Πραγματική Ανάλυση

Εξέταση περιόδου Σεπτεμβρίου 2022

16 - 9 - 2022

Θέμα 1ο.

Έστω (X, d) μετρικός χώρος. Αποδείξτε τα ακόλουθα:

(α) Έστω $D \subseteq X$. Το D είναι πυκνό στον X αν και μόνο αν, για κάθε $\varepsilon > 0$, ισχύει $X = \cup_{y \in D} B(y, \varepsilon)$.

(β) Έστω G ανοικτό υποσύνολο του X, $x \in G$ και (x_n) ακολουθία στον X με $x_n \to x$. Τότε υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geq n_0$ να ισχύει $B(x_n, \frac{1}{n}) \subseteq G$.

(γ) Έστω ότι για κάθε $x, y \in X$ με $x \neq y$ ισχύει $d(x, y) \geq 1$. Τότε τα μόνα συμπαγή υποσύνολα του X είναι τα πεπερασμένα.

Θέμα 2ο.

Στο σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών θεωρούμε τη μετρική d με

$$d(x, y) = |e^{-x} - e^{-y}|, \ \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R}.$$

(α) Δείξτε ότι η μετρική d είναι ισοδύναμη με τη συνήθη μετρική του $\mathbb{R}$.

(β) Δείξτε ότι ο μετρικός χώρος $(\mathbb{R}, d)$ δεν είναι πλήρης.

(γ) Έστω (G_n) μια ακολουθία d-ανοικτών και d-πυκνών υποσυνόλων του $\mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι το σύνολο $\cap_{n=1}^{\infty} G_n$ είναι d-πυκνό στον $\mathbb{R}$.

Θέμα 3ο.

(α) Έστω (X, d) συμπαγής μετρικός χώρος και $f : X \to X$ συνεχής συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι υπάρχει ακολουθία (x_n) στον X με την ιδιότητα $d(f(x_n), x_n) \to 0$. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση f έχει σταθερό σημείο, δηλαδή υπάρχει $x_0 \in X$ με $f(x_0) = x_0$.

(β) Αποδείξτε ότι κάθε συνάρτηση $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής. Εξετάστε αν είναι κατ' ανάγκη Lipschitz συνεχής.

(γ) Αποδείξτε ότι δεν υπάρχει συνεχής, 1 - 1 συνάρτηση $g : \mathbb{Q} \to \mathbb{N}$.

Θέμα 4ο.

(α) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση. Αποδείξτε ότι η ακολουθία συναρτήσεων (f_n) με $f_n(x) = f(x + \frac{1}{n})$, $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην f.

(β) Δίνεται η ακολουθία συναρτήσεων $g_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ με

$$g_n(x) = x^n(1 - x), \ \ x \in [0, 1], \ n \in \mathbb{N}.$$

Αποδείξτε ότι η ακολουθία (g_n) συγκλίνει ομοιόμορφα σε μια συνάρτηση g και βρείτε την g.

Καλή επιτυχία!