ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

6 Ιουλίου 2012

1. Έστω (X, d) μετρικός χώρος και έστω A, B υποσύνολα του X.
(α) Δείξτε ότι $(A \setminus B)^\circ \subseteq A^\circ \setminus B^\circ$ και $\overline{A} \setminus \overline{B} \subseteq \overline{(A \setminus B)}$.
(β) Αν $A \cap B = \emptyset$ και το A είναι ανοικτό τότε $A \cap \overline{B} = \emptyset$. Ισχύει η συνεπαγωγή αν το A δεν είναι ανοικτό;

2. (α) Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος και A, B μη κενά και φραγμένα υποσύνολα του X. Γράφουμε $\mathrm{dist}\,(A, B) := \inf\{\rho(a, b) : a \in A, b \in B\}$. Δείξτε
(*i*) ότι $\mathrm{dist}\,(A, B) = \mathrm{dist}\,(\overline{A}, \overline{B})$ και
(*ii*) ότι το σύνολο $C = \{x \in X : \mathrm{dist}\,(x, A) < 1\}$ είναι ανοικτό και φραγμένο.
(β) Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος. Να ορισθεί το σύνορο ∂E ενός υποσυνόλου E του X και να αποδειχθεί ότι ένα $x \in X$ ανήκει στο ∂E αν και μόνον αν υπάρχουν ακολουθίες (x_n) και (y_n) που συγκλίνουν στο x ώστε $x_n \in E$ και $y_n \notin E$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

3. (α) Αποδείξτε πλήρως ότι ένας μετρικός χώρος (X, ρ) είναι πλήρης αν και μόνον αν κάθε κλειστό και φραγμένο υποσύνολο F του X είναι πλήρης μετρικός χώρος (ως προς τη σχετική μετρική).
(β) Έστω $f : (X, \rho) \to (Y, \sigma)$ συνάρτηση μεταξύ μετρικών χώρων.
(*i*) Αν η f είναι συνεχής, δείξτε ότι το γράφημα

$$Gr(f) = \{(x, f(x)) : x \in X\}$$

είναι κλειστό υποσύνολο του $X \times Y$ (ως προς μια οποιαδήποτε μετρική γινόμενο).
(*ii*) Αν το $Gr(f)$ είναι συμπαγές, δείξτε ότι η f είναι συνεχής.

4. (α) Έστω $f : (X, \rho) \to (Y, \sigma)$ ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση μεταξύ μετρικών χώρων. Αν (x_n) είναι βασική ακολουθία στον X, δείξτε ότι η $(f(x_n))$ είναι βασική ακολουθία στον Y.
(β) Για κάθε μια από τις παρακάτω προτάσεις δώστε απόδειξη ή αντιπαράδειγμα:

(*i*) Αν (X, d) είναι συμπαγής μετρικός χώρος, τότε ο (X, d) είναι ολικά φραγμένος.

(*ii*) Αν (X, d) είναι ολικά φραγμένος μετρικός χώρος, τότε ο (X, d) είναι συμπαγής.

(*iii*) Αν (X, d) είναι συμπαγής μετρικός χώρος και (Y, ρ) είναι ολικά φραγμένος, τότε ο $(X \times Y, \sigma)$ είναι ολικά φραγμένος, όπου η μετρική σ ορίζεται από τη σχέση

$$\sigma((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \max\{d(x_1, x_2), \rho(y_1, y_2)\}, \quad (x_i, y_i) \in X \times Y.$$

5. (α) Έστω (X, d) μετρικός χώρος. Αποδείξτε πλήρως ότι κάθε συμπαγές υποσύνολο του X είναι κλειστό και φραγμένο. Ισχύει το αντίστροφο;
(β) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση και έστω (x_n) ακολουθία πραγματικών αριθμών με $x_n \to 0$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f_n(t) = f(t + x_n)$. Δείξτε ότι $f_n \to f$ ομοιόμορφα.

6. (α) Θεωρούμε την ακολουθία συναρτήσεων $f_n : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ με

$$f_n(x) = \frac{1}{nx + 1}$$

Δείξτε ότι η (f_n) συγκλίνει κατά σημείο και βρείτε την οριακή συνάρτηση. Δείξτε ότι η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη σε κάθε διάστημα της μορφής $[a, \infty)$ όπου $a > 0$ αλλά όχι στο $[0, \infty)$.
(β) Εξετάστε αν η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^3 e^{-n^2 x}$$

συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[0, \infty)$.

Καλή Επιτυχία!