ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

10 Φεβρουαρίου 2015

1. (2 μονάδες) (α) Έστω (X,d) μετρικός χώρος και έστω G_n, $n \in \mathbb{N}$ ανοικτά και πυκνά σύνολα. Δείξτε ότι το σύνολο $G_1 \cap G_2$ είναι ανοικτό και πυκνό. Είναι πάντα το σύνολο $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ πυκνό;

(β) Αν G ανοικτό και $A \subseteq X$, δείξτε ότι $A \cap G \neq \emptyset$ αν και μονον αν $\overline{A} \cap G \neq \emptyset$.

2. (2 μον.) (α) Έστω (x_n) βασική ακολουθία στον (X,d). Ορίζουμε $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Αποδείξτε ότι:

(i) Το A είναι ολικά φραγμένο σύνολο.

(ii) Αν $A' \neq \emptyset$ τότε η (x_n) συγκλίνει.

(β) Έστω (X,d) μετρικός χώρος και έστω V ανοικτό υποσύνολο του X. Αν $y \in V$ και (y_n) είναι ακολουθία στον X ώστε $y_n \to y$, αποδείξτε ότι υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε: για κάθε $n \geq n_0$,

$$B\Big(y_n, \frac{1}{n}\Big) \subseteq V.$$

3. (2 μον.) (α) Δείξτε ότι μια συνάρτηση $f : (X,d) \to (Y,\sigma)$ είναι ομοιόμορφα συνεχής αν και μόνον αν για κάθε ζεύγος ακολουθιών $(x_n), (y_n)$ του X με $d(x_n, y_n) \to 0$ ισχύει $\sigma(f(x_n), f(y_n)) \to 0$.

(β) Θεωρούμε τα σύνολα $\mathbb{N}$ και $\mathbb{Q}$ με την συνήθη μετρική. Αποδείξτε ότι κάθε συνάρτηση $f : (\mathbb{N}, |\cdot|) \to (\mathbb{Q}, |\cdot|)$ είναι ομοιόμορφα συνεχής. Εξετάστε αν οι $(\mathbb{N}, |\cdot|)$ και $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$ είναι ομοιομορφικοί.

4. (2 μον.) (α) Έστω (X,d) μετρικός χώρος με την εξής ιδιότητα: κάθε φραγμένο κλειστό υποσύνολο του X είναι συμπαγές. Αποδείξτε ότι ο (X,d) είναι πλήρης.

(β) Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς (αιτιολογήστε την απάντησή σας).

(i) Κάθε συμπαγής μετρικός χώρος είναι ολικά φραγμένος.

(ii) Κάθε διαχωρίσιμος μετρικός χώρος είναι πλήρης.

(iii) Κάθε πλήρης και διαχωρίσιμος μετρικός χώρος είναι συμπαγής.

5. (1,5 μον.) (α) Έστω (X,d) μετρικός χώρος και έστω A, B μη κενά, ξένα κλειστά υποσύνολα του (X,d) με το A συμπαγές. Αποδείξτε ότι $\mathrm{dist}(A,B) > 0$.

(β) Έστω (X,d) συμπαγής μετρικός χώρος και έστω $f : X \to X$ συνεχής. Υποθέτουμε ότι υπάρχει ακολουθία (x_n) στον X ώστε $d(x_n, f(x_n)) \to 0$. Δείξτε ότι η f έχει σταθερό σημείο.

6. (2,5 μον.) (α) Για κάθε $n \geq 1$ ορίζουμε $f_n : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ με $f_n(x) = x^n e^{-nx}$. Εξετάστε την (f_n) ως προς την κατά σημείο και την ομοιόμορφη σύγκλιση.

(β) Δείξτε ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \frac{x^{2k}}{1+x^{2k}}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$.

(γ) Έστω $f, f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$. Υποθέτουμε ότι $f_n \to f$ κατά σημείο στο $[a,b]$ και ότι για κάθε $x \in [a,b]$ υπάρχει ανοικτό διάστημα I_x με $x \in I_x$ ώστε $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο $I_x \cap [a,b]$. Αποδείξτε ότι $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο $[a,b]$.

Καλή Επιτυχία!