ΑΠΟΣΤΑΣΗ

<u>Υπενθ:</u> (X,ρ) μχ, $A,B \subseteq X$, $x \in X$.

$\text{dist}(x,A) = \inf\{\rho(x,a) : a \in A\}$

$\text{dist}(A,B) = \inf\{\rho(a,b) : a \in A,\ b \in B\}$.

$\text{diam}(A) = \sup\{\rho(x,y) : x,y \in A\}$.

<u>Άσκ. 1</u>

Έστω (X,ρ) μχ και $A \subseteq X$. Νδο

(i) $\text{dist}(x,A) = 0 \iff x \in \bar{A}$

(ii) $\forall x \in X$: $\text{dist}(x,A) = \text{dist}(x,\bar{A})$.

<u>Απάντ.</u>

(i) $\text{dist}(x,A) = 0 \iff \inf\{\rho(x,a) : a \in A\} = 0$

$\iff \forall \varepsilon > 0\ \exists a \in A : 0 \leq \rho(x,a) < \varepsilon$

$\iff \forall \varepsilon > 0\ B(x,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$

$\iff x \in \bar{A}$

(ii) $A \subseteq \bar{A} \Rightarrow \text{dist}(x,\bar{A}) \leq \text{dist}(x,A)$.

Για την αντίστροφη ανισότητα, έστω $y \in \bar{A}$ και $\varepsilon > 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \exists a \in B(y,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$. Άρα για τα $x \in X$, $y \in \bar{A}$ και $a \in A$, έχουμε:

$\rho(x,a) \leq \rho(x,y) + \rho(y,a) < \rho(x,y) + \varepsilon \Rightarrow$

$\rho(x,a) - \varepsilon \leq \rho(x,y) \Rightarrow$

$\inf\{\rho(x,a) : a \in A\} - \varepsilon \leq \rho(x,a) - \varepsilon \leq \rho(x,y) \Rightarrow$

$\text{dist}(x,A) - \varepsilon \leq \rho(x,y)$ $(*)$

Επειδή η ανισότητα $(*)$ ισχύει $\forall \varepsilon > 0$, έχουμε

$\text{dist}(x,A) \leq \rho(x,y)$, για τυχαίο $y \in \bar{A}$, άρα

$\text{dist}(x,A) \leq \text{dist}(x,\bar{A})$.

Άσκ 2

(X,ρ) μχ, $\emptyset \neq A \subseteq X$. Να ελέγξετε αν ισχύουν οι ισότητες:

(i) $dist(x,A) = dist(x,A^{o})$.

(ii) $dist(x,A) = dist(x,\partial A)$.

Απάντ.

(i) Όχι: Έστω $(X,\rho) = (\mathbb{R},\rho_{|\,|})$, $A = [0,1] \cup \{2\}$, $x=3$.

$\Rightarrow dist(3,A) = 1$, $dist(3,A^{o}) = 2$.

(ii) Όχι: Έστω $(X,\rho) = (\mathbb{R},\rho_{|\,|})$, όπως προηγουμένως, $A = [0,2]$, $x=1$. Τότε $\partial A = \{0,2\}$ και $dist(x,A)=0$, ενώ $dist(x,\partial A) = 1$.

Άσκ. 3

(X,ρ) μχ, $\emptyset \neq A \subseteq X$. Νδο $\forall x,y \in X$:

$$\rho(x,y) \leq dist(x,A) + diam(A) + dist(y,A).$$

Απόδ. $\forall a,b \in A$, έχουμε:

$$\rho(x,y) \leq \rho(x,a) + \rho(a,b) + \rho(y,b) \leq$$
$$\leq \rho(x,a) + diam(A) + \rho(y,b) \qquad \forall a,b.$$

Σταθεροποιώντας ένα τυχαίο $b \in A$ παίρνουμε:

$\rho(x,y) - diam(A) - \rho(y,b) \leq \rho(x,a)$, $\forall a \in A \Rightarrow$

$\rho(x,y) - diam(A) - \rho(y,b) \leq \inf\{\rho(x,a) : a \in A\} = dist(x,A) \Rightarrow$

$\rho(x,y) - diam(A) - dist(x,A) \leq \rho(y,b)$, για τυχαίο $b \in A \Rightarrow$

$\rho(x,y) - diam(A) - dist(x,A) \leq dist(y,A) \Rightarrow$

$\rho(x,y) \leq dist(x,A) + diam(A) + dist(y,A)$.

Ασκ. 4

(X,ρ) μχ, $\emptyset \neq A, B \subseteq X$. Τότε:

(i) $A \cap B \neq \emptyset \Rightarrow \operatorname{diam}(A \cup B) \leq \operatorname{diam}(A) + \operatorname{diam}(B)$.

(ii) $A \cap B = \emptyset \Rightarrow \operatorname{diam}(A \cup B) \leq \operatorname{diam}(A) + \operatorname{dist}(A,B) + \operatorname{diam}(B)$.

Αποδ.

(i) Θεωρούμε $c \in A \cap B \neq \emptyset$, και τυχαία $x, y \in A \cup B$. Τότε:

- αν $x, y \in A \Rightarrow \rho(x,y) \leq \operatorname{diam}(A) \leq \operatorname{diam}(A) + \operatorname{diam}(B)$.
- αν $x, y \in B \Rightarrow \rho(x,y) \leq \operatorname{diam}(B) \leq \operatorname{diam}(A) + \operatorname{diam}(B)$.
- αν $x \in A$ και $y \in B \Rightarrow$

$$\rho(x,y) \leq \rho(x,c) + \rho(c,y) \leq \operatorname{diam}(A) + \operatorname{diam}(B).$$

Άρα $\operatorname{diam}(A) + \operatorname{diam}(B)$ είναι άνω φράγμα των $\rho(x,y)$, με $x, y \in A \cup B$. Επομένως ισχύει η ζητούμενη ανισότητα.

(ii) Έστω $x, y \in A \cup B$. Τότε:

- αν $x, y \in A$ ή $x, y \in B$, όπως προηγουμένως,

$$\rho(x,y) \leq \operatorname{diam}(A) + \operatorname{dist}(A,B) + \operatorname{diam}(B).$$

- αν $x \in A$ και $y \in B$: επειδή, εξ ορισμού,

$$\operatorname{dist}(A,B) = \inf\{\rho(x,y) : x \in A, y \in B\},$$

υπάρχουν ακολουθίες $(x_n) \subseteq A$, $(y_n) \subseteq B$ με

$$\rho(x_n, y_n) \longrightarrow \operatorname{dist}(A,B).$$

Τότε: $\rho(x,y) \leq \rho(x,x_n) + \rho(x_n,y_n) + \rho(y_n,y) \leq$

$$\leq \operatorname{diam}(A) + \rho(x_n,y_n) + \operatorname{diam}(B)$$

Επειδή τα όρια των ακολουθιών στο $\mathbb{R}$ σέβονται τις ανισότητες,

$$\rho(x,y) \leq \operatorname{diam}(A) + \operatorname{dist}(A,B) + \operatorname{diam}(B),$$

κι επειδή η τελευταία ανισότητα ισχύει $\forall\, x, y \in A \cup B$, παίρνουμε την ζητούμενη.

Άσκ. 5

Έστω (X,ρ) μχ, $\emptyset \neq A \subseteq X$, ~~φραγμ.~~ Θέτουμε
$$A_r = \{x \in X : dist(x,A) < r\}, \quad r > 0.$$
(i) Νδο A_r ανοιχτό και $diam(A_r) \leq diam(A) + 2r$.

(ii) Να εξετάσετε αν ισχύει η ισότητα (α) σε τυχαίο μχ., και (β) σε δ.χ. με νόρμα.

Απόδ.

(i) Παρατηρούμε ότι:
$$x \in A_r \Rightarrow dist(x,A) = \inf\{\rho(x,a) : a \in A\} < r \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \exists\, a \in A : dist(x,A) \leq \rho(x,a) < r$$
$$\Rightarrow \exists\, a \in A : x \in B(a,r) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x \in \bigcup_{a\in A} B(a,r).$$
Άρα $A_r \subseteq \bigcup_{a\in A} B(a,r)$. Επίσης:
$$x \in \bigcup_{a\in A} B(a,r) \Rightarrow \exists\, a \in A : x \in B(a,r) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \exists\, a \in A : \rho(x,a) < r \Rightarrow$$
$$\Rightarrow dist(x,A) \leq \rho(x,a) < r \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x \in A_r.$$
Άρα $\bigcup_{a\in A} B(a,r) \subseteq A_r$. Επομένως, $A_r = \bigcup_{a\in A} B(a,r)$ είναι ανοιχτό, σαν ένωση ανοιχτών.

Έστω τώρα $x,y \in A_r$. Τότε $\exists\, a,b \in A : x \in B(a,r)$ και $y \in B(b,r)$. Οπότε:
$$\rho(x,y) \leq \rho(x,a) + \rho(a,b) + \rho(b,y)$$
$$\leq r + diam(A) + r = diam(A) + 2r.$$
Παίρνοντας τώρα το sup των $\rho(x,y)$, έχουμε
$$diam(A_r) \leq diam(A) + 2r.$$

(ii) Έστω (X,ρ) διακριτός μχ, $\emptyset \neq A \subseteq X$. Τότε, $\forall r>0$:
$\operatorname{diam}A = 1$ και $\operatorname{diam}A_r = 1 \neq 1+2r$.

Έστω τώρα $(E, \|\ \|)$ δχ. με νόρμα και d η επαγόμενη μετρική. Έστω και $\emptyset \neq A \subseteq X$, φραγμένο. Αν το A είναι μονοσύνολο $A=\{a\} \Rightarrow A_r = B(a,r)$ και το αποτέλεσμα είναι τετριμμένο. Έστω λοιπόν ότι $|A| \geq 2$, και $x,y \in A$ με $x \neq y \Rightarrow \operatorname{diam}(A) \geq d(x,y) = \varepsilon > 0$. Τότε $\exists$ ακολουθίες $(x_n), (y_n) \subseteq A$:

$$d(x_n,y_n) \to \operatorname{diam}(A) = \sup\{d(a,b) : a,b \in A\} > 0,$$

άρα μπορούμε να θεωρούμε μόνο $d(x_n,y_n) > 0$.

Θέτουμε:

$$z_n = x_n - \frac{(1-1/n)\cdot r}{\|y_n - x_n\|}(x_n - y_n), \quad \text{και}$$

$$w_n = y_n + \frac{(1-1/n)\cdot r}{\|y_n - x_n\|}\cdot(x_n - y_n).$$

Τότε: $d(z_n,x_n) = \|z_n - x_n\| = \left\| \frac{(1-1/n)\cdot r}{\|y_n - x_n\|}\cdot(x_n-y_n)\right\| =$

$$= (1-1/n)\cdot r < r \Rightarrow z_n \in A_r$$

Παρόμοια, $d(w_n,y_n) = \|w_n - y_n\| = (1-1/n)\cdot r < r \Rightarrow w_n \in A_r$.

Επίσης:

$$d(w_n,z_n) = \|w_n - z_n\| = \left\| y_n - x_n + 2(1-1/n)\cdot r\cdot \frac{y_n - x_n}{\|y_n - x_n\|}\right\| =$$

$$= \|y_n - x_n\|\cdot\left(1 + 2(1-1/n)\cdot r\cdot\frac{1}{\|y_n-x_n\|}\right) =$$

$$= \|y_n - x_n\| + 2(1-1/n)\cdot r \to \operatorname{diam}(A) + 2r.$$

Άρα $\operatorname{diam}(A_r) = \operatorname{diam}(A) + 2r$.

Άσκ. 6

(X,ρ) μχ, $\emptyset \neq A, B \subseteq X$ φραγμένα. Νδο:

$dist(A,B) = dist(\bar{A}, \bar{B})$.

Απόδ.

$A \subseteq \bar{A}$, $B \subseteq \bar{B} \Rightarrow dist(\bar{A}, \bar{B}) \leq dist(A,B)$

Για το αντίστροφο, έστω $x \in \bar{A}$, $y \in \bar{B}$ και $\varepsilon > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists a \in A, b \in B: \rho(x,a) < \varepsilon/2, \rho(y,b) < \varepsilon/2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \rho(a,b) \leq \rho(a,x) + \rho(x,y) + \rho(y,b) < \rho(x,y) + \varepsilon \Rightarrow$

$\Rightarrow dist(A,B) \leq \rho(x,y) + \varepsilon$ (για τυχαίο $\varepsilon > 0$) $\Rightarrow$

$\Rightarrow dist(A,B) \leq \rho(x,y)$ ($\forall x \in \bar{A}, y \in \bar{B}$) $\Rightarrow$

$\Rightarrow dist(A,B) \leq dist(\bar{A}, \bar{B})$.

Άσκ. 7

(X,ρ), (Y,σ) μχ, $f:(X,\rho) \to (Y,\sigma)$ συνεχής. Νδο $\forall A \subseteq X$:

(i) $diam(A) = diam(\bar{A})$

(ii) $diam(f(A)) = diam(f(\bar{A}))$.

Απόδ

(i) $A \subseteq \bar{A} \Rightarrow diam(A) \leq diam(\bar{A})$. Για το αντίστροφο, αν $x, y \in \bar{A} \Rightarrow \exists (x_n), (y_n) \subseteq A: x_n \to x, y_n \to y \Rightarrow$

$\Rightarrow diam(A) \geq \rho(x_n, y_n) \to \rho(x,y) \Rightarrow$

$\Rightarrow diam(A) \geq \rho(x,y)$ (για τυχαία $x, y \in \bar{A}$) $\Rightarrow$

$\Rightarrow diam(A) \geq diam(\bar{A})$.

(ii) $f(A) \subseteq f(\bar{A})$ και από την συνέχεια της f, $f(\bar{A}) \subseteq \overline{f(A)}$.

$\Rightarrow diam(f(A)) \leq diam(f(\bar{A})) \leq diam(\overline{f(A)}) \overset{(i)}{=} diam(f(A)) \Rightarrow$

$\Rightarrow diam(f(A)) = diam(f(\bar{A}))$.

Ασκ. 8.

Έστω $f:(X,\rho)\longrightarrow(Y,\sigma)$ ομοιομ. συνεχής. $\forall\, y\in Y$, θέτουμε
$A_y = f^{-1}(\{y\})$.

Νδο $y\neq y' \Rightarrow \operatorname{dist}(A_y, A_{y'})>0$.

Απόδ.

Έστω $y,y'\in Y$ με $y\neq y' \Rightarrow \sigma(y,y')=\varepsilon>0$.

f ο.σ $\Rightarrow \exists\, \delta>0 : \forall x, x'\in X$ με $\rho(x,x')<\delta$, ισχύει
$\sigma(f(x), f(x'))<\varepsilon$.

Έστω προς άτοπο ότι $\operatorname{dist}(A_y, A_{y'})=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists\, (x_n)\subseteq A_y$ και $(x_n')\subseteq A_{y'}$:
$\rho(x_n, x_n') \longrightarrow \operatorname{dist}(A_y, A_{y'})=0$.

$\Rightarrow$ για το ανωτέρω $\delta>0$ $\exists\, n_0\in\mathbb{N} : \forall n\geq n_0$
$\rho(x_n, x_n')<\delta$

απ' όπου προκύπτει $\sigma(f(x_n), f(x_n'))<\varepsilon$. Όμως:
$f(x_n)=y$, $f(x_n')=y'$, άρα $\sigma(f(x_n), f(x_n'))=\sigma(y,y')=\varepsilon$,
άτοπο.