Πραγματική Ανάλυση – 13 Σεπτεμβρίου 2018

1. (0.6+0.6+0.8 μον.) Έστω (X, d) μετρικός χώρος, $x \in X$ και $A, B, D \subseteq X$.

(α) Αποδείξτε ότι $x \in \overline{A}$ αν και μόνο αν υπάρχει ακολουθία (x_n) στο X με $x_n \in A$ για κάθε n και $x_n \longrightarrow x$.

(β) Αν το D είναι πυκνό υποσύνολο του X αποδείξτε ότι $\overline{D \cap G} = \overline{G}$ για κάθε ανοικτό $G \subseteq X$.

(γ) Αν το A είναι κλειστό και $A^\circ = B^\circ = \emptyset$ τότε $(A \cup B)^\circ = \emptyset$.

2. (1.2+0.8 μον.) (α) Έστω (X, d) μετρικός χώρος. Εξετάστε αν καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθής ή ψευδής (δώστε απόδειξη ή αντιπαράδειγμα):

(i) Αν το x_0 είναι μεμονωμένο σημείο του X τότε για κάθε πυκνό υποσύνολο D του X ισχύει $x_0 \in D$.

(ii) Αν (x_n) είναι ακολουθία στον X με $d(x_n, x_m) \geq 1$ για κάθε $n \neq m$ στο $\mathbb{N}$, τότε το σύνολο $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι κλειστό υποσύνολο του X.

(β) Έστω (X, d) μετρικός χώρος και A ανοικτό υποσύνολο του X. Αν $x \in A$ και (x_n) είναι ακολουθία στον X ώστε $x_n \to x$, αποδείξτε ότι υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε: για κάθε $n \geq n_0$,

$$B\Big(x_n, \frac{1}{n}\Big) \subseteq A.$$

3. (1+1 μον.) (α) Έστω $f : (X, d) \to (Y, \sigma)$ συνεχής συνάρτηση. Αποδείξτε πλήρως ότι αν ο X είναι συμπαγής τότε για κάθε $A \subseteq X$ ισχύει ότι $f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$.

(β) Έστω (X, d) μετρικός χώρος και έστω $f : X \to \mathbb{R}$ και $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Για καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις δώστε απόδειξη ή αντιπαράδειγμα:

(i) Αν οι f και g είναι ομοιόμορφα συνεχείς, τότε η $g \circ f$ είναι ομοιόμορφα συνεχής.

(ii) Αν η f είναι ομοιόμορφα συνεχής και φραγμένη και η g είναι συνεχής, τότε η $g \circ f$ είναι ομοιόμορφα συνεχής.

4. (1+1 μον.) (α) Στο $X = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ θεωρούμε τη μετρική $d(x, y) = |x - y| + \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right|$. Αποδείξτε ότι η d είναι ισοδύναμη με τη συνήθη μετρική και ότι ο (X, d) είναι πλήρης.

(β) Έστω $f : (X, d) \to (Y, \sigma)$. Υποθέτουμε ότι η f είναι συνεχής, επί και $d(x, y) \leq \sigma(f(x), f(y))$ για κάθε $x, y \in X$. Δώστε απόδειξη ή αντιπαράδειγμα για τις ακόλουθες προτάσεις:

(i) Αν ο (X, d) είναι πλήρης τότε ο (Y, σ) είναι πλήρης.

(ii) Αν ο (Y, σ) είναι πλήρης τότε ο (X, d) είναι πλήρης.

5. (1.2+0.8 μον.) (α) Αποδείξτε ότι κάθε μη κενό συμπαγές υποσύνολο K ενός μετρικού χώρου (X, d) είναι φραγμένο. Αποδείξτε επίσης ότι υπάρχουν $x, y \in K$ ώστε $d(x, y) = \operatorname{diam}(K)$.

(β) Έστω (X, d) μετρικός χώρος και έστω $x_0 \in X$. Αν για κάθε $\varepsilon > 0$ το σύνολο $X \setminus B(x_0, \varepsilon)$ είναι συμπαγές, αποδείξτε ότι ο (X, d) είναι συμπαγής.

6. (1+1 μον.) (α) Θεωρούμε την ακολουθία συναρτήσεων $f_n : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ με $f_n(x) = nxe^{-\sqrt{n}x}$. Αποδείξτε ότι $f_n \to f \equiv 0$ κατά σημείο αλλά όχι ομοιόμορφα στο $[0, \infty)$. Εξετάστε αν $f_n \to 0$ ομοιόμορφα σε κάθε διάστημα $[a, \infty)$, $a > 0$.

(β) Εξετάστε αν η σειρά συναρτήσεων $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2x}{1+n^3x^2}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[0, \infty)$.

Καλή Επιτυχία!