Πραγματική Ανάλυση – Ενδιάμεση Εξέταση
6 Δεκεμβρίου 2014

1. Εξετάστε αν καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθής ή ψευδής (αιτιολογήστε πλήρως την απάντησή σας).

(α) Κάθε πυκνό υποσύνολο A του $\mathbb{R}$ είναι άπειρο σύνολο.

(β) Αν D_1, D_2 είναι πυκνά υποσύνολα του $\mathbb{R}$, τότε το $D_1 \cap D_2$ είναι πυκνό υποσύνολο του $\mathbb{R}$.

(γ) Αν το G είναι μη κενό ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ με την ιδιότητα «για κάθε $x, y \in G$ ισχύει $x + y \in G$ και $x - y \in G$» τότε $G = \mathbb{R}$.

(3 μον.)

2. (α) Έστω (X, d) μετρικός χώρος, $x \in X$ και (x_n) ακολουθία στο X με $x_n \to x$. Άποδείξτε ότι το $K = \{x\} \cup \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι κλειστό σύνολο.

(β) Έστω (X, d) μετρικός χώρος και έστω A, B μη κενά υποσύνολα του X. Αποδείξτε ότι:

(i) Αν $A \cap B \neq \emptyset$ τότε $\mathrm{diam}(A \cup B) \leq \mathrm{diam}(A) + \mathrm{diam}(B)$.

(ii) Τα σύνολα A και $\overline{A}$ έχουν ακριβώς τα ίδια σημεία συσσώρευσης: $A' = (\overline{A})'$.

(3 μον.)

3. Έστω (X, d) μετρικός χώρος και έστω A, B μη κενά υποσύνολα του X. Ορίζουμε $d_A : X \to \mathbb{R}$ με $d_A(x) = \inf\{d(x, a) : a \in A\}$. Αποδείξτε ότι:

(α) Για κάθε $x, y \in X$ ισχύει $d_A(x) \leq d_A(y) + d(x, y)$, και συμπεράνατε ότι η d_A είναι ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση.

(β) Αν τα A, B είναι κλειστά σύνολα και $A \cap B = \emptyset$, τότε τα σύνολα

$$U = \{x \in X : d_A(x) < d_B(x)\} \quad \text{και} \quad V = \{x \in X : d_B(x) < d_A(x)\}$$

είναι ανοικτά και ικανοποιούν τις: $A \subseteq U$, $B \subseteq V$ και $U \cap V = \emptyset$.

(γ) Αν τα A, B είναι φραγμένα σύνολα και αν ορίσουμε $t_{A,B} = \sup\{d_A(b) : b \in B\}$, τότε $t_{A,B} < +\infty$ και $d_A(x) \leq t_{A,B} + d_B(x)$ για κάθε $x \in X$.

(3 μον.)

4. (α) Έστω $f : (X, d) \to \mathbb{R}$. Αποδείξτε πλήρως ότι: η f είναι συνεχής αν και μόνο αν για κάθε $a < b$ στο $\mathbb{R}$ το σύνολο $f^{-1}((a, b))$ είναι ανοικτό υποσύνολο του (X, d).

(β) Θεωρούμε το $\mathbb{N}$ και το $\mathbb{Q}$ με τη συνήθη μετρική. Αποδείξτε ότι κάθε $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής.

Υπάρχει $g : \mathbb{Q} \to \mathbb{N}$ συνεχής και 1-1;

(3 μον.)

Καλή Επιτυχία!