ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

30 Ιουνίου 2011

1. **(α)** Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος και A,B υποσύνολα του X. Δείξτε ότι $A^o \cup B^o \subseteq (A\cup B)^o$. Ισχύει πάντα ισότητα;

(β) Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος και A,B μη κενά υποσύνολα του X. Αν $d(x,A)=\inf\{\rho(x,a): a\in A\}$ και $\delta(A)=\mathrm{diam}(A)=\sup\{\rho(a,b): a\in A, b\in B\}$, δείξτε ότι:

(i) Για κάθε $x\in X$ ισχύει $\quad d(x,A)=d(x,\overline{A})$.

(ii) Για κάθε $x,y\in X$ ισχύει $\quad \rho(x,y)\le d(x,A)+\delta(A)+d(y,A)$.

2. **(α)** Έστω $f:\mathbb{R}\to[0,+\infty)$. Δείξτε ότι, αν η f είναι συνεχής συνάρτηση, τότε το σύνολο

$$\big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\le y\le f(x)\big\}$$

είναι κλειστό στον $\mathbb{R}^2$.

(β) Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος και A,B μη κενά υποσύνολα του X. Δείξτε ότι αν το A είναι κλειστό, το B συμπαγές και $A\cap B=\emptyset$ τότε $d(A,B)>0$
(όπου $d(A,B)=\mathrm{dist}\,(A,B)=\inf\{\rho(a,b): a\in A, b\in B\}$).

3. Έστω (X,ρ) *πλήρης* (μη κενός) μετρικός χώρος. Δώστε απόδειξη ή αντιπαράδειγμα για καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις:

(α) Αν $g:(0,1)\to(X,\rho)$ είναι συνάρτηση Lipschitz και (t_n) βασική ακολουθία στο $(0,1)$, τότε η ακολουθία $(g(t_n))$ είναι συγκλίνουσα στον (X,ρ).

(β) Αν (A_n) είναι φθίνουσα ακολουθία μη κενών υποσυνόλων του X, τότε $\bigcap_{n=1}^{\infty}\overline{A_n}\neq\emptyset$.

(γ) Αν $f:X\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής συνάρτηση και $F_n=\{x\in X: |f(x)|\le n\}=f^{-1}([-n,n])$, τότε υπάρχει $m\in\mathbb{N}$ ώστε $F_m^o\neq\emptyset$.

4. Έστω (X,ρ) μη κενός *συμπαγής* μετρικός χώρος.

(α) Αν $f:X\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής συνάρτηση, δείξτε ότι η f παίρνει μέγιστη τιμή.

(β) Αν (K_n) είναι φθίνουσα ακολουθία κλειστών υποσυνόλων του X και η τομή $\bigcap_{n=1}^{\infty}K_n$ είναι μονοσύνολο, δείξτε ότι: $\delta(K_n)\to 0$
(όπου $\delta(A)=\mathrm{diam}(A)=\sup\{\rho(x,y): x,y\in A\}$ η διάμετρος του A.)

5. **(α)** Έστω $f,f_n:(X,\rho)\to(\mathbb{R},|\cdot|)$. Αν κάθε f_n είναι συνεχής συνάρτηση και $f_n\to f$ ομοιόμορφα, δείξτε ότι η f είναι συνεχής συνάρτηση.

(β) Δώστε παράδειγμα συνεχούς συνάρτησης $f:(0,1]\to\mathbb{R}$ ώστε να μην υπάρχει ακολουθία πολυωνύμων (p_n) με $p_n\to f$ ομοιόμορφα στο $(0,1]$.

6. Εξετάστε αν η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} n x^n$$

(α) συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$

(β) συγκλίνει ομοιόμορφα στο $(-1,1)$.

[Υπόδειξη προαιρετική: Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε τα κριτήρια σύγκλισης σειρών συναρτήσεων.]

Καλή Επιτυχία!