Πραγματική Ανάλυση (2010-11)

Ενδιάμεση Εξέταση – 7 Μαΐου 2011

1. Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος, (x_n) ακολουθία στο X και $x \in X$. Δείξτε ότι:

(α) Αν η (x_n) είναι βασική ακολουθία και έχει μια υπακολουθία που συγκλίνει στο x, τότε η (x_n) συγκλίνει στο x.

(β) Αν κάθε υπακολουθία της (x_n) έχει μια υπακολουθία που συγκλίνει στο x, τότε η (x_n) συγκλίνει στο x.

2. Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος και $A \subseteq X$. Δείξτε ότι:

(α) Κάθε πεπερασμένο υποσύνολο του X είναι κλειστό στον X.

(β) Ένα σημείο $x \in X$ ανήκει στο σύνολο A' των σημείων συσσώρευσης του A αν, και μόνον αν, για κάθε $r > 0$ το σύνολο $B(x,r) \cap (A \setminus \{x\})$ **δεν** είναι κλειστό στον X.

(γ) Το σύνολο A' είναι κλειστό στον X.

3. Έστω $f : (X,d) \to (Y,\sigma)$ μια συνάρτηση. Δείξτε ότι:

(α) Αν η f απεικονίζει βασικές ακολουθίες του (X,d) σε βασικές ακολουθίες του (Y,σ), τότε η f είναι συνεχής.

(β) Αν η f είναι συνεχής, τότε το γράφημά της

$$\{(x,y) \in X \times Y : y = f(x)\}$$

είναι κλειστό στον $(X \times Y, \rho)$, για κάθε μετρική γινόμενο ρ.

4. (α1) Έστω A μη κενό σύνολο και $f : A \to \mathbb{R}$ συνάρτηση 1-1. Αποδείξτε πλήρως ότι η απεικόνιση $d : A \times A \to \mathbb{R}$ όπου $d(x,y) = |f(x) - f(y)|$ είναι μετρική στο A.

(α2) Αν $A = [1,\infty)$, δείξτε ότι οι μετρικές ρ και d όπου $\rho(x,y) = |x-y|$ και $d(x,y) = |\frac{1}{x} - \frac{1}{y}|$ είναι ισοδύναμες.

(β) Έστω $f : (X,\rho) \to (Y,\sigma)$ συνεχής συνάρτηση και D πυκνό υποσύνολο του X. Δείξτε ότι:

αν η $f|_D$ είναι ομοιόμορφα συνεχής, τότε η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.

Καλή επιτυχία!