ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

3 Οκτωβρίου 2014

1. (α) Έστω (X,d) μετρικός χώρος. Με βάση τον ορισμό του ανοικτού συνόλου, δείξτε ότι: για κάθε $x \in X$ και για κάθε $r > 0$, το σύνολο $B(x,r) = \{y \in X : d(y,x) < r\}$ είναι ανοικτό.

(β) Εξετάστε αν καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθής ή ψευδής (αιτιολογήστε πλήρως την απάντησή σας).

(i) Αν το A είναι πυκνό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ και το F είναι πεπερασμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$, τότε το $A \setminus F$ είναι πυκνό υποσύνολο του $\mathbb{R}$.

(ii) Αν τα D_1, D_2 είναι πυκνά υποσύνολα του $\mathbb{R}$, τότε το $D_1 \cap D_2$ είναι πυκνό υποσύνολο του $\mathbb{R}$.

(iii) Αν τα C_1, C_2 είναι πυκνά και G_δ υποσύνολα του $\mathbb{R}$, τότε το $C_1 \cap C_2$ είναι πυκνό υποσύνολο του $\mathbb{R}$.

2. Έστω (X,d) μετρικός χώρος, (x_n) ακολουθία στον X και $x \in X$. Θέτουμε $A = \{x_n : n = 1,2,\ldots\}$. Αποδείξτε ότι:

(i) Αν $x \in A'$, τότε υπάρχει υπακολουθία (x_{k_n}) της (x_n) ώστε $x_{k_n} \to x$.

(ii) Αν η (x_n) είναι βασική, τότε το A' περιέχει το πολύ ένα σημείο.

(iii) Αν η (x_n) είναι βασική και $A' \neq \emptyset$, τότε η (x_n) είναι συγκλίνουσα.

3. Έστω (X,d) μετρικός χώρος, $f : (X,d) \to \mathbb{R}$ και A υποσύνολο του X. Εξετάστε αν καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθής ή ψευδής (αιτιολογήστε πλήρως την απάντησή σας).

(i) Αν η f είναι ομοιόμορφα συνεχής και το A είναι φραγμένο, τότε το $f(A) = \{f(a) : a \in A\}$ είναι φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$.

(ii) Αν η f είναι συνάρτηση Lipschitz και το A είναι φραγμένο, τότε το $f(A)$ είναι φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$.

(iii) Αν η f είναι ομοιόμορφα συνεχής και το A είναι ολικά φραγμένο, τότε το $f(A)$ είναι ολικά φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$.

4. (α) Έστω δ η διακριτή μετρική σε ένα μη κενό σύνολο X. Δείξτε ότι ο μετρικός χώρος (X,δ) είναι πλήρης. Αν ρ είναι μια άλλη μετρική στο X, η οποία είναι ισοδύναμη με την δ, είναι τότε και ο (X,ρ) αναγκαστικά πλήρης;

(β) Έστω (X,d) συμπαγής μετρικός χώρος και έστω $f : (X,d) \to (Y,\sigma)$ συνεχής συνάρτηση. Δείξτε ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.

5. Έστω $f : (X,d) \to (Y,\sigma)$. Το γράφημα της f είναι το σύνολο $\Gamma(f) = \big\{(x, f(x)) : x \in X\big\} \subseteq X \times Y$. Θεωρούμε μια μετρική γινόμενο στο $X \times Y$. Δείξτε ότι:

(i) Αν η f είναι συνεχής, τότε το $\Gamma(f)$ είναι κλειστό.

(ii) Αν ο Y είναι συμπαγής και το $\Gamma(f)$ είναι κλειστό, τότε η f είναι συνεχής.

6. (α) Έστω (f_n) ακολουθία συνεχών συναρτήσεων $f_n : [0,1) \to \mathbb{R}$ με $f_n \geq f_{n+1} \geq \cdots \geq 0$ και $f_n \to 0$ κατά σημείο. Εξετάστε αν καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθής ή ψευδής (αιτιολογήστε πλήρως την απάντησή σας).

(i) Για κάθε $t \in [0,1)$ η ακολουθία (f_n) συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[0,t]$.

(ii) Η ακολουθία (f_n) συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[0,1)$.

(β) Εξετάστε ως προς την κατά σημείο και την ομοιόμορφη σύγκλιση την ακολουθία συναρτήσεων

$$f_n : [0,1] \to \mathbb{R} \text{ με } f_n(x) = \frac{1}{1+nx}$$

στο $[0,1]$ και στο $[\delta,1]$, όπου $0 < \delta < 1$.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 2 μονάδες

Καλή Επιτυχία!