Πραγματική Ανάλυση

Τελική Εξέταση - 1ο Κλιμάκιο

22 - 6 - 2022

Θέμα 1ο.

Εξετάστε αν είναι αληθής ή ψευδής καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις αιτιολογώντας πλήρως τις απαντήσεις σας. Ο $\mathbb{R}$ και τα υποσύνολά του θεωρούνται εφοδιασμένα με τη συνήθη μετρική.

(1) Αν το $A \subseteq \mathbb{R}$ είναι φραγμένο, τότε το $\overline{A}$ είναι συμπαγές.

(2) Αν το D είναι πυκνό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ και $x_0 \in D$, τότε το $D \setminus \{x_0\}$ είναι πυκνό στο $\mathbb{R}$.

(3) Οι μετρικοί χώροι $(\mathbb{N}, |\cdot|)$ και $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$ είναι ομοιομορφικοί.

Θέμα 2ο.

(α) Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος και $A \subseteq X$. Πότε λέμε ότι το A είναι ολικά φραγμένο;

(β) Βρείτε παράδειγμα συνόλου A σε κατάλληλο μετρικό χώρο (X, ρ), το οποίο είναι φραγμένο, αλλά όχι ολικά φραγμένο.

(γ) Δείξτε με κατάλληλο παράδειγμα ότι μια ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση μπορεί να απεικονίζει φραγμένα σύνολα σε μη φραγμένα σύνολα.

(δ) Αποδείξτε ότι αν (X, ρ) και (Y, d) είναι δύο μετρικοί χώροι και η συνάρτηση $f : X \to Y$ είναι ομοιόμορφα συνεχής, τότε, για κάθε ολικά φραγμένο $A \subseteq X$, το $f(A)$ είναι ολικά φραγμένο.

Θέμα 3ο.

(α) Θεωρούμε τον μετρικό χώρο $\mathbb{Q}$ με τον περιορισμό της συνήθους μετρικής του $\mathbb{R}$. Βρείτε μια ακολουθία (G_n) ανοικτών και πυκνών υποσυνόλων του $\mathbb{Q}$ με την ιδιότητα $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n = \emptyset$.

(β) Εξετάστε αν υπάρχει μετρική d στο $\mathbb{Q}$, ισοδύναμη με τη συνήθη, τέτοια ώστε ο $(\mathbb{Q}, d)$ να είναι πλήρης.

(γ) Βρείτε μια μετρική ρ στο $\mathbb{R}$, ισοδύναμη με τη συνήθη, τέτοια ώστε ο μετρικός χώρος $(\mathbb{R}, \rho)$ να μην είναι πλήρης.

Θέμα 4ο.

(α) Δίνεται μια ακολουθία πραγματικών αριθμών (a_n). Ορίζουμε την ακολουθία συναρτήσεων $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ ως εξής: Για κάθε $n = 1, 2, \ldots,$

$$f_n(x) = \begin{cases} a_n & \text{αν } x \in [\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}] \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

(i) Δείξτε ότι η ακολουθία (f_n) συγκλίνει κατά σημείο σε μια συνάρτηση f και βρείτε την f.

(ii) Αποδείξτε ότι η σύγκλιση της (f_n) στην f είναι ομοιόμορφη αν και μόνο αν $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

(β) Δίνεται κλειστό διάστημα $[a, b]$ και μια ακολουθία συναρτήσεων $g_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ η οποία συγκλίνει κατά σημείο σε μια συνάρτηση g και έχει την ακόλουθη ιδιότητα: Για κάθε $x \in [a, b]$ υπάρχει ανοιχτό διάστημα I_x τέτοιο ώστε $x \in I_x$ και $g_n \to g$ ομοιόμορφα στο $I_x \cap [a, b]$. Αποδείξτε ότι η (g_n) συγκλίνει ομοιόμορφα στην g στο $[a, b]$. (*Υπόδειξη:* Χρησιμοποιήστε τη συμπάγεια.)

Καλή επιτυχία!