ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

8 Φεβρουαρίου 2014

1. Έστω (X, d) μετρικός χώρος και έστω A, B υποσύνολα του X. Δείξτε ότι

(α) $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$.

(β) $X \setminus A^\circ = \overline{(X \setminus A)}$.

(γ) Αν τα A και B είναι μη κενά και $A \subseteq C$ και $B \subseteq D$, ποιά η σχέση των $d(A, B)$ και $d(C, D)$; Δείξτε ότι $d(A, B) = d(\overline{A}, \overline{B})$
(όπου $d(A, B) = \mathrm{dist}\,(A, B) = \inf\{d(a, b) : a \in A, b \in B\}$).

2. Έστω $(X, d), (Y, \sigma)$ μετρικοί χώροι και $f : X \to Y$ συνεχής συνάρτηση. Αποδείξτε ότι:

(α1) Η συνάρτηση $g : X \times Y \to \mathbb{R}$ με $g(x, y) = \sigma(f(x), y)$ είναι συνεχής.

(α2) Το σύνολο $A = \{(x, y) \in X \times Y : f(x) \in B_\sigma(y, 1)\}$ είναι ανοικτό.

(β) Αν για κάθε δύο ακολουθίες (s_n) και (t_n) στον (X, d) με $d(s_n, t_n) \to 0$ ισχύει ότι $\sigma(f(s_n), f(t_n)) \to 0$, τότε η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.

3. **(α)** Έστω $f : (X, d) \to (Y, \sigma)$ συνεχής και επί συνάρτηση μεταξύ μετρικών χώρων. Δείξτε ότι αν $D \subseteq X$ είναι πυκνό, τότε το $f(D) \subseteq Y$ είναι πυκνό.

(β) Έστω d_1, d_2 ισοδύναμες μετρικές σ΄ ένα σύνολο X. Εξετάστε αν καθεμιά από τις επόμενες αληθεύει ή όχι (απόδειξη ή αντιπαράδειγμα)

(i) Αν το A είναι συμπαγές στον μ.χ. (X, d_1), είναι το A συμπαγές στον μ.χ. (X, d_2);
(ii) Αν το A είναι φραγμένο στον μ.χ. (X, d_1), είναι το A φραγμένο στον μ.χ. (X, d_2);

4. **(α1)** Έστω (X, d) μετρικός χώρος. Αν $K \subseteq X$ είναι συμπαγές, δείξτε ότι το K είναι φραγμένο.

(α2) Αν το $A \subseteq X$ είναι κλειστό και φραγμένο, είναι κατ΄ ανάγκη συμπαγές;

(β) Έστω (X, d) συμπαγής μετρικός χώρος, (Y, σ) μετρικός χώρος και $f : X \to Y$ συνεχής συνάρτηση. Αποδείξτε ότι: αν $K \subseteq Y$ είναι συμπαγές τότε το $f^{-1}(K) \subseteq X$ είναι συμπαγές.

5. **(α)** Έστω (X, d) μετρικός χώρος. Αν κάθε κλειστό σύνολο $F \subseteq X$ με $\mathrm{diam}\,(F) \leq 1$ είναι συμπαγές, δείξτε ότι ο (X, d) είναι πλήρης.
($\mathrm{diam}\,(F) = \delta(F) = \sup\{d(x, y) : x, y \in F\}$.)

(β) Αν $f_n, g_n : [0, 1] \to [0, 1]$ είναι συνεχείς συναρτήσεις και $f_n \to f$, $g_n \to g$ ομοιόμορφα στο $[0, 1]$, δείξτε ότι η ακολουθία (h_n) όπου $h_n = f_n \circ g_n$ (δηλ. $h_n(t) = f_n(g_n(t))$) συγκλίνει ομοιόμορφα στην $h = f \circ g$.

6. **(α)** Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση. Δείξτε ότι η ακολουθία συναρτήσεων

$$f_n(x) = f\left(x + \frac{1}{n}\right), \quad n \in \mathbb{N}$$

συγκλίνει ομοιόμορφα στην f.

(β) Εξετάστε ως προς την κατά σημείο και την ομοιόμορφη σύγκλιση τις ακολουθίες συναρτήσεων

$$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ με } f_n(x) = \frac{x}{1 + nx^2} \quad \text{και} \quad g_n : [0, 1] \to \mathbb{R} \text{ με } g_n(t) = nt(1 - t^2)^n.$$

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 2 μονάδες

Καλή Επιτυχία!