Πραγματική Ανάλυση – Ενδιάμεση Εξέταση
15 Φεβρουαρίου 2014

1. Θεωρούμε το $\mathbb{R}$ με την συνήθη μετρική. Εξετάστε αν υπάρχει $E \subseteq \mathbb{R}$, διαφορετικό από το $\emptyset$ και το $\mathbb{R}$, το οποίο να έχει την εξής ιδιότητα (για καθεμία ξεχωριστά δώστε παράδειγμα με αιτιολόγηση ή αποδείξτε ότι τέτοιο σύνολο δεν μπορεί να υπάρχει):

(α) Το E είναι ανοικτό και πυκνό υποσύνολο του $\mathbb{R}$.

(β) Το E είναι άπειρο σύνολο αλλά δεν έχει σημεία συσσώρευσης.

(γ) Το E έχει άπειρα σημεία συσσώρευσης αλλά δεν έχει κανένα εσωτερικό σημείο.

(δ) Το E έχει εσωτερικά σημεία αλλά δεν έχει σημεία συσσώρευσης (δηλαδή, $E^\circ \neq \emptyset$ και $E' = \emptyset$).

(ε) Το E είναι φραγμένο και έχει άπειρα μεμονωμένα σημεία (δηλαδή, το $E \setminus E'$ είναι άπειρο σύνολο).

(3 μον.)

2. Έστω (X,d) μετρικός χώρος και έστω $A \subseteq X$. Δώστε τον ορισμό του σημείου επαφής, του σημείου συσσώρευσης και του συνοριακού σημείου του A. Δείξτε ότι:

(α) Τα σύνολα A και $\overline{A}$ έχουν ακριβώς τα ίδια σημεία συσσώρευσης: δηλαδή, $A' = (\overline{A})'$.

(β) Το σύνορο $\partial(A)$ γράφεται ως εξής: $\partial A = \overline{A} \cap \overline{X \setminus A} = \overline{A} \setminus A^\circ$.

(2 μον.)

3. Έστω (X,d) μετρικός χώρος και έστω A μη κενό, κλειστό υποσύνολο του X. Ορίζουμε $d_A : X \to \mathbb{R}$ με

$$d_A(x) = \inf\{d(x,a) : a \in A\}.$$

Δείξτε ότι:

(α) $d_A(x) = 0$ αν και μόνο αν $x \in A$.

(β) Για κάθε $x, y \in X$ ισχύει $|d_A(x) - d_A(y)| \leq d(x,y)$.

(γ) Για κάθε $t > 0$ το σύνολο $A_t = \{x \in X : d_A(x) < t\}$ είναι ανοικτό.

(δ) Το A είναι G_δ-σύνολο: υπάρχει ακολουθία $\{G_n\}_{n=1}^\infty$ ανοικτών υποσυνόλων του X ώστε $A = \bigcap_{n=1}^\infty G_n$.

(2.5 μον.)

4. Έστω $f : (X,d) \to (Y,\sigma)$. Αποδείξτε πλήρως ότι τα εξής είναι ισοδύναμα:

(α) Η f είναι συνεχής.

(β) Για κάθε $A \subseteq X$ ισχύει $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$.

(2 μον.)

5. (α) Έστω $f : (X,d) \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Δείξτε ότι το σύνολο

$$A = \big\{(x,y) \in X \times \mathbb{R} : y \leq f(x)\big\}$$

είναι κλειστό στον $X \times \mathbb{R}$ ως προς κάθε μετρική γινόμενο.
(β) Έστω $f : (X,d) \to (Y,\sigma)$ συνεχής και επί συνάρτηση.

(i) Αν ο X είναι διαχωρίσιμος, έπεται αναγκαστικά ότι και ο Y είναι διαχωρίσιμος;

(ii) Αν η f είναι $1-1$, έπεται αναγκαστικά ότι η f είναι ομοιομορφισμός;

(2.5 μον.)

Καλή Επιτυχία!