

Πραγματική Ανάλυση – Ενδιάμεση Εξέταση

11 Μαΐου 2019

1. Έστω  $(X, d)$  μετρικός χώρος. Αποδείξτε τα ακόλουθα:

(α) Αν  $G_1, G_2, \dots, G_n$  είναι ανοικτά υποσύνολα του  $X$  τότε το  $G_1 \cap G_2 \cap \dots \cap G_n$  είναι ανοικτό υποσύνολο του  $X$ .

(β) Αν  $A, B$  είναι υποσύνολα του  $X$  και  $A \cup B = X$  τότε  $\overline{A} \cup B^\circ = X$ .

(γ) Αν  $A, B$  είναι υποσύνολα του  $X$ , το  $A$  είναι κλειστό και  $A^\circ = B^\circ = \emptyset$ , τότε  $(A \cup B)^\circ = \emptyset$ .

(3 μον.)

2. (α) Έστω  $(X, d)$  μετρικός χώρος και  $A \subseteq X$ . Αποδείξτε ότι το σύνολο  $A'$  των σημείων συσσώρευσης του  $A$  είναι κλειστό σύνολο.

(β) Έστω  $(X, d)$  μετρικός χώρος και  $(x_n)$  ακολουθία στον  $X$  ώστε το σύνολο  $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$  να έχει ακριβώς ένα σημείο συσσώρευσης  $x$ . Για καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις δώστε απόδειξη ή αντιπαράδειγμα.

(i) Αν η  $(x_n)$  είναι βασική τότε  $x_n \rightarrow x$ .

(ii) Αν η  $(x_n)$  είναι φραγμένη τότε  $x_n \rightarrow x$ .

(3 μον.)

3. (α) Έστω  $(X, d)$  μετρικός χώρος και  $f : (X, d) \rightarrow \mathbb{R}$  συνεχής συνάρτηση. Αποδείξτε ότι το σύνολο  $\{(x, y) : f(x) \geq y\}$  είναι κλειστό στον  $X \times \mathbb{R}$ .

(β) Έστω  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Το γράφημα της  $f$  είναι το σύνολο

$$\Gamma(f) = \{(x, f(x)) : x \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^2.$$

Αποδείξτε ότι αν η  $f$  είναι φραγμένη και το  $\Gamma(f)$  είναι κλειστό υποσύνολο του  $\mathbb{R}^2$  τότε η  $f$  είναι συνεχής.

(3 μον.)

4. (α) Θεωρούμε το  $\mathbb{R}$  με μετρική την  $d(x, y) = |\arctan x - \arctan y|$ . Αποδείξτε ότι ο  $(\mathbb{R}, d)$  δεν είναι πλήρης.

(β) Έστω  $g : (X, d) \rightarrow (Y, \sigma)$  ομοιομορφισμός. Για καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις δώστε απόδειξη ή αντιπαράδειγμα.

(i) Αν ο  $X$  είναι διαχωρίσιμος τότε ο  $Y$  είναι διαχωρίσιμος.

(ii) Αν ο  $X$  είναι πλήρης τότε ο  $Y$  είναι πλήρης.

(3 μον.)

Καλή Επιτυχία!