Πραγματική Ανάλυση – Ενδιάμεση Εξέταση

5 Δεκεμβρίου 2015

1. Έστω (X,d) μετρικός χώρος. Αποδείξτε ότι:

(α) Αν G είναι μη κενό ανοικτό υποσύνολο του (X,d), $x_0 \in G$ και (x_n) είναι μια ακολουθία στον (X,d) με $x_n \to x_0$, τότε υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε: για κάθε $n \geqslant n_0$ ισχύει $x_n \in G$.

(β) Αν G_1, G_2 είναι ανοικτά και πυκνά υποσύνολα του (X,d) τότε το $G_1 \cap G_2$ είναι ανοικτό και πυκνό υποσύνολο του (X,d).

(γ) Αν A, B είναι μη κενά υποσύνολα του X και οι A και B είναι πλήρεις ως μετρικοί υπόχωροι του (X,d) τότε το $A \cup B$ είναι πλήρης μετρικός υπόχωρος του (X,d).

(3 μον.)

2. Θεωρούμε το $\mathbb{R}$ με την συνήθη μετρική. Για κάθε $C \subseteq \mathbb{R}$ συμβολίζουμε με C' το σύνολο των σημείων συσσσώρευσης του C και με $\partial(C)$ το σύνορο του C. Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς (αιτιολογήστε την απάντησή σας):

(α) Αν $A \subseteq [0,1]$ και $A' = [0,1]$, τότε το A είναι υπεραριθμήσιμο.

(β) Αν το A είναι άπειρο φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ τότε το A έχει τουλάχιστον ένα σημείο συσσώρευσης.

(γ) Αν $A \subseteq B \subseteq \mathbb{R}$ τότε $\partial(A) \subseteq \partial(B)$.

(2 μον.)

3. Έστω (X,d) μετρικός χώρος και (x_n), (y_n) ακολουθίες στον X. Εξετάστε αν ισχύει καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις (δώστε απόδειξη ή αντιπαράδειγμα):

(α) Αν η (x_n) συγκλίνει σε κάποιο $x_0 \in X$ και $d(x_n, y_n) \to 0$ τότε η (y_n) συγκλίνει στο x_0.

(β) Το σύνολο $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι κλειστό υποσύνολο του (X,d).

(γ) Αν η (x_n) είναι βασική και το σύνολο $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ έχει τουλάχιστον ένα σημείο συσσώρευσης, τότε η (x_n) συγκλίνει.

(2 μον.)

4. (α) Έστω $f, g : (X,d) \to \mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις. Αποδείξτε ότι η $\varphi : (X,d) \to \mathbb{R}^2$ με $\varphi(x) = (f(x), g(x))$ είναι συνεχής συνάρτηση.

(β) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση. Δείξτε ότι: αν το γράφημα

$$\Gamma(f) = \big\{(x, f(x)) : x \in \mathbb{R}\big\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

της f είναι κλειστό, τότε η f είναι συνεχής.

(2.5 μον.)

5. Έστω d και σ ισοδύναμες μετρικές στο σύνολο X. Εξετάστε αν ισχύει καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις (δώστε απόδειξη ή αντιπαράδειγμα):

(α) Ο (X,d) είναι πλήρης αν και μόνο αν ο (X,σ) είναι πλήρης.

(β) Το $x_0 \in X$ είναι σημείο συσσώρευσης του (X,d) αν και μόνο αν είναι σημείο συσσώρευσης του (X,σ).

(2.5 μον.)

Καλή Επιτυχία!