ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

Ενδιάμεση εξέταση 28/04/2018

Έστω (X,ρ) ένας μετρικός χώρος.

(1) Να δείξετε ότι η απεικόνιση $d=\frac{\rho}{1+\rho}$ είναι μετρική στο X, ισοδύναμη με την ρ.

(2) Έστω $A\subseteq X$. Να ελέγξετε την αλήθεια των ισοτήτων:
dist(x,A) = dist$(x,\bar{A})$, dist(x,A) = dist(x,A^o), dist(x,A) = dist$(x,\partial A)$.

(3) Να υπολογιστούν το εσωτερικό, η κλειστή θήκη, το παράγωγο σύνολο και το σύνορο των παρακάτω υποσυνόλων του $\mathbb{R}$ (πλήρεις εξηγήσεις!):
$A=(0,1)$, $B=[0,1)\cup\{2\}$, $C=[0,1]\cap\mathbb{Q}$, $D=\{1/n:n\in\mathbb{N}\}$.

(4) Έστω $(E,\|\ \|)$ διανυσματικός χώρος με νόρμα και d η επαγόμενη μετρική. Νδο για κάθε $x\in E$ και κάθε $\varepsilon>0$, είναι $\mathrm{diamB(x,\varepsilon)}=2\varepsilon$. Ισχύει η ισότητα σε τυχαίο μετρικό χώρο;

(5) Νδο στον (X,ρ) κάθε βασική ακολουθία, που έχει συγκλίνουσα υπακολουθία, συγκλίνει.

(6) Έστω $A,B\subseteq X$. Να ελέγξετε ποιές ισότητες είναι αληθείς:
$(A\cup B)^o=A^o\cup B^o$, $(A\cap B)^o=A^o\cap B^o$, $\overline{A\cup B}=\bar{A}\cup\bar{B}$, $\overline{A\cap B}=\bar{A}\cap\bar{B}$.

(7) Έστω d μετρική-γινόμενο στο $X\times X$. Νδο το σύνολο $\Delta_X=\{(x,x):x\in X\}$ είναι κλειστό στον $(X\times X,d)$.

(8) Αν $D\subseteq X$ πυκνό και $G\subseteq X$ πυκνό και ανοιχτό, νδο $D\cap G$ είναι πυκνό υποσύνολο του X.

(9) Αν $A\subseteq X$, νδο η απεικόνιση $d_A:X\to\mathbb{R}$ με $d_A(x)=\mathrm{dist(x,A)}$, για κάθε $x\in X$, είναι ομοιόμορφα συνεχής.

(10) Εξετάστε αν ισχύει η ισοδυναμία: Η απεικόνιση $f:(X,\rho)\to(Y,\sigma)$ είναι ομοιόμορφα συνεχής αν και μόνον αν απεικονίζει βασικές ακολουθίες του X σε βασικές του Y.

(11) Έστω $f:(X,\rho)\to(Y,\sigma)$ συνεχής. Αν $A\subseteq X$ και $(A,\rho|_A)$ διαχωρίσιμος, νδο $(f(A),\sigma|_{f(A)})$ διαχωρίσιμος.

(12) Θεωρούμε τα σύνολα $\mathbb{N}$ και $\mathbb{Q}$ με την συνήθη μετρική. Νδο κάθε $f:\mathbb{N}\to\mathbb{Q}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής. Υπάρχει $g:\mathbb{Q}\to\mathbb{N}$ συνεχής και 1-1;

Καλή Επιτυχία!