Πραγματική Ανάλυση (2010–11)
28 Ιανουαρίου 2011

Θέμα 1. (α) Έστω $(X,d),(Y,\sigma)$ μετρικοί χώροι. Θεωρούμε τον μετρικό χώρο $(X\times Y,\rho)$ όπου $\rho((x,y),(x',y'))=d(x,x')+\sigma(y,y')$. Αν $A\subseteq X$ και $B\subseteq Y$, δείξτε ότι:

(i) Αν τα A και B είναι κλειστά, τότε το $A\times B$ είναι κλειστό στον $(X\times Y,\rho)$.

(ii) Αν τα A και B είναι συμπαγή, τότε το $A\times B$ είναι συμπαγές στον $(X\times Y,\rho)$.

(β) Αν $A\subseteq\mathbb{R}$ είναι ανοικτό και πυκνό δείξτε ότι για κάθε $x\in A$ το σύνολο $A\setminus\{x\}$ είναι ανοικτό και πυκνό. Ισχύει το ίδιο αν $A\subseteq X$, όπου (X,ρ) τυχών μετρικός χώρος;

(2μ)

Θέμα 2. (α) Έστω $f:(X,\rho)\to(Y,\sigma)$ συνεχής. Δείξτε ότι για κάθε $A\subseteq X$ ισχύει ότι $f(\overline{A})\subseteq\overline{f(A)}$. Αν επιπλέον υποθέσουμε ότι ο X είναι συμπαγής, δείξτε ότι τότε, για κάθε $A\subseteq X$ ισχύει ότι $f(\overline{A})=\overline{f(A)}$.
(β) Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς (αιτιολογήστε την απάντησή σας):

(i) Αν $f:(X,\rho)\to(Y,\sigma)$ είναι ομοιομορφισμός και ο X είναι ολικά φραγμένος, τότε και ο Y θα είναι ολικά φραγμένος.

(ii) Αν (x_n) είναι βασική ακολουθία σε έναν μετρικό χώρο (X,ρ), τότε το σύνολο $A:=\{x_n:n\in\mathbb{N}\}$ είναι ολικά φραγμένο.

(2μ)

Θέμα 3. (α) Δείξτε ότι ένας μετρικός χώρος (X,ρ) είναι πλήρης αν και μόνον αν, για κάθε $x\in X$ και για κάθε $r>0$, η κλειστή μπάλα $\widehat{B}(x,r)$ είναι πλήρης μετρικός χώρος (ως προς τη σχετική μετρική).
(β) Έστω (X,ρ) πλήρης μετρικός χώρος και $f,g:X\to X$ συναρτήσεις ώστε $f\circ g=g\circ f$. Υποθέτουμε ότι η f είναι γνήσια συστολή: δηλαδή, υπάρχει σταθερά $c\in(0,1)$ ώστε για κάθε $x,y\in X$ να ισχύει $\rho(f(x),f(y))\leq c\rho(x,y)$. Δείξτε ότι υπάρχει ακριβώς ένα $x\in X$ ώστε $f(x)=x=g(x)$.

(2μ)

Θέμα 4. (α) Έστω (X,d) συμπαγής μετρικός χώρος και $f:X\to\mathbb{R}$. Αν η f είναι συνεχής, δείξτε ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.
(β) Έστω (Y,ρ) μετρικός χώρος και (y_n) ακολουθία στον Y με $y_n\to y$. Αν $F=\{y_n:n\in\mathbb{N}\}\cup\{y\}$, δείξτε ότι το F είναι συμπαγές.
(γ) Έστω (Y,ρ) μετρικός χώρος και $A\subseteq Y$. Δείξτε ότι το A είναι κλειστό αν και μόνον αν για κάθε συμπαγές $K\subseteq Y$, το $A\cap K$ είναι κλειστό στον Y.

(2μ)

Θέμα 5. (α) Έστω (X,d) μετρικός χώρος και $f_n,f:X\to\mathbb{R}$. Αν οι f_n είναι ομοιόμορφα συνεχείς και $f_n\to f$ ομοιόμορφα, δείξτε ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.
(β) Έστω $f_n:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ με $f_n(x)=\frac{nx}{nx+1}$. Δείξτε ότι:

(i) Η (f_n) συγκλίνει κατά σημείο. Ποιά είναι η οριακή συνάρτηση f;

(ii) Για κάθε $a>0$, η (f_n) συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[a,\infty)$, αλλά δεν συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[0,a]$.

(2μ)

Θέμα 6. (α) Θεωρούμε τη σειρά συναρτήσεων $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{1+k^2x^2}$, $(x\geq 0)$. Δείξτε ότι η σειρά αποκλίνει για $x=0$ και συγκλίνει για κάθε $x\neq 0$. Δείξτε επίσης ότι για κάθε $a>0$, η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη στο $[a,+\infty)$.
(β) Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ομοιόμορφα συνεχής και έστω (δ_n) ακολουθία με $\delta_n>0$ για κάθε n και $\delta_n\to 0$. Θέτουμε $f_n(x)=\frac{1}{\delta_n}\int_x^{x+\delta_n}f(t)dt,\quad x\in\mathbb{R}$. Δείξτε ότι $f_n\to f$ ομοιόμορφα.

(2μ)

Καλή Επιτυχία!