Πραγματική Ανάλυση – Τετάρτη 19 Ιανουαρίου 2022

1. (1+1+1 μον.) Έστω (X,d) μετρικός χώρος και A, B υποσύνολα του X. Αποδείξτε ότι:

(α) Αν $A \subseteq B$ τότε $A^\circ \subseteq B^\circ$ και $\overline{A} \subseteq \overline{B}$.

(β) Αν τα A και B είναι συμπαγή, τότε το $A \cup B$ είναι συμπαγές.

(γ) Αν το A είναι συμπαγές, τότε το A είναι φραγμένο.

2. (1.5+1+1 μον.) (α) Στο $X = [1, +\infty)$ θεωρούμε τη μετρική $d(x,y) = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right|$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε $F_n = [n, +\infty)$. Είναι το F_n κλειστό; Υπολογίστε την $\mathrm{diam}(F_n)$. Είναι ο (X,d) πλήρης;

(β) Έστω (X,d) μετρικός χώρος και $f : X \to \mathbb{N}$ συνεχής και επί συνάρτηση. Αποδείξτε ότι υπάρχουν μη κενά ανοικτά σύνολα $G_n \subseteq X$, $n \in \mathbb{N}$ με τις εξής ιδιότητες: $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$ και για κάθε $n \in \mathbb{N}$ η $f\big|_{G_n}$ είναι σταθερή.

(γ) Έστω (X,d) πλήρης μετρικός χώρος και $f : X \to \mathbb{Q}$ συνεχής συνάρτηση. Αποδείξτε ότι υπάρχει μη κενό ανοικτό $G \subseteq X$ ώστε η $f\big|_G$ να είναι σταθερή.

3. (1.5+1 μον.) (α) Έστω (X,d) ολικά φραγμένος μετρικός χώρος και D πυκνό υποσύνολο του X. Αποδείξτε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχουν $N \in \mathbb{N}$ και $d_1, \ldots, d_N \in D$ ώστε $X = \bigcup_{k=1}^{N} B(d_k, \varepsilon)$.

(β) Έστω (X,d) συμπαγής μετρικός χώρος και $f : (X,d) \to (Y,\sigma)$ συνεχής συνάρτηση. Αποδείξτε ότι για κάθε $A \subseteq X$ ισχύει $f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$.

4. (1.5+1.5 μον.) (α) Θεωρούμε την ακολουθία συναρτήσεων $f_n : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ με

$$f_n(x) = nx^2 e^{-\sqrt{n}x}.$$

Αποδείξτε ότι $f_n \to f \equiv 0$ κατά σημείο αλλά όχι ομοιόμορφα στο $[0,\infty)$. Εξετάστε αν $f_n \to 0$ ομοιόμορφα σε κάθε διάστημα $[\alpha, \infty)$, $\alpha > 0$.

(β) Έστω $f_n, f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συναρτήσεις τέτοιες ώστε $f_n \to f$ ομοιόμορφα. Υποθέτουμε ότι, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to\infty} f_n(x) = 0$. Αποδείξτε ότι $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$.

Καλή Επιτυχία!