ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ
22/06/2023

ΘΕΜΑ 1. Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος (μ.χ.).

(α) Να δείξετε ότι υπάρχει μετρική d, ισοδύναμη με την ρ, ώστε (X, d) να είναι φραγμένος μ.χ.

(β) Έστω $\emptyset \neq A \subseteq X$. Να ορίσετε την απόσταση $\operatorname{dist}(x, A)$ ενός σημείου $x \in X$ από το A και να ελέγξετε αν ισχύουν οι ισότητες:

$$\operatorname{dist}(x, A) = \operatorname{dist}(x, \bar{A}), \qquad \operatorname{dist}(x, A) = \operatorname{dist}(x, A^o), \qquad \text{και} \qquad \operatorname{dist}(x, A) = \operatorname{dist}(x, \partial A).$$

ΘΕΜΑ 2. (α) Έστω (x_n), (y_n) βασικές ακολουθίες στον μ.χ. (X, d). Να δείξετε ότι η ακολουθία $(d(x_n, y_n)) \subseteq \mathbb{R}$ είναι βασική.

(β) Έστω $f : (X, \rho) \to (Y, \sigma)$ συνεχής και $D \subseteq X$ πυκνό. Αν $f|_D$ είναι ομοιόμορφα συνεχής, να δείξετε ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.

ΘΕΜΑ 3. (α) Έστω (X, d) μ.χ. και $D \subseteq X$ πυκνό, με την ιδιότητα: κάθε βασική ακολουθία του D συγκλίνει σε σημείο του X. Να δείξετε ότι ο μ.χ. (X, d) είναι πλήρης.

(β) Έστω (G_n) ακολουθία ανοιχτών και πυκνών υποσυνόλων του $\mathbb{R}$. Να δείξετε ότι το σύνολο

$$G = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} G_n$$

είναι υπεραριθμήσιμο.

ΘΕΜΑ 4. (α) Έστω (X, d) μ.χ. και $A \subseteq X$. Να δείξετε ότι αν A είναι ολικά φραγμένο, τότε και $\bar{A}$ είναι ολικά φραγμένο.

(β) Έστω (X, d) συμπαγής, $f : X \to X$ συνεχής και $(x_n) \subseteq X$ με $d(x_n, f(x_n)) \to 0$. Να δείξετε ότι η f έχει σταθερό σημείο.

ΘΕΜΑ 5. (α) Έστω $f_n, g_n : [0, 1] \to [0, 1]$ συνεχείς, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $f_n \xrightarrow{\text{ομ}} f$ και $g_n \xrightarrow{\text{ομ}} g$. Να δείξετε ότι $f_n \circ g_n \xrightarrow{\text{ομ}} f \circ g$.

(β) Έστω $a > 1/2$. Να δείξετε ότι η σειρά

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x}{k^a(1 + kx^2)}$$

συγκλίνει ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$.

Γράφετε 4 από τα 5 θέματα.
Διάρκεια εξέτασης: 2 ώρες
Καλή επιτυχία!