Πραγματική Ανάλυση
Τελική Εξέταση 3 - 2 - 2023

Θέμα 1ο (1+1+1 μον.)

(α) Έστω (X,d) μετρικός χώρος. Αν $A \subseteq X$, αποδείξτε ότι $\overline{X \setminus A} = X \setminus A^\circ$.

(β) Έστω (X,d) μετρικός χώρος, $E \subseteq X$ και E' το σύνολο των σημείων συσσώρευσης του E. Αποδείξτε ότι το σύνολο E' είναι κλειστό στον X.

(γ) Έστω ότι ο μετρικός χώρος (X,d) είναι συμπαγής. Χρησιμοποιώντας τον ορισμό της συμπάγειας, αποδείξτε ότι κάθε κλειστό υποσύνολο K του X είναι συμπαγές.

Θέμα 2ο (0,8+0,7+0,7+0,8 μον.)

(α) Δίνεται μετρικός χώρος (X,ρ) και $B \subseteq X$ με την ακόλουθη ιδιότητα: Υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε, για κάθε $x,y \in B$ με $x \neq y$ να ισχύει $\rho(x,y) \geq \delta$. Αποδειξτε ότι:

(i) Το B είναι κλειστό.

(ii) Αν επιπλέον το B είναι άπειρο σύνολο, τότε το B δεν είναι συμπαγές.

(β) Έστω (X,ρ), (Y,d) μετρικοί χώροι, $f : X \to Y$ συνεχής συνάρτηση και $A \subseteq X$.

(i) Αποδείξτε ότι $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$.

(ii) Αν επιπλέον ο μετρικός χώρος (X,ρ) είναι συμπαγής, δείξτε ότι $f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$.

Θέμα 3ο (1+1,5+0,5 μον.)

(α) Έστω (X,d) μετρικός χώρος με την ακόλουθη ιδιότητα: Κάθε κλειστό υποσύνολο F του X με $\mathrm{diam}(F) \leq 1$ είναι πλήρης μετρικός υπόχωρος του X. Αποδείξτε ότι ο X είναι πλήρης.

(β) Έστω (X,ρ) πλήρης μετρικός χώρος και $h : X \to X$ ομοιομορφισμός. Αν το G είναι ένα πυκνό G_δ υποσύνολο του X, αποδείξτε ότι $G \cap h(G) \neq \emptyset$.

(γ) Χρησιμοποιώντας το (β) αποδείξτε το ακόλουθο: Αν το G είναι ένα πυκνό G_δ υποσύνολο του $\mathbb{R}$, τότε, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, υπάρχουν $a, b \in G$ με $x = b - a$.

Θέμα 4ο (0,5+1,5+1 μον.)

(α) Δίνεται η ακολουθία συναρτήσεων $f_n : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ με

$$f_n(x) = nxe^{-n^2x^2},\ x \in [0,+\infty)\ ,\quad n \in \mathbb{N}.$$

(i) Αποδείξτε ότι η ακολουθία (f_n) συγκλίνει κατά σημείο σε μια συνάρτηση f και βρείτε την f.

(ii) Αποδείξτε ότι η σύγκλιση της (f_n) στην f δεν είναι ομοιόμορφη στο $[0,+\infty)$, αλλά για κάθε $\delta > 0$, $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο $[\delta,+\infty)$.

(β) Δίνεται ένα σύνολο X και μια ακολουθία συναρτήσεων $g_n : X \to \mathbb{R}$ η οποία συγκλίνει ομοιόμορφα σε μια συνάρτηση $g : X \to \mathbb{R}$. Αν η συνάρτηση g είναι φραγμένη, αποδείξτε ότι υπάρχουν $M > 0$ και $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοια ώστε, για κάθε $x \in X$ και κάθε $n \geq n_0$ να ισχύει $|g_n(x)| \leq M$.

Καλή επιτυχία!