Πραγματική Ανάλυση

Εξέταση περιόδου Σεπτεμβρίου 2023

Θέμα 1ο (0,7+0,8+1 = 2,5 μον.)

(α) (i) Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος, $x \in X$ και $\varepsilon > 0$. Εξετάστε αν ισχύει πάντα η ισότητα $\widehat{B}(x,\varepsilon) = \overline{B(x,\varepsilon)}$.

(ii) Εξετάστε αν η ισότητα $\widehat{B}(x,\varepsilon) = \overline{B(x,\varepsilon)}$ ισχύει στην περίπτωση που ο X είναι χώρος με νόρμα.

(β) Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος και $A \subseteq X$. Για κάθε $\varepsilon > 0$, ορίζουμε $A_\varepsilon = \bigcup_{x\in A} B(x,\varepsilon)$. Αποδείξτε ότι ισχύει $\overline{A} = \bigcap_{\varepsilon>0} A_\varepsilon$.

Θέμα 2ο (0,7+0,8+1 = 2,5 μον.)

(α) Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος και $A, B \subseteq X$. Αποδείξτε τα ακόλουθα:

(i) Αν το A είναι ανοιχτό σύνολο, τότε $(\partial A)^\circ = \emptyset$.

(ii) Σε κάθε περίπτωση ισχύει $A^\circ \cup B^\circ \subseteq (A \cup B)^\circ$ και, αν $\overline{A} \cap \overline{B} = \emptyset$, τότε $A^\circ \cup B^\circ = (A \cup B)^\circ$.

(β) Έστω $(X,\rho), (Y,d)$ μετρικοί χώροι και $f, g : X \to Y$ συνεχείς συναρτήσεις. Αν, για κάποιο $x \in X$, ισχύει $f(x) \neq g(x)$, αποδείξτε ότι, υπάρχει $\delta > 0$ με την ιδιότητα: Για κάθε $y, z \in B(x,\delta)$, ισχύει $f(y) \neq g(z)$.

Θέμα 3ο (0,6+0,6+0,6+0,7 = 2,5 μον.)

(α) Θεωρούμε τα σύνολα $\mathbb{N}$, $A = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ και $B = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$ ως μετρικούς χώρους με τον περιορισμό της συνήθους μετρικής του $\mathbb{R}$.

(i) Ποιοι από τους μετρικούς χώρους $(\mathbb{N}, |\cdot|)$, $(A, |\cdot|)$, $(B, |\cdot|)$ είναι πλήρεις;

(ii) Ποιοι από τους μετρικούς χώρους $(\mathbb{N}, |\cdot|)$, $(A, |\cdot|)$, $(B, |\cdot|)$ είναι συμπαγείς;

(iii) Ποιοι από τους παραπάνω μετρικούς χώρους είναι ομοιομορφικοί μεταξύ τους;

(β) Εξετάστε αν είναι αληθής ή ψευδής η παρακάτω πρόταση:
"Αν οι μετρικοί χώροι (X,ρ) και (Y,d) είναι ομοιομορφικοί και ο X είναι πλήρης, τότε και ο Y είναι πλήρης."

Θέμα 4ο (1,5+1 = 2,5 μον.)

(α) Έστω $K \neq \emptyset$ συμπαγές υποσύνολο ενός μετρικού χώρου (X,ρ). Αποδείξτε ότι υπάρχουν $x, y \in K$ με $\rho(x,y) = \mathrm{diam}(K)$.

(β) Έστω (X,ρ) συμπαγής μετρικός χώρος και (K_n) μια φθίνουσα ακολουθία κλειστών υποσυνόλων του X με την ιδιότητα: Υπάρχει $\delta > 0$ με $\mathrm{diam}(K_n) \geq \delta$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αποδείξτε ότι

$$\mathrm{diam}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n\right) \geq \delta.$$

Θέμα 5ο (1+1,5 = 2,5 μον.)

Δίνεται η ακολουθία συναρτήσεων (f_n), όπου, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $f_n : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ με

$$f_n(x) = \frac{x^2}{x^2 + (1-nx)^2}\ ,\ x \in [0,+\infty).$$

(α) Αποδείξτε ότι η ακολουθία συναρτήσεων (f_n) συγκλίνει κατά σημείο στη συνάρτηση $f \equiv 0$.

(β) Αποδείξτε ότι η σύγκλιση της (f_n) στην f δεν είναι ομοιόμορφη στο διάστημα $[0,+\infty)$, αλλά είναι ομοιόμορφη σε κάθε διάστημα της μορφής $[a,+\infty)$, με $a > 0$.

Καλή επιτυχία!