ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

25 Σεπτεμβρίου 2015

1. (2 μον.) Έστω (X,d) μετρικός χώρος και έστω A, B μη κενά υποσύνολα του X. Αποδείξτε ότι:

(α) $d(A,B) = d(\overline{A}, \overline{B})$ (όπου $d(A,B) = \inf\{d(a,b) : a \in A, b \in B\}$).

(β) Αν το A είναι κλειστό, το B συμπαγές και $A \cap B = \emptyset$, τότε $d(A,B) > 0$.

2. (2 μον.) Έστω (X,d) μετρικός χώρος και έστω $f : X \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Αποδείξτε ότι:

(α) Το σύνολο $\{(x,y) \in X \times \mathbb{R} : f(x) \leq y\}$ είναι κλειστό στο $X \times \mathbb{R}$.

(β) Αν ο (X,d) είναι συμπαγής, τότε η f παίρνει μέγιστη τιμή.

3. (2 μον.) (α) Αποδείξτε πλήρως ότι κάθε συμπαγής μετρικός χώρος (X,d) είναι ολικά φραγμένος.

(β) Έστω (X,d) μετρικός χώρος, $f : X \to \mathbb{R}$ και $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι:

(i) Αν οι f και g είναι ομοιόμορφα συνεχείς, τότε η $g \circ f$ είναι ομοιόμορφα συνεχής.

(ii) Αν η f είναι ομοιόμορφα συνεχής και φραγμένη και η g είναι συνεχής, τότε η $g \circ f$ είναι ομοιόμορφα συνεχής.

4. (2 μον.) Έστω $f : (X,d) \to (Y,\sigma)$ ομοιομορφισμός. Δώστε απόδειξη ή αντιπαράδειγμα για τις ακόλουθες προτάσεις:

(α) Αν ο (X,d) είναι ολικά φραγμένος, τότε ο (Y,σ) είναι ολικά φραγμένος.

(β) Αν ο (X,d) είναι πλήρης, τότε ο (Y,σ) είναι πλήρης.

(γ) Αν ο (X,d) είναι διαχωρίσιμος, τότε ο (Y,σ) είναι διαχωρίσιμος.

5. (2 μον.) (α) Αποδείξτε ότι δεν υπάρχει υποσύνολο του $\mathbb{R}$ το οποίο να είναι αριθμήσιμο, πυκνό και G_δ στο $\mathbb{R}$.

(β) Έστω (X,d) μετρικός χώρος και έστω D πυκνό υποσύνολο του X. Αν κάθε ακολουθία στοιχείων του D έχει υπακολουθία που συγκλίνει (στον X) αποδείξτε ότι ο (X,d) είναι συμπαγής.

6. (2 μον.) (α) Έστω (α_n) ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών και $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ με

$$f_n(x) = \begin{cases} \alpha_n, & \text{αν } \frac{1}{n+1} \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}.$$

Αποδείξτε ότι η ακολουθία συναρτήσεων (f_n) συγκλίνει κατά σημείο. Εξετάστε αν οι παρακάτω δύο ισχυρισμοί είναι ισοδύναμοι: (i) $\alpha_n \to 0$ και (ii) η ακολουθία (f_n) συγκλίνει ομοιόμορφα.

(β) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση. Αποδείξτε ότι η ακολουθία συναρτήσεων $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \ldots$ με $f_n(x) = f\left(x + \frac{1}{n}\right)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, συγκλίνει ομοιόμορφα στην f.

Καλή Επιτυχία!