

Πραγματική Ανάλυση - 22 Ιουνίου 2026

Θέμα 1ο.

(0,5 + 1 + 0,8 + 0,7 = 3 μον.)

Έστω (X, d) μετρικός χώρος.

(α) Δώστε τον ορισμό του σημείου συσσώρευσης ενός συνόλου $A \subseteq X$.

(β) Αποδείξτε ότι ένα $x \in X$ είναι σημείο συσσώρευσης του συνόλου $A \subseteq X$ αν και μόνο αν, για κάθε $\varepsilon > 0$, η μπάλα $B(x, \varepsilon)$ περιέχει άπειρα σημεία του A .

(γ) Αν $A \subseteq X$, συμβολίζουμε με A' το σύνολο των σημείων συσσώρευσης του A . Δείξτε ότι:

(i) Για οποιοδήποτε $A \subseteq X$, το A' είναι κλειστό υποσύνολο του X .

(ii) Αν $A, B \subseteq X$, τότε $(A \cup B)' = A' \cup B'$.

Θέμα 2ο.

(0,5 + 1,5 = 2 μον.)

(α) Έστω (X, d) μετρικός χώρος και $f : X \rightarrow X$ συνεχής συνάρτηση. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(x) = d(x, f(x))$, για κάθε $x \in X$, είναι συνεχής.

(β) Έστω (X, d) συμπαγής μετρικός χώρος και $f : X \rightarrow X$ συνεχής συνάρτηση με την ιδιότητα $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$, για κάθε $x, y \in X$ με $x \neq y$. Αποδείξτε ότι η f έχει μοναδικό σταθερό σημείο, δηλαδή υπάρχει μοναδικό $x_0 \in X$ με $f(x_0) = x_0$. (Υπόδειξη: Αξιοποιήστε τη συνάρτηση g του ερωτήματος (α).)

Θέμα 3ο.

(1 + 0,8 + 0,7 + 1 = 3,5 μον.)

(α) Έστω (X, d) μετρικός χώρος και $F \subseteq X$ με την ιδιότητα: Υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε $d(x, y) \geq \delta$, για κάθε $x, y \in F$ με $x \neq y$. Αποδείξτε ότι το σύνολο F είναι κλειστό.

(β) Έστω (X, d) μετρικός χώρος, ο οποίος δεν είναι ολικά φραγμένος. Αποδείξτε ότι:

(i) Υπάρχει $\varepsilon > 0$ και ακολουθία (x_n) στον X , με την ιδιότητα $d(x_n, x_m) \geq \varepsilon$, για κάθε $n, m \in \mathbb{N}$ με $n \neq m$.

(ii) Υπάρχει μια φθίνουσα ακολουθία (F_n) κλειστών μη κενών υποσυνόλων του X με την ιδιότητα $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \emptyset$.

(γ) Στον μετρικό χώρο $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, βρείτε μια φθίνουσα ακολουθία (F_n) κλειστών μη κενών συνόλων με την ιδιότητα $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \emptyset$. Εξετάστε αν για μια τέτοια ακολουθία (F_n) (στο $\mathbb{R}$), μπορεί να ισχύει $\text{diam}(F_n) \rightarrow 0$.

Θέμα 4ο.

(2 + 1 + 0,5 = 3,5 μον.)

(α) Δίνεται η ακολουθία συναρτήσεων $f_n : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$f_n(x) = \frac{nx}{n^2x^2 + 1}, \quad x \in [0, +\infty), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Αποδείξτε ότι η ακολουθία (f_n) συγκλίνει κατά σημείο σε μια συνάρτηση f και βρείτε την f . Αποδείξτε επιπλέον ότι η σύγκλιση της (f_n) στην f δεν είναι ομοιόμορφη στο $[0, +\infty)$, αλλά για κάθε $\delta > 0$, $f_n \rightarrow f$ ομοιόμορφα στο $[\delta, +\infty)$.

(β) Δίνεται η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ με ακτίνα σύγκλισης $R > 0$.

(i) Αποδείξτε ότι, για κάθε $r \in (0, R)$, η δυναμοσειρά συγκλίνει ομοιόμορφα στο διάστημα $[-r, r]$.

(ii) Χρησιμοποιώντας το (i), εξηγήστε γιατί η συνάρτηση $s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ είναι συνεχής στο διάστημα $(-R, R)$.

Καλή επιτυχία!