Πραγματική Ανάλυση, Ιούνιος 2021

18 Ιουνίου 2021

3ο Κλιμάκιο

Θέμα 1. Έστω (X,d) τυχών μετρικός χώρος. Εξετάστε αν είναι αληθής ή ψευδής καθεμιά από τις ακόλουθες προτάσεις. Αιτιολογήστε πλήρως τις απαντήσεις σας, δίνοντας απόδειξη αν η πρόταση είναι αληθής και αντιπαράδειγμα αν η πρόταση είναι ψευδής:

(i) Για κάθε $x \in X$ και $\varepsilon > 0$, ισχύει $\overline{B(x,\varepsilon)} = \widehat{B}(x,\varepsilon)$.

(ii) Για κάθε $A, B \subseteq X$, ισχύει $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$.

(iii) Έστω (Y,ρ) μετρικός χώρος και $f : X \to Y$ συνεχής συνάρτηση επί του Y. Αν το $D \subseteq X$ είναι πυκνό υποσύνολο του X, τότε το $f(D)$ είναι πυκνό στον Y.

Θέμα 2.

(α) Έστω (X,d) μετρικός χώρος και (x_n) ακολουθία στον X. Θέτουμε $A = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

(i) Αποδείξτε ότι, αν το x είναι σημείο συσσώρευσης του A, τότε υπάρχει υπακολουθία (x_{k_n}) της (x_n) η οποία συγκλίνει στο x.

(ii) Αποδείξτε ότι, αν η (x_n) είναι ακολουθία Cauchy αλλά δεν συγκλίνει, τότε το σύνολο A είναι κλειστό.

(β) Αποδείξτε ότι ένας μετρικός χώρος (X,d) είναι πλήρης αν και μόνο αν κάθε αριθμήσιμο, κλειστό και φραγμένο υποσύνολο του X είναι πλήρης μετρικός υπόχωρος.

Θέμα 3. Έστω (X,d), (Y,ρ) μετρικοί χώροι και $f : X \to Y$ συνάρτηση. Συμβολίζουμε με $\mathrm{Gr}(f)$ το γράφημα της f, δηλαδή $\mathrm{Gr}(f) = \{(x,y) \in X \times Y \mid y = f(x)\}$. Στο $X \times Y$ θεωρούμε οποιαδήποτε μετρική γινόμενο. Αποδείξτε τα ακόλουθα:

(i) Αν η f είναι συνεχής, τότε το $\mathrm{Gr}(f)$ είναι κλειστό στον $X \times Y$.

(ii) Αν ο Y είναι συμπαγής και το $\mathrm{Gr}(f)$ είναι κλειστό στον $X \times Y$, τότε η f είναι συνεχής.

Θέμα 4.

Δίνεται η ακολουθία συναρτήσεων $f_n : [0,+\infty) \to \mathbb{R},\ n = 1, 2, \ldots$, με

$$f_n(x) = nxe^{-nx}.$$

(i) Αποδείξτε ότι η ακολουθία (f_n) συγκλίνει κατά σημείο στη μηδενική συνάρτηση στο $[0,+\infty)$.

(ii) Εξετάστε αν η σύγκλιση της (f_n) στην $f \equiv 0$ είναι ομοιόμορφη στο $[0,+\infty)$.

(iii) Εξετάστε αν η σύγκλιση της (f_n) στην $f \equiv 0$ είναι ομοιόμορφη σε κάθε διάστημα της μορφής $[a,+\infty)$ με $a > 0$.

Διάρκεια εξέτασης: 90 λεπτά. Τα 4 θέματα είναι βαθμολογικά ισοδύναμα.

Καλή Επιτυχία