

## Πραγματική Ανάλυση Ιούνιος 2021

18 Ιουνίου 2021

2ο Κλιμάκιο

### Θέμα 1.

Αποδείξτε ότι στο μετρικό χώρο  $\mathbb{R}$  με τη συνήθη μετρική ισχύουν οι ακόλουθες προτάσεις:

- (i) Αν τα  $D, G$  είναι πυκνά υποσύνολα του  $\mathbb{R}$  και το  $G$  είναι επιπλέον ανοικτό, τότε το  $D \cap G$  είναι πυκνό υποσύνολο του  $\mathbb{R}$ .
- (ii) Αν το  $A$  είναι πυκνό υποσύνολο του  $\mathbb{R}$  και το  $F$  είναι πεπερασμένο υποσύνολο του  $\mathbb{R}$ , τότε το  $A \setminus F$  είναι πυκνό υποσύνολο του  $\mathbb{R}$ .

### Θέμα 2.

(α) Δίνονται δύο μετρικοί χώροι  $(X, d)$ ,  $(Y, \rho)$  και δύο συνεχείς συναρτήσεις  $f, g : X \rightarrow Y$ . Αν, για κάποιο  $x_0 \in X$  ισχύει  $f(x_0) \neq g(x_0)$ , αποδείξτε ότι υπάρχει  $\varepsilon > 0$  ώστε, για κάθε  $z \in B(x_0, \varepsilon)$  να είναι  $f(z) \neq g(z)$ .

(β) Έστω  $(X, d)$  συμπαγής μετρικός χώρος και  $(x_n)$  ακολουθία στον  $X$ . Αν η  $(x_n)$  δεν συγκλίνει, αποδείξτε ότι έχει τουλάχιστον δύο διαφορετικά υπακολουθιακά όρια.

### Θέμα 3.

Έστω  $(X, d)$  και  $(Y, \rho)$  δύο μετρικοί χώροι οι οποίοι είναι ομοιομορφικοί. Εξετάστε αν είναι αληθής καθεμιά από τις ακόλουθες προτάσεις. Αιτιολογήστε πλήρως τις απαντήσεις σας, δίνοντας απόδειξη αν η πρόταση είναι αληθής και αντιπαράδειγμα αν η πρόταση είναι ψευδής:

- (i) Ο  $(X, d)$  είναι συμπαγής εάν και μόνο εάν ο  $(Y, \rho)$  είναι συμπαγής.
- (ii) Ο  $(X, d)$  είναι πλήρης εάν και μόνο εάν ο  $(Y, \rho)$  είναι πλήρης.

### Θέμα 4.

Έστω  $X$  σύνολο και  $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , μια ακολουθία φραγμένων συναρτήσεων η οποία συγκλίνει κατά σημείο σε μια συνάρτηση  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ .

- (i) Αν η σύγκλιση της ακολουθίας  $(f_n)$  στην  $f$  είναι ομοιόμορφη, αποδείξτε ότι η συνάρτηση  $f$  είναι φραγμένη.
- (ii) Δείξτε με ένα παράδειγμα ότι, αν η σύγκλιση της  $(f_n)$  στην  $f$  δεν είναι ομοιόμορφη, τότε η συνάρτηση  $f$  δεν είναι κατ' ανάγκη φραγμένη.

*Διάρκεια εξέτασης: 90 λεπτά. Τα 4 θέματα είναι βαθμολογικά ισοδύναμα.*

*Καλή Επιτυχία*