ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

28 Ιανουαρίου 2016

1. Έστω (X, d) μετρικός χώρος και A, B μη κενά υποσύνολα του X. Αποδείξτε ότι:

(α) Αν $A \subseteq B$ τότε $\overline{A} \subseteq \overline{B}$.

(β) Αν τα A και B είναι συμπαγή και $\mathrm{dist}(A, B) = 0$ τότε $A \cap B \neq \emptyset$. [*Υπενθύμιση:* Η απόσταση των A και B ορίζεται ως εξής: $\mathrm{dist}(A, B) = \inf\{d(a, b) : a \in A, b \in B\}$.]

(γ) Αν για κάθε $x, y \in A$ με $x \neq y$ ισχύει $d(x, y) \geq 1$ τότε το A είναι κλειστό σύνολο.

(2 μον.)

2. (α) Έστω $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με $g(x, y) = f(x + y, x - y)$ είναι συνεχής.

(β) Έστω $f, g : (X, d) \to (Y, \sigma)$ συνεχείς συναρτήσεις και έστω $x \in X$ ώστε $f(x) \neq g(x)$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $r > 0$ ώστε: για κάθε $y, z \in B(x, r)$ ισχύει $f(y) \neq g(z)$.

(γ) Έστω $f : \mathbb{R} \to (Y, \delta)$ συνεχής συνάρτηση, όπου δ η διακριτή μετρική στον Y. Αποδείξτε ότι η f είναι σταθερή συνάρτηση.

(2.5 μον.)

3. (α) Έστω (X, d) συμπαγής μετρικός χώρος και έστω $f : X \to X$ συνεχής. Υποθέτουμε ότι υπάρχει ακολουθία (x_n) στον X ώστε $d(x_n, f(x_n)) \to 0$. Δείξτε ότι η f έχει σταθερό σημείο.

(β) Έστω (X, d) πλήρης μετρικός χώρος και έστω $f : (X, d) \to (Y, \sigma)$ συνεχής και επί συνάρτηση, τέτοια ώστε $d(x_1, x_2) \leq \sigma(f(x_1), f(x_2))$ για κάθε $x_1, x_2 \in X$. Αποδείξτε ότι ο (Y, σ) είναι πλήρης.

(2 μον.)

4. (α) Θεωρούμε το $\mathbb{R}$ με μετρική την $\sigma(x, y) = |\arctan x - \arctan y|$. Δείξτε ότι η σ είναι ισοδύναμη με τη συνήθη μετρική του $\mathbb{R}$ αλλά ο $(\mathbb{R}, \sigma)$ δεν είναι πλήρης.

(β) Έστω d μετρική στο $\mathbb{Q}$ η οποία είναι ισοδύναμη με την συνήθη μετρική. Αποδείξτε ότι ο $(\mathbb{Q}, d)$ δεν είναι πλήρης.

(2 μον.)

5. (α) Έστω (X, d) μετρικός χώρος και έστω A μη κενό, συμπαγές υποσύνολο του X. Αποδείξτε ότι το A είναι φραγμένο υποσύνολο του X.

(β) Έστω (X, d) μετρικός χώρος, $x \in X$ και (x_n) στον X ώστε $x_n \to x$. Αποδείξτε ότι το σύνολο $B = \{x_n : n = 1, 2, \ldots\} \cup \{x\}$ είναι συμπαγές.

(γ) Έστω (X, d) μετρικός χώρος και $F \subseteq X$. Αποδείξτε ότι το F είναι κλειστό αν και μόνον αν για κάθε συμπαγές υποσύνολο C του X το $F \cap C$ είναι κλειστό σύνολο.

(2.5 μον.)

6. (α) Έστω $(X, d), (Y, \sigma)$ μετρικοί χώροι και $f_n, f : X \to Y$ ώστε $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο X. Αν κάθε f_n είναι ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση, αποδείξτε ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.

(β) Αποδείξτε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-nx}$ συγκλίνει αν και μόνο αν $x > 0$. Αποδείξτε ότι: για κάθε $\alpha > 0$ η σειρά συναρτήσεων

$$\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-nx}$$

συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[\alpha, \infty)$. Είναι η σύγκλιση ομοιόμορφη στο $(0, \infty)$;

(2 μον.)

Καλή Επιτυχία!