

Πραγματική Ανάλυση - Πτυχιακή Εξέταση (24 - 1 - 2025)

Θέμα 1ο (1,5+1+0,5=3 μον.)

(α) Έστω (X, d) μετρικός χώρος.

(i) Να δώσετε τον ορισμό του εσωτερικού A° ενός υποσυνόλου A του X .

(ii) Να αποδείξετε ότι, για κάθε $A, B \subseteq X$ ισχύει $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$, αλλά δεν ισχύει κατ' ανάγκη $(A \cup B)^\circ = A^\circ \cup B^\circ$.

(β) Θεωρούμε τον μετρικό χώρο $\mathbb{R}$ με τη συνήθη μετρική, ένα πυκνό υποσύνολό του D και ένα σημείο $x_0 \in D$. Αποδείξτε ότι το σύνολο $D \setminus \{x_0\}$ είναι επίσης πυκνό στο $\mathbb{R}$.

(γ) Δώστε παράδειγμα ενός μετρικού χώρου X που δεν έχει κανένα γνήσιο πυκνό υποσύνολο, αιτιολογώντας την απάντησή σας.

Θέμα 2ο (1,5+1,5=3 μον.)

(α) Δίνεται μετρικός χώρος (X, ρ) και $E \subseteq X$ με την ακόλουθη ιδιότητα: Υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε, για κάθε $x, y \in E$ με $x \neq y$ να ισχύει $\rho(x, y) \geq \delta$. Αποδείξτε ότι:

(i) Το E είναι κλειστό.

(ii) Αν επιπλέον το E είναι άπειρο σύνολο, τότε το E δεν είναι συμπαγές.

(β) Εξετάστε αν ο μετρικός χώρος $\mathbb{N}$ είναι ομοιομορφικός με καθέναν από τους παρακάτω μετρικούς χώρους: (i) $\mathbb{Q}$, (ii) $A = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$, (iii) $B = \{0\} \cup \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$.

(Όλοι οι παραπάνω χώροι θεωρούνται ως υπόχωροι του $\mathbb{R}$ με τη συνήθη μετρική.)

Θέμα 3ο (0,7+1+0,5+0,8=3 μον.)

Στο σύνολο $X = [1, +\infty)$ θεωρούμε τη μετρική d με $d(x, y) = \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right|$.

(α) Αποδείξτε ότι η μετρική d είναι ισοδύναμη με τη συνήθη μετρική στο X .

(β) Αποδείξτε ότι ο μετρικός χώρος (X, d) δεν είναι πλήρης.

(γ) Εξετάστε αν ο μετρικός χώρος (X, d) είναι συμπαγής.

(δ) Εξετάστε αν στον μετρικό χώρο (X, d) ισχύει η ακόλουθη πρόταση:

Αν η (G_n) είναι μια ακολουθία ανοικτών και πυκνών υποσυνόλων του X , τότε το σύνολο $G = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ είναι πυκνό στον X .

Θέμα 4ο (1,5+1,5=3 μον.)

(α) Δίνεται η ακολουθία συναρτήσεων $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f_n(x) = \frac{nx^2}{nx^2 + 1}$, $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$.

(i) Αποδείξτε ότι η ακολουθία (f_n) συγκλίνει κατά σημείο σε μια συνάρτηση f και βρείτε την f . Εξετάστε αν η (f_n) συγκλίνει ομοιόμορφα στην f στο $\mathbb{R}$.

(ii) Αποδείξτε ότι, για κάθε $a > 0$, η (f_n) συγκλίνει στην f ομοιόμορφα στο $[a, +\infty)$.

(β) Δίνεται η ακολουθία συναρτήσεων $g_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $g_n(x) = \left(x + \frac{1}{n} \right)^2$, $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$.

(i) Αποδείξτε ότι η ακολουθία (g_n) συγκλίνει κατά σημείο σε μια συνάρτηση g και βρείτε την g . Εξετάστε αν η (g_n) συγκλίνει ομοιόμορφα στην g στο $\mathbb{R}$.

(ii) Αποδείξτε ότι, για κάθε $M > 0$, η (g_n) συγκλίνει στην g ομοιόμορφα στο διάστημα $[-M, M]$.

Καλή επιτυχία!