

Πραγματική Ανάλυση
Τελική Εξέταση (10 Σεπτεμβρίου 2026)

Θέμα 1ο.

(0, 5 + 1, 5 + 1 = 3 μον.)

Έστω (X, d) μετρικός χώρος.

(α) Δώστε τον ορισμό του σημείου επαφής, καθώς και της κλειστής θήκης ενός συνόλου $A \subseteq X$.

(β) Εξετάστε αν είναι **αληθής** ή **ψευδής** καθεμιά από τις ακόλουθες προτάσεις, για οποιαδήποτε $A, B, C_n \subseteq X$, $n = 1, 2, \dots$

$$(i) \overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B} \quad (ii) \overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B} \quad (iii) \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{C_n}.$$

(γ) Αν $A, B \subseteq X$ με $A \cup B = X$, αποδείξτε ότι $\overline{A} \cup B^\circ = X$.

Θέμα 2ο.

(1 + 1, 5 + 0, 5 = 3 μον.)

(α) Αν τα A, B είναι συμπαγή υποσύνολα ενός μετρικού χώρου (X, d) , αποδείξτε ότι και τα $A \cup B$, $A \cap B$ είναι συμπαγή.

(β) Έστω (X, d) πλήρης μετρικός χώρος, (Y, ρ) μετρικός χώρος και $f : X \rightarrow Y$ συνεχής συνάρτηση. Έστω (E_n) μια φθίνουσα ακολουθία κλειστών μη κενών υποσυνόλων του X με $\text{diam}(E_n) \rightarrow 0$. Αποδείξτε ότι $f(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n) = \bigcap_{n=1}^{\infty} f(E_n)$.

(γ) Θεωρώντας $X = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ και $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ μια σταθερή συνάρτηση, επιλέξτε κατάλληλη ακολουθία συνόλων (E_n) για να αποδείξετε ότι, χωρίς την υπόθεση της πληρότητας του X , το συμπέρασμα του (β) μπορεί να μην ισχύει.

Θέμα 3ο.

(1, 5 + 1, 5 = 3 μον.)

(α) Έστω (X, d) , (Y, ρ) μετρικοί χώροι, $f : X \rightarrow Y$ συνεχής συνάρτηση και $A \subseteq X$.

(i) Αποδείξτε ότι ισχύει $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$.

(ii) Αν επιπλέον ο X είναι συμπαγής, αποδείξτε ότι ισχύει $f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$.

(β) Έστω (X, d) πλήρης μετρικός χώρος χωρίς μεμονωμένα σημεία. Αποδείξτε ότι κάθε G_δ πυκνό υποσύνολο του X είναι υπεραριθμήσιμο.

Θέμα 4ο.

(1, 5 + 1 + 0, 5 = 3 μον.)

(α) Θεωρούμε την ακολουθία συναρτήσεων $g_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ με: Για κάθε $n = 1, 2, \dots$,

$$g_n(x) = x^n(1 - x), \quad x \in [0, 1].$$

Εξετάστε την ακολουθία (g_n) ως προς την κατά σημείο και την ομοιόμορφη σύγκλιση.

(β) Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Θεωρούμε την ακολουθία συναρτήσεων

$$f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ με } f_n(x) = f(x + \frac{1}{n}), \quad x \in \mathbb{R}, \quad n = 1, 2, \dots$$

(i) Αποδείξτε ότι η ακολουθία (f_n) συγχλίνει κατά σημείο στη συνάρτηση f . Αν επιπλέον η f είναι ομοιόμορφα συνεχής, αποδείξτε ότι η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη στο $\mathbb{R}$.

(ii) Για τη συνάρτηση $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$, εξετάστε αν η αντίστοιχη ακολουθία (f_n) συγχλίνει ομοιόμορφα στην f .

Καλή επιτυχία!