Πραγματική Ανάλυση – Ενδιάμεση Εξέταση
8 Δεκεμβρίου 2012

1. Έστω (X,d) μετρικός χώρος. Αποδείξτε ότι:

(α) Για κάθε $x \in X$ και για κάθε $r > 0$ ισχύει $\mathrm{diam}(B(x,r)) \leq 2r$. Δώστε παράδειγμα που να δείχνει ότι δεν ισχύει πάντα ισότητα.

(β) Έστω μη κενό $A \subseteq X$ με $\mathrm{diam}(A) < r$. Άποδείξτε ότι υπάρχει $a \in A$ ώστε $A \subseteq B(a,r)$.

(2 μον.)

2. Έστω (X,d) μετρικός χώρος και (x_n) ακολουθία στον X. Εξετάστε αν ισχύει καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις (δώστε απόδειξη ή αντιπαράδειγμα):

(α) Αν η (x_n) είναι φραγμένη και έχει συγκλίνουσα υπακολουθία, τότε η (x_n) συγκλίνει.

(β) Αν η (x_n) είναι βασική και έχει συγκλίνουσα υπακολουθία, τότε η (x_n) συγκλίνει.

(2 μον.)

3. Θεωρούμε το $\mathbb{R}$ με την συνήθη μετρική. Εξετάστε αν υπάρχει $E \subseteq \mathbb{R}$, διαφορετικό από το $\emptyset$ και το $\mathbb{R}$, το οποίο να έχει την εξής ιδιότητα (για καθεμία ξεχωριστά δώστε παράδειγμα με αιτιολόγηση ή αποδείξτε ότι τέτοιο σύνολο δεν μπορεί να υπάρχει):

(α) Το E είναι άπειρο σύνολο αλλά δεν έχει σημεία συσσώρευσης.

(β) Το E έχει άπειρα σημεία συσσώρευσης αλλά δεν έχει κανένα εσωτερικό σημείο.

(γ) Το E είναι ανοικτό αλλά δεν έχει σημεία συσσώρευσης.

(δ) Το E είναι αριθμήσιμο και $E' = [0,1]$.

(2.5 μον.)

4. Έστω $f : (X,d) \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Δείξτε ότι το σύνολο

$$A = \big\{(x,y) \in X \times \mathbb{R} : y \leq f(x)\big\}$$

είναι κλειστό στον $X \times \mathbb{R}$ ως προς κάθε μετρική γινόμενο. **(1.5 μον.)**

5. Έστω $f : (X,d) \to (Y,\sigma)$. Αποδείξτε πλήρως ότι τα εξής είναι ισοδύναμα:

(α) Για κάθε $x \in X$ και για κάθε ακολουθία (x_n) στον X με $x_n \to x$ ισχύει $f(x_n) \to f(x)$.

(β) Για κάθε $F \subseteq Y$ κλειστό ισχύει ότι το $f^{-1}(F)$ είναι κλειστό υποσύνολο του X.

(2 μον.)

6. Έστω (X,d) μετρικός χώρος και έστω $D \subseteq X$. Δείξτε ότι τα εξής είναι ισοδύναμα:

(i) Το D είναι πυκνό στον X.

(ii) Για κάθε συνεχή συνάρτηση $f : X \to \mathbb{R}$ που ικανοποιεί την $f(x) = 0$ για κάθε $x \in D$, ισχύει $f \equiv 0$.

(2 μον.)

Καλή Επιτυχία!