ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

5 Σεπτεμβρίου 2012

1. Έστω (X,d) μετρικός χώρος και έστω A,B υποσύνολα του X. Δείξτε ότι

(α) $(A\cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$.

(β) Αν τα A και B είναι μη κενά τότε $d(A,B)=d(\overline{A},\overline{B})$
(όπου $d(A,B)=\operatorname{dist}(A,B)=\inf\{d(a,b): a\in A, b\in B\}$).

(γ) Αν τα A και B είναι πυκνά στον X, τότε το $A\times B$ είναι πυκνό στον $(X\times X,\sigma)$, όπου σ οποιαδήποτε μετρική γινόμενο στο $X\times X$.

2. Έστω $(X,\rho),(Y,\sigma)$ μετρικοί χώροι και $f: X\to Y$ συνεχής συνάρτηση. Για κάθε $y\in Y$ θέτουμε

$$A_y := \{x\in X : f(x)=y\} = f^{-1}(\{y\}).$$

Δείξτε ότι

(i) αν η f είναι ομοιόμορφα συνεχής, τότε για κάθε $y,y'\in f(X)$ με $y\neq y'$ ισχύει $\operatorname{dist}(A_y,A_{y'})>0$ και

(ii) αν ο (X,ρ) είναι πλήρης και ο Y είναι αριθμήσιμος, υπάρχει $y\in Y$ ώστε $(A_y)^\circ\neq\emptyset$.

3. (α) Έστω (X,ρ) συμπαγής μετρικός χώρος και $f: X\to X$ συνεχής συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι υπάρχει ακολουθία (x_n) στον X ώστε $\rho(x_n,f(x_n))\to 0$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $x\in X$ ώστε $f(x)=x$.

(β) Αν $A,B\subseteq\mathbb{R}$ είναι συμπαγή, δείξτε ότι το σύνολο

$$A+B := \{a+b : a\in A, b\in B\}$$

είναι συμπαγές.

4. Έστω $f:(X,\rho)\to(Y,\sigma)$ συνεχής συνάρτηση μεταξύ μετρικών χώρων.

Για κάθε μια από τις παρακάτω προτάσεις δώστε πλήρη απόδειξη ή αντιπαράδειγμα:

(i) Αν $K\subseteq X$ είναι συμπαγές, τότε το $f(K)\subseteq Y$ είναι συμπαγές.

(ii) Αν $K\subseteq X$ είναι φραγμένο, τότε το $f(K)\subseteq Y$ είναι φραγμένο.

(iii) Αν $K\subseteq X$ είναι φραγμένο και η f είναι συνάρτηση Lipschitz, τότε το $f(K)\subseteq Y$ είναι φραγμένο.

5. Έστω (X,d) μετρικός χώρος και (F_n) φθίνουσα ακολουθία κλειστών και μη κενών υποσυνόλων του X. Αποδείξτε ότι:

(α) Αν ο X είναι συμπαγής τότε $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} F_n\neq\emptyset$.

(β) Αν ο X είναι πλήρης και $\operatorname{diam}(F_n)\to 0$ τότε $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} F_n\neq\emptyset$
(όπου $\operatorname{diam}(F) := \sup\{d(x,y): x,y\in F\}$).

6. (α) (i) Έστω (X,d) μετρικός χώρος και $f_n,f,g_n,g: X\to\mathbb{R}$ ώστε $f_n\to f$ και $g_n\to g$ ομοιόμορφα. Αποδείξτε ότι αν οι f,g είναι φραγμένες τότε $f_ng_n\to fg$ ομοιόμορφα.

(ii) Βρείτε ακολουθίες $(f_n),(g_n):\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ οι οποίες συγκλίνουν ομοιόμορφα, αλλά η (f_ng_n) δεν συγκλίνει ομοιόμορφα.

(β) Εξετάστε αν η σειρά συναρτήσεων

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x}{k(1+kx^2)}$$

συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[0,\infty)$.

Καλή Επιτυχία!