονωμένο σημείο του A, τότε το x_0 είναι μεμονωμένο σημείο του B.

(3.5μ)

Θέμα 2. (α) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Το *γράφημα* της f είναι το σύνολο

$$\mathrm{Gr}(f) = \big\{(x, f(x)) : x \in \mathbb{R}\big\} \subseteq \mathbb{R}^2.$$

Δείξτε ότι, αν η f είναι συνεχής συνάρτηση, τότε το γράφημα $\mathrm{Gr}(f)$ της f είναι κλειστό στον $\mathbb{R}^2$ ως προς την Ευκλείδεια μετρική.

(β) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Δείξτε ότι: αν η f είναι φραγμένη και έχει κλειστό γράφημα τότε είναι συνεχής.

(2.5μ)

Θέμα 3. (α) Εξετάστε αν ο $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$ είναι ομοιομορφικός με τον $(\mathbb{N}, |\cdot|)$.

(β) Έστω $f : (X,\rho) \to (Y,\sigma)$ συνάρτηση Lipschitz με σταθερά $M > 0$. Δείξτε ότι, για κάθε φραγμένο υποσύνολο A του X,

$$\mathrm{diam}(f(A)) \leq M\mathrm{diam}(A).$$

(γ) Είναι σωστό ότι κάθε ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση $f : (X,\rho) \to (Y,\sigma)$ απεικονίζει φραγμένα υποσύνολα του X σε φραγμένα υποσύνολα του Y;

(3μ)

Θέμα 4. (α) Έστω (X,d) μετρικός χώρος. Αν το G είναι ανοικτό και πυκνό υποσύνολο του X και το D είναι πυκνό υποσύνολο του X, τότε το $G \cap D$ είναι πυκνό υποσύνολο του X. Ισχύει το ίδιο αν το G δεν υποτεθεί ανοικτό;

(β) Στο $X = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ θεωρούμε τη μετρική

$$d(x,y) = |x-y| + \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right|.$$

Δείξτε ότι η d είναι ισοδύναμη με τη συνήθη μετρική και ότι ο (X,d) είναι πλήρης.

(3μ)

Ενδεικτικές Απαντήσεις

Θέμα 1. (α) Έστω $x \in G_1 \cap \cdots \cap G_n$. Τότε, $x \in G_i$ για κάθε $i = 1, \ldots, n$. Αφού όλα τα G_i είναι ανοικτά, για κάθε $i = 1, \ldots, n$ υπάρχει $\varepsilon_i > 0$ ώστε $B(x, \varepsilon_i) \subseteq G_i$. Θέτουμε $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n\} > 0$. Τότε, για κάθε $i = 1, \ldots, n$ έχουμε $\varepsilon \leq \varepsilon_i$, άρα

$$B(x, \varepsilon) \subseteq B(x, \varepsilon_i) \subseteq G_i.$$

Συνεπώς, $B(x, \varepsilon) \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} G_i$. Κάθε σημείο x του $G_1 \cap \cdots \cap G_n$ είναι εσωτερικό του σημείο, άρα το $G_1 \cap \cdots \cap G_n$ είναι ανοικτό.

(β) Έχουμε $A \subseteq \overline{A}$, άρα $G \cap A \subseteq G \cap \overline{A}$. Αν λοιπόν $G \cap A \neq \emptyset$, είναι φανερό ότι $G \cap \overline{A} \neq \emptyset$.

Αντίστροφα, έστω ότι $G \cap \overline{A} \neq \emptyset$. Υποθέτουμε ότι $G \cap A = \emptyset$. Τότε, $A \subseteq X \setminus G$ και το $X \setminus G$ είναι κλειστό (διότι το G είναι ανοικτό). Έπεται ότι $\overline{A} \subseteq X \setminus G$ (ιδιότητες της κλειστής θήκης), άρα $G \cap \overline{A} = \emptyset$, το οποίο είναι άτοπο.

(γ) (i) Η πρόταση είναι σωστή σε κάθε μετρικό χώρο (X, d). Αρχικά, αφού $A \subseteq \overline{A}$ έχουμε $A' \subseteq (\overline{A})'$ (αν $x \in A'$, κάθε μπάλα με κέντρο το x περιέχει άπειρα σημεία του A, τα οποία είναι και σημεία του $\overline{A}$ – έπεται ότι $x \in (\overline{A})'$).

Αντίστροφα: έστω $x \in (\overline{A})'$ και έστω $\varepsilon > 0$. Μέσα στην $B(x, \varepsilon)$ μπορούμε να βρούμε $y \in \overline{A}$ με $y \neq x$. Επιλέγοντας αρκετά μικρό $\delta > 0$ (πάρτε $0 < \delta < \min\{d(x, y), \varepsilon - d(x, y)\}$) έχουμε $B(y, \delta) \subseteq B(x, \varepsilon)$ και $x \notin B(y, \delta)$. Αφού $y \in \overline{A}$, υπάρχει $z \in A \cap B(y, \delta)$. Τότε, $z \neq x$ και $z \in B(x, \varepsilon)$. Το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, άρα $x \in A'$.

(ii) Η πρόταση δεν είναι σωστή. Αν $A = \{0\}$ και $B = \mathbb{R}$, τότε $A \subseteq B \subseteq \mathbb{R}$ και το 0 είναι μεμονωμένο σημείο του $\{0\}$, αλλά το 0 δεν είναι μεμονωμένο σημείο του $\mathbb{R}$.

Θέμα 2. (α) Θεωρούμε τυχούσα ακολουθία $(x_n, f(x_n)) \in \mathrm{Gr}(f)$ με $(x_n, f(x_n)) \longrightarrow (x, y) \in \mathbb{R}^2$. Τότε, $x_n \longrightarrow x$ και $f(x_n) \longrightarrow y$. Αφού η f είναι συνεχής στο x και $x_n \longrightarrow x$, από την αρχή της μεταφοράς παίρνουμε $f(x_n) \longrightarrow f(x)$. Από τη μοναδικότητα του ορίου για την $(f(x_n))$ συμπεραίνουμε ότι $y = f(x)$. Συνεπώς, $(x, y) = (x, f(x)) \in \mathrm{Gr}(f)$. Έπεται ότι το $\mathrm{Gr}(f)$ είναι κλειστό σύνολο στον $\mathbb{R}^2$.

(β) Έστω (x_n) ακολουθία στο $\mathbb{R}$ με $x_n \to x \in \mathbb{R}$ αλλά $f(x_n) \not\to f(x)$. Περνώντας σε υπακολουθία της (x_n) μπορούμε να υποθέσουμε ότι υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε $|f(x_n) - f(x)| \geq \varepsilon$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αφού η f είναι φραγμένη, η ακολουθία $(f(x_n))$ είναι φραγμένη ακολουθία στο $\mathbb{R}$. Από το θεώρημα Bolzano–Weierstrass υπάρχει υπακολουθία $(f(x_{k_n}))$ της $(f(x_n))$ η οποία συγκλίνει σε κάποιο $y \in \mathbb{R}$. Τότε, $(x_{k_n}, f(x_{k_n})) \in \mathrm{Gr}(f)$ και $(x_{k_n}, f(x_{k_n})) \to (x, y)$. Αφού το $\mathrm{Gr}(f)$ είναι κλειστό συμπεραίνουμε ότι $y = f(x)$, δηλαδή $f(x_{k_n}) \to f(x)$. Αυτό είναι άτοπο, διότι $|f(x_{k_n}) - f(x)| \geq \varepsilon$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Θέμα 3. (α) Το $\mathbb{Q}$ δεν είναι ομοιομορφικό με το $\mathbb{N}$. Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει ομοιομορφισμός $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{N}$. Θεωρούμε την ακολουθία (q_n) στο $\mathbb{Q}$ με $q_n = \frac{1}{n}$. Έχουμε $q_n = \frac{1}{n} \to 0 \in \mathbb{Q}$, άρα $f(1/n) \to f(0)$. Αναγκαστικά, η $f(1/n)$ πρέπει να είναι τελικά σταθερή και ίση με $f(0)$ (οι συγκλίνουσες ακολουθίες φυσικών είναι οι τελικά σταθερές ακολουθίες φυσικών). Υπάρχει λοιπόν $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $f(1/n) = f(0)$ για κάθε $n \geq n_0$. Τότε, αφού η f είναι 1-1, θα πρέπει να ισχύει $1/n = 0$ για κάθε $n \geq n_0$, το οποίο είναι άτοπο.

(β) Έστω $x, y \in A$. Τότε,

$$\sigma(f(x), f(y)) \leq M\rho(x, y) \leq M\mathrm{diam}(A) < \infty.$$

Παίρνοντας supremum ως προς $x, y \in A$ συμπεραίνουμε ότι $\mathrm{diam}(f(A)) \leq M\mathrm{diam}(A)$.

(γ) Όχι. Αν θεωρήσουμε την ταυτοτική συνάρτηση $I : (\mathbb{R}, \delta) \to (\mathbb{R}, |\cdot|)$ όπου δ η διακριτή μετρική, τότε αυτή είναι ομοιόμορφα συνεχής. Παρατηρήστε ότι το $\mathbb{R}$ είναι φραγμένο στον $(\mathbb{R}, \delta)$ αλλά δεν είναι φραγμένο στον $(\mathbb{R}, |\cdot|)$.

Θέμα 4. (α) Προφανώς, έχουμε $\overline{D \cap G} \subseteq X$.

Αντίστροφα, έστω $x \in X$ και έστω $\varepsilon > 0$. Αφού το G είναι πυκνό, υπάρχει $y \in B(x, \varepsilon) \cap G$. Το τελευταίο σύνολο είναι ανοικτό ως τομή ανοικτών συνόλων, άρα υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $B(y, \delta) \subseteq B(x, \varepsilon) \cap G$. Αφού το D είναι πυκνό, μπορούμε να βρούμε $z \in B(y, \delta) \cap D$. Τότε, $z \in B(x, \varepsilon) \cap (G \cap D)$. Δείξαμε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $z \in G \cap D$ ώστε $z \in B(x, \varepsilon)$. Άρα, $x \in \overline{G \cap D}$. Αφού το $x \in X$ ήταν τυχόν, έπεται ότι $X \subseteq \overline{G \cap D}$.

Χωρίς την υπόθεση ότι το G είναι ανοικτό, το συμπέρασμα δεν ισχύει αναγκαστικά. Για παράδειγμα, στο $\mathbb{R}$ θεωρήστε τα πυκνά σύνολα $G = \mathbb{Q}$ και $D = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Τότε, $\overline{G \cap D} = \overline{\emptyset} = \emptyset$.

(β) Υποθέτουμε πρώτα ότι $x_n \neq 0$ και $x_n \to x \neq 0$ με τη συνήθη μετρική. Τότε, $\frac{1}{x_n} \to \frac{1}{x}$ με τη συνήθη μετρική, άρα

$$d(x_n, x) = |x_n - x| + \left| \frac{1}{x_n} - \frac{1}{x} \right| \to 0,$$

δηλαδή $x_n \to x$ ως προς την d. Αντίστροφα, αν $d(x_n, x) \to 0$ για κάποια (x_n) και κάποιο x στο $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, τότε από την $|x_n - x| \leq d(x_n, x)$ είναι φανερό ότι $x_n \to x$ με τη συνήθη μετρική. Συνεπώς, η d είναι ισοδύναμη με τη συνήθη μετρική.

Έστω (x_n) μια d–βασική ακολουθία στο $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Από την $|x_n - x_m| \leq d(x_n, x_m)$ βλέπουμε εύκολα ότι η (x_n) είναι βασική και ως προς την συνήθη μετρική. Άρα, υπάρχει $x \in \mathbb{R}$ ώστε $|x_n - x| \to 0$.

Θα δείξουμε ότι $x \neq 0$, δηλαδή το x είναι σημείο του χώρου $X = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Γι' αυτό χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι $\left| \frac{1}{x_n} - \frac{1}{x_m} \right| \leq d(x_n, x_m)$, άρα η $\left(\frac{1}{x_n} \right)$ είναι κι αυτή βασική στο $\mathbb{R}$ με τη συνήθη μετρική, οπότε η $\left(\frac{1}{x_n} \right)$ είναι φραγμένη: υπάρχει $M > 0$ ώστε $\left| \frac{1}{x_n} \right| \leq M$, άρα $|x_n| \geq 1/M > 0$, άρα η (x_n) δεν μπορεί να συγκλίνει στο 0.

Αφού $x \neq 0$, από την $x_n \to x$ παίρνουμε $\frac{1}{x_n} \to \frac{1}{x}$, άρα

$$d(x_n, x) = |x_n - x| + \left| \frac{1}{x_n} - \frac{1}{x} \right| \to 0.$$

Δηλαδή, η (x_n) είναι d–συγκλίνουσα. Συνεπώς, ο (X, d) είναι πλήρης.