# Πραγματική Ανάλυση (2011–12)

Ενδιάμεση Εξέταση – 26 Μαΐου 2010

**Θέμα 1.** (α) Έστω $(X,d)$ μετρικός χώρος και $(x_n),(y_n)$ βασικές ακολουθίες στον $(X,d)$. Δείξτε ότι η $a_n = d(x_n,y_n)$ συγκλίνει στον $\mathbb{R}$.

(β) Αποδείξτε πλήρως ότι για μία συνάρτηση $f:(X,\rho)\to(Y,\sigma)$, τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

$(i)$ Η $f$ είναι ομοιόμορφα συνεχής.

$(ii)$ Αν $(x_n),(z_n)$ είναι ακολουθίες στον $X$ με $\rho(x_n,z_n)\to 0$, τότε $\sigma(f(x_n),f(z_n))\to 0$.

**Θέμα 2.** (α) Έστω $(X,d)$ μετρικός χώρος, $A,B\subseteq X$. Δείξτε ότι $\overline{A\cap B}\subseteq \overline{A}\cap\overline{B}$ και εξετάστε αν ισχύει πάντα ισότητα.

(β) Έστω $(X,d)$ μετρικός χώρος και $(x_n)$ μια ακολουθία στον $X$. Θέτουμε $A=\{x_n : n\in\mathbb{N}\}$. Αποδείξτε ότι

(1) Αν $x\in A'$, τότε υπάρχει υπακολουθία $(x_{k_n})$ της $(x_n)$ που συγκλίνει στο $x$.

(2) Αν η $(x_n)$ είναι βασική αλλά δεν συγκλίνει, τότε $A'=\emptyset$.

**Θέμα 3.** (α) Αποδείξτε πλήρως ότι μία συνάρτηση $f:(X,\rho)\to(Y,\sigma)$ είναι συνεχής αν και μόνον αν για κάθε κλειστό υποσύνολο $F$ του $Y$ το σύνολο $f^{-1}(F)$ είναι κλειστό στον $(X,\rho)$.

(β) Έστω $f,g:(X,\rho)\to(Y,\sigma)$ συναρτήσεις. Θέτουμε $h:X\to Y\times Y$ με $h(x)=(f(x),g(x))$. Δείξτε ότι η $h$ είναι συνεχής αν και μόνον αν οι $f$ και $g$ είναι συνεχείς (στον χώρο $Y\times Y$ θεωρούμε μια μετρική γινόμενο).

**Θέμα 4.** (α) Έστω $(X,d)$ μετρικός χώρος και $\rho=\frac{d}{1+d}$. Αποδείξτε πλήρως ότι η $\rho$ είναι μετρική στον $X$ ισοδύναμη με την $d$.

(β) Εξετάστε αν ισχύει κάθε μια από τις επόμενες προτάσεις

$(i)$ Υπάρχει συνάρτηση $f:\mathbb{Q}\to\mathbb{N}$ που είναι 1-1.

$(ii)$ Υπάρχει συνάρτηση $g:(\mathbb{Q},|\cdot|)\to(\mathbb{N},|\cdot|)$ που είναι συνεχής και 1-1.

$(iii)$ Κάθε συνάρτηση $g:(\mathbb{N},|\cdot|)\to(\mathbb{Q},|\cdot|)$ είναι συνεχής.

**Καλή επιτυχία!**