ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ
07/06/2018

Θ1. (α) Να δείξετε ότι η απεικόνιση $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $d(x, y) = |e^x - e^y|$ είναι μετρική στο $\mathbb{R}$ και να εξετάσετε ποιά από τα σύνολα $A = (-\infty, 0)$, $B = (-1, 1)$, $C = (0, +\infty)$ είναι d-φραγμένα. Για τα φραγμένα να υπολογιστεί η διάμετρος.

(β) Έστω (x_n), (y_n) βασικές ακολουθίες ενός μετρικού χώρου (X, ρ). Να δείξετε ότι η ακολουθία (a_n), με $a_n = \rho(x_n, y_n)$, είναι συγκλίνουσα.

Θ2. Έστω (X, ρ) ένας μετρικός χώρος και $A \subseteq X$.

(α) Να δείξετε ότι ένα $G \subseteq A$ είναι ανοιχτό στον μετρικό υπόχωρο (A, ρ_A), αν και μόνον αν υπάρχει $H \subseteq X$ ανοιχτό στον μετρικό χώρο (X, ρ), με $G = A \cap H$.

(β) Να δείξετε πλήρως (:χρησιμοποιώντας μόνον τους ορισμούς) ότι

$$X = A^o \cup \partial A \cup (X \setminus A)^o$$

και ότι τα σύνολα A^o, ∂A και $(X \setminus A)^o$ είναι ανά δύο ξένα.

Θ3. (α) Έστω (X, ρ) ένας μετρικός χώρος και $A \subseteq X$. Να δείξετε ότι για το παράγωγο σύνολο A' ισχύουν A' κλειστό και $A' = (\overline{A})'$.

(β) Να δείξετε ότι σε ένα διαχωρίσιμο μετρικό χώρο (X, ρ), κάθε οικογένεια από ανοιχτά και ξένα ανά δύο σύνολα είναι αριθμήσιμη.

Θ4. (α) Έστω (X, ρ), (Y, σ) μετρικοί χώροι και $f : X \to Y$ ομοιόμορφα συνεχής. Να δείξετε ότι για κάθε $y_1, y_2 \in f(X)$ με $y_1 \neq y_2$, ισχύει

$$dist(f^{-1}(\{y_1\}), f^{-1}(\{y_2\})) > 0.$$

(β) Έστω (X, ρ) συμπαγής μετρικός χώρος και $f : X \to X$ συνεχής. Αν υπάρχει ακολουθία (x_n) στον X με $\rho(x_n, f(x_n)) \to 0$, να δείξετε ότι η f έχει σταθερό σημείο.

Θ5. Έστω (X, ρ), (Y, σ) μετρικοί χώροι.

(α) Αν $f : X \to Y$ συνεχής και $K \subseteq X$ συμπαγές, να δείξετε ότι $f(K)$ συμπαγές.

(β) Έστω d μετρική-γινόμενο στον $X \times Y$ και $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$. Δώστε απόδειξη ή αντιπαράδειγμα για τις επόμενες προτάσεις:

(β1) $A \times B$ συμπαγές, αν και μόνον αν A και B συμπαγή.

(β2) $A \times B$ φραγμένο, αν και μόνον αν A και B φραγμένα.

Θ6. (α) Εξετάστε ως προς την κατά σημείο και την ομοιόμορφη σύγκλιση τις ακολουθίες συναρτήσεων $f_n, g_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ με

$$f_n(x) = x^n \qquad \text{και} \qquad g_n(x) = x^n(1 - x).$$

(β) Εξετάστε για ποιά $x \geq 0$ συγκλίνουν οι σειρές

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \qquad \text{και} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}.$$

Για ποιές τιμές του a είναι η σύγκλιση ομοιόμορφη στο $[0, a]$;

Καλή Επιτυχία!