ΜΕΤΡΙΚΗ – ΓΙΝΟΜΕΝΟ

Υπενθύμιση: $(X_1,d_1),\dots,(X_n,d_k)$ μχ, $X=\prod_{i=1}^{k} X_i$ το καρτεσιανό γινόμενο των X_i. Μια μετρική $d: X \to \mathbb{R}$ λέγεται μετρική-γινόμενο, αν για κάθε ακολουθία $(x_n)\subseteq X$ και κάθε $x\in X$, ισχύει η ισοδυναμία:

$$x_n \xrightarrow{d} x \iff x_n(i) \xrightarrow{d_i} x(i) \in X_i, \ \forall i\in I$$

Ασκ. Αν $(X_1,d_1),\dots,(X_k,d_k)$ μχ., νδο οι παρακάτω συναρτήσεις είναι μετρικές-γινόμενο στον $X=\prod_{i=1}^{k} X_i$.

(1) $d_\infty(x,y)=\max\{d_i(x(i),y(i)) : i=1,\dots,k\}$

(2) $d_p(x,y)=\left(\sum_{i=1}^{k} d_i(x(i),y(i))^p\right)^{1/p}$, $\quad 1\le p<\infty$.

Απάντ.

(1) Η d_∞ είναι μετρική:

κάθε $d_i(x(i),y(i))$ είναι ≥ 0, άρα και το max.

Αν $d_\infty(x,y)=0$, το max των $d_i(x(i),y(i))$ είναι 0, άρα $d_i(x(i),y(i))=0 \ \forall i \Rightarrow x(i)=y(i) \ \forall i \Rightarrow$
$\Rightarrow x=y$.

Για την τριγωνική ανισότητα:

$x,y\in X \ \exists\, i_0\in\{1,2,\dots,k\}$:

$$d_\infty(x,y)=\max\{d_i(x(i),y(i)) : i=1,\dots,k\}=d_{i_0}(x(i_0),y(i_0)).$$

Άρα, για τυχαία $x,y,z\in X$:

$$d_\infty(x,y)=d_{i_0}(x(i_0),y(i_0))\le d_{i_0}(x(i_0),z(i_0))+d_{i_0}(z(i_0),y(i_0))\le$$
$$\le \max\{d_i(x(i),z(i)) : i=1,\dots,k\}+$$
$$+\max\{d_i(z(i),y(i)) : i=1,\dots,k\}$$
$$=d_\infty(x,z)+d_\infty(z,y).$$

Η d_∞ είναι μετρική - γνώριμο:

Έστω $x_n \xrightarrow{d_\infty} x \in X$. Τότε $\forall i \in \{1, \dots, k\}$:

$$0 \leq d_i(x_n(i), x(i)) \leq \max\{d_i(x_n(i), x(i)) : i = 1, \dots, n\} = d_\infty(x_n, x) \Rightarrow$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$0 \qquad\qquad 0$$

$\Rightarrow d_i(x_n(i), x(i)) \to 0$ (από ισοσυγκλίνουσες)

$\Rightarrow x_n(i) \xrightarrow{d_i} x(i) \quad \forall i$

Έστω $\forall i = 1, \dots, k$: $x_n(i) \xrightarrow{d_i} x(i) \Rightarrow$

$$0 \leq d_\infty(x_n, x) \leq \sum d_i(x_n(i), x(i)) \Rightarrow$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$0 \qquad\qquad 0$$

$\Rightarrow d_\infty(x_n, x) \to 0 \Rightarrow x_n \xrightarrow{d_\infty} x$.

(2) Η d_p είναι μετρική $\forall p \geq 1$:

Προφανώς $d_p(x,y) \geq 0$.

Αν $d_p(x,y) = 0 \Rightarrow \sum d_i(x(i), y(i))^p = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow d_i(x(i), y(i)) = 0 \ \forall i \Rightarrow x(i) = y(i) \ \forall i \Rightarrow$

$\Rightarrow x = y$.

Για την τριγωνική ανισότητα: $\forall x, y, z \in X$

$$d_p(x,y) = \left[\sum_i (d_i(x(i), y(i))^p\right]^{1/p} \leq$$

$$\leq \left[\sum_i (d_i(x(i), z(i)) + d_i(z(i), y(i)))^p\right]^{1/p} \leq$$

$$\leq \left[\sum_i (d_i(x(i), z(i)))^p\right]^{1/p} + \left[\sum_i (d_i(z(i), y(i)))^p\right]^{1/p}$$

ανισ. Minkowski

Η d_p είναι μετρική-γινόμενο:

Εστω $x_n \xrightarrow{d_p} x \Rightarrow d_p(x_n, x) \to 0 \Rightarrow \forall i$

$$0 \leq d_i(x_n(i), x(i))^p \leq \sum_i d_i(x_n(i), x(i)) \Rightarrow$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$0 \qquad\qquad 0$$

$\Rightarrow \forall i \quad d_i(x_n(i), x(i)) \to 0 \Rightarrow x_n(i) \xrightarrow{d_i} x(i),\ \forall i.$

Εστω ότι $\forall i : x_n(i) \xrightarrow{d_i} x(i) \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall i : (d_i(x_n(i), x(i)))^p \to 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow d_p(x_n, x) = \left[\sum d_i(x_n(i), x(i))^p\right]^{1/p} \to 0$

$\Rightarrow x_n \xrightarrow{d_p} x.$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ. Εφαρμόζοντας τα προηγούμενα στους χώρους $(X_i, d_i) \equiv (\mathbb{R}, \rho_{|\,|})$, $\forall i = 1, \dots, k$, παίρνουμε ότι οι μετρικές στο $\mathbb{R}^k$ που προέρχονται από τις νόρμες $\|\ \|_\infty$ και $\|\ \|_p$, $1 \leq p < \infty$ είναι μετρικές-γινόμενο.

ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΕΩΝ.

ΑΣΚ 1 (X,ρ) μχ., $x_0 \in X$. ΝΔο η απεικόνιση

$$g: X \to \mathbb{R}: \ g(x) = \rho(x, x_0)$$

είναι συνεχής.

Απόδ. Εστω $y_0 \in X$, και $\varepsilon > 0$. Θέτουμε $\delta := \varepsilon > 0$.
Τότε $\forall y \in X$ με $\rho(y, y_0) < \delta$ είναι:

$$|g(y) - g(y_0)| = |\rho(y, x_0) - \rho(y_0, x_0)| \leq$$
$$\leq \rho(y, y_0) < \varepsilon.$$

ΑΣΚ 2 Εστω (x_n) ακολουθία στον μχ (X,ρ).
Υποθέτουμε ότι $\exists\, x_0 \in X$: $\forall f: X \to \mathbb{R}$ συνεχή, ισχύει
$f(x_n) \to f(x)$. ΝΔο $x_n \to x$.

Απόδ. Η g της προηγ. Ασκ 1, είναι μια απο τις f
της υπόθεσης. Αρα $g(x_n) \to g(x_0) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \rho(x_n, x_0) \to \rho(x_0, x_0) = 0 \Rightarrow x_n \to x_0.$$

ΑΣΚ 3 (X,ρ) μχ και $d: X \times X \to \mathbb{R}$ μετρική-γινόμενο.
ΝΔο $\rho: (X \times X, d) \to (\mathbb{R}, \rho_{||})$ συνεχής.

Απόδ. Με την Αρχή Μεταφοράς: Εστω $((x_n, y_n)) \subseteq X \times X$
με $(x_n, y_n) \xrightarrow{d} (x, y) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x_n \xrightarrow{\rho} x \\ y_n \xrightarrow{\rho} y \end{array}\right\} \Rightarrow \text{(από γνωστή Πρόταση)}$$

$$\Rightarrow \rho(x_n, y_n) \to \rho(x, y).$$

ΜΠΑΛΛΕΣ

Ασκ 1. (X,ρ) μχ, $\emptyset \neq A \subseteq X$. Είναι ισοδύναμα:

(i) A φραγμένο

(ii) $\exists\, a_0 \in A$ και $r>0$: $A \subseteq B(a_0, r)$.

(iii) $\exists\, x_0 \in X$ και $s>0$: $A \subseteq B(x_0, s)$.

(iv) $\forall\, x \in X \ \exists\, t>0$: $A \subseteq B(x, t)$.

Αποδ (i ⇒ ii). Εξ ορισμού: A φραγμένο $\Leftrightarrow$ $\operatorname{diam} A = \sup\{\rho(a,b) : a, b \in A\} < \infty$.

Έστω A φραγμ. και $a_0 \in A$, τυχαίο. Παίρνουμε $r = \operatorname{diam} A + 1 > 0$. Τότε:

$$\forall a \in A: \ \rho(a, a_0) \leq \operatorname{diam} A < r \Rightarrow$$

$$\forall a \in A: \ a \in B(a_0, r) \Rightarrow A \subseteq B(a_0, r).$$

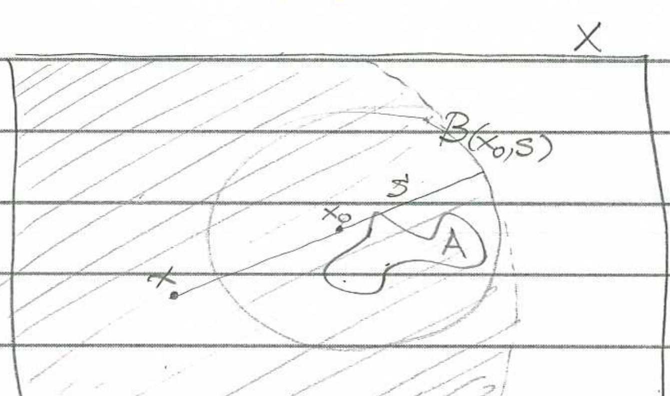
(ii ⇒ iii) Προφανές, για $x_0 = a_0$.

(iii ⇒ iv) Έστω $x_0 \in X$ και $s>0$, όπως στην υπόθ. (iii). Θεωρούμε τυχαίο $x \in X$ και θέτουμε $t = s + \rho(x, x_0)$.

Τότε: $\forall a \in A$ $\rho(a,x) \leq \rho(a, x_0) + \rho(x, x_0) <$

$$< s + \rho(x, x_0) = t \Rightarrow$$

$\Rightarrow \forall a \in A: \ a \in B(x,t) \Rightarrow A \subseteq B(x,t)$.



(iv ⇒ i) Παίρνουμε τυχαίο $x \in X$ και το αντίστοιχο $t>0 \Rightarrow$

$\forall a, b \in A: \ \rho(a,b) \leq \rho(a,x) + \rho(x,b) < 2t$.

Ασκ 2 (X,ρ) μχ., $x_0 \in X$, $r>0$.

(i) Νδο $\operatorname{diam} B(x_0,r) \le 2r$.

(ii) Ισχύει η ισότητα;

(iii) Νδο σε δ.χ. με νόρμα, ισχύει.

Απάντ.

(i) $\forall\, y,z \in B(x_0,r)$: $\rho(y,z) \le \rho(y,x)+\rho(x,z) < r+r=2r$.

(ii) Όχι πάντοτε:

(X,δ) διακριτός μχ, $x_0 \in X$, $r=1/2 \Rightarrow$

$\Rightarrow B(x_0,1/2)=\{x_0\}$ και $\operatorname{diam}\{x_0\}=0 \neq 2r=1$.

(X,δ) διακριτός μχ, $x_0 \in X$, $r=3/2 \Rightarrow$

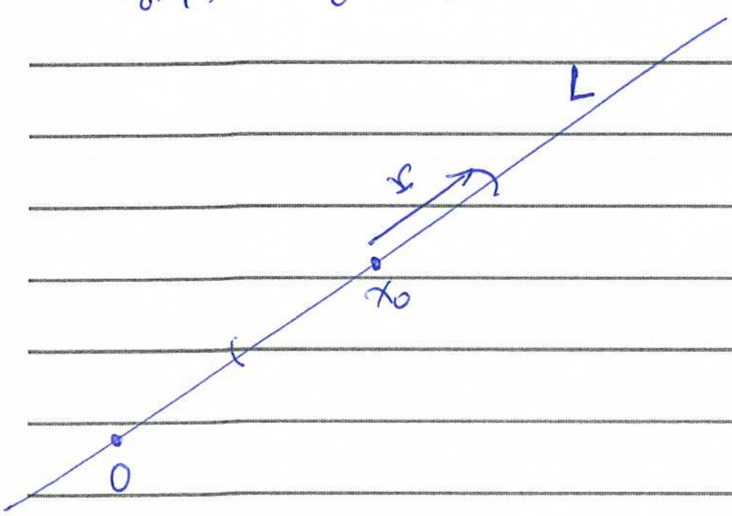
$\Rightarrow B(x_0,3/2)=X$ και $\operatorname{diam} X = 1 \neq 2r=3$.

$(A=[0,2] \subseteq \mathbb{R}, \rho_A)$, $x_0=3/2$, $r=1>0 \Rightarrow$

$\Rightarrow B(x_0,1)=(1/2,2]$ και $\operatorname{diam}(1/2,2] = 3/2 \neq 2r=2$.

(iii) Έστω $(E,\|\,\|)$ δχ με νόρμα και d η επαγόμενη μετρική. Θεωρούμε $x_0 \neq 0$, $r>0$ και την $B(x_0,r)$. Θ.δ.ο $\operatorname{diam} B(x_0,r) = 2r$.

Παρατηρούμε ότι $\forall\, y \in L=\{\lambda x_0 : \lambda \in \mathbb{R}\} \le E$: $d(x_0,y)=\|x_0-\lambda x_0\| = |1-\lambda| \cdot \|x_0\|$. Άρα:



$\underbrace{y}_{=\lambda x_0} \in L \cap B(x_0,r) \Leftrightarrow$

$|1-\lambda| \cdot \|x_0\| < r \Leftrightarrow$

$-r/\|x_0\| < |\lambda-1| < r/\|x_0\| \Leftrightarrow$

$\underbrace{1-r/\|x_0\| < \lambda < 1+r/\|x_0\|}_{(\text{στο } \mathbb{R})}$.

Στο $\mathbb{R}$ θεωρούμε τις ακολουθίες

$\lambda_n = 1 + \frac{r}{\|x_0\|}(1 - 1/n)$, όπου $(\lambda_n)\uparrow$ και $\lambda_n \to 1 + \frac{r}{\|x_0\|}$

και

$\mu_n = 1 - \frac{r}{\|x_0\|}(1 - 1/n)$, όπου $(\mu_n)\downarrow$ και $\mu_n \to 1 - \frac{r}{\|x_0\|}$.

Θέτοντας $y_n = \lambda_n x_0$ και $z_n = \mu_n x_0$ παίρνουμε $y_n, z_n \in B(x_0, r)$ με

$d(y_n, z_n) = \|y_n - z_n\| = \|x_0\| \cdot |\lambda_n - \mu_n| =$

$= \|x_0\| \cdot \left| 2 \frac{r}{\|x_0\|}(1 - 1/n) \right| = 2r\,|1 - 1/n| \to 2r$.

Άρα έχουμε ότι το $2r$ είναι άνω φράγμα των αποστάσεων $d(y,z)$ με $y, z \in B(x_0, r)$ (από το (i)) και είναι και όριο μιας ακολουθίας $d(y_n, z_n)$, επομένως συμπίπτει με το sup αυτών των αποστάσεων, δηλ. με το diam $B(x_0, r)$.

ΑΣΚ.3 (X,ρ) μ.χ., $x\in X$, $\varepsilon>0$.

(1) Να εξετάσετε αν ισχύει η ισότητα
$$\overline{B(x,\varepsilon)} = \hat{B}(x,\varepsilon).$$
(2) Ομοίως, σε δ.χ. με νόρμα.

Απάντ.

(1). Η κλειστή μπάλλα $\hat{B}(x,\varepsilon)$ είναι κλειστό σύνολο και $B(x,\varepsilon) \subseteq \hat{B}(x,\varepsilon) \Rightarrow \overline{B(x,\varepsilon)} \subseteq \hat{B}(x,\varepsilon)$.

Όμως η ισότητα δεν ισχύει πάντα:

(X,δ) διακριτός μχ. με $|X|\geq 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall x\in X$: $B(x,1) = \{x\}$ = κλειστό $\Rightarrow \overline{B(x,1)} = \{x\}$, ενώ
$\hat{B}(x,1) = \{y\in X : \rho(x,y)\leq 1\} = X \neq \{x\}$.

(2) Έστω $(E,\|\ \|)$ δχ με νόρμα και d η αντίστοιχη μετρική. Θδο ισχύει και ο εγκλεισμός $\hat{B}(x,\varepsilon) \subseteq \overline{B(x,\varepsilon)}$.

Γνωρίζουμε ότι $\hat{B}(x,\varepsilon) = B(x,\varepsilon)\cup S(x,\varepsilon)$. Επειδή $B(x,\varepsilon)\subseteq \overline{B(x,\varepsilon)}$, αρκεί νδο $S(x,\varepsilon)\subseteq\overline{B(x,\varepsilon)}$.

Έστω $y\in S(x,\varepsilon) \Rightarrow \|y-x\| = \varepsilon$.

Θέτουμε $t_n = 1-1/n \to 1$ και $y_n := x + t_n(y-x)$.

Τότε:

$\|y_n - x\| = \|x+t_n(y-x)-x\| = |t_n|\cdot\|y-x\| = (1-1/n)\cdot\varepsilon < \varepsilon \Rightarrow$

$\Rightarrow y_n \in B(x,\varepsilon)$

$\|y_n - y\| = \|x+t_n(y-x)-y\| = \|x(1-t_n)+(t_n-1)y\| =$

$= \|(1-t_n)\cdot(y-x)\| = (1-t_n)\cdot\|y-x\| = (1-t_n)\cdot\varepsilon \to 0.$

$\Rightarrow y\in\overline{B(x,\varepsilon)}$.

Ασκ. 4 (X,ρ) μχ, $A \subseteq X$ ανοιχτό, $(x_n) \subseteq X$: $x_n \to x \in A$.
Νδο $\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \quad B(x_n, 1/n) \subseteq A$.

Απόδ.

$x \in A$ = ανοιχτό $\Rightarrow \exists \varepsilon > 0 : B(x,\varepsilon) \subseteq A$.

$\exists n_1 \in \mathbb{N} : 1/n_1 < \varepsilon/2$.

$\exists n_2 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_2 : x_n \in B(x, \varepsilon/2)$.

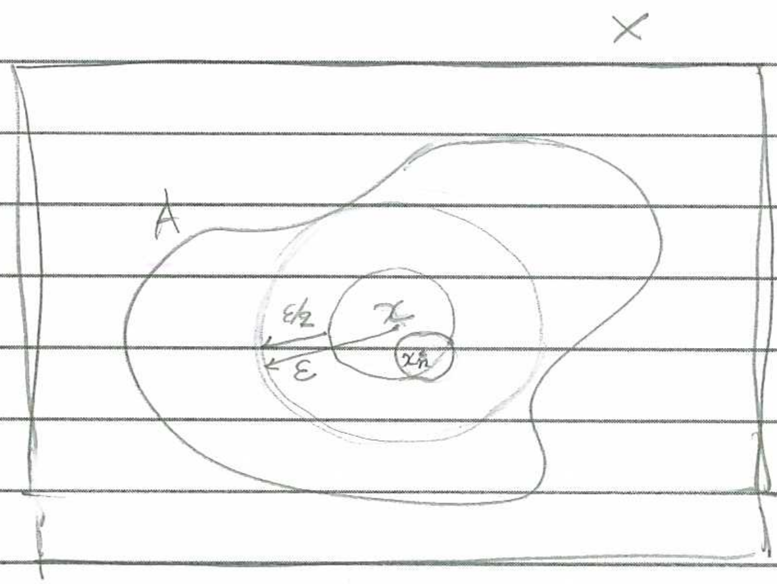
Θέτουμε $n_0 = \max\{n_1, n_2\} \in \mathbb{N}$. Τότε $\forall n \geq n_0$:

$1/n < 1/n_1 < \varepsilon/2$, και

$B(x_n, 1/n) \subseteq B(x,\varepsilon) \subseteq A$.

Πράγματι:

$y \in B(x_n, 1/n) \Rightarrow \rho(x,y) \leq \rho(x,x_n) + \rho(x_n,y) <$
$< \varepsilon/2 + 1/n < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$.



Ασκ. 5 (X,ρ) μ.χ., $y_1, y_2, \dots, y_m \in X$ με $y_i \neq y_j$ $\forall i \neq j$.
ΝΔο $\exists$ $G_1, \dots, G_m \subseteq X$ ανοιχτά, ξένα ανά δύο:
$$y_i \in G_i \,,\ \forall i = 1, 2, \dots, m.$$

Αποδ. Θέτουμε
$$\varepsilon = \min\{\rho(y_i, y_j) \mid i, j \in \{1, \dots, m\} \text{ με } i \neq j\}.$$
και
$$G_i = B(y_i, \varepsilon/2), \qquad \forall i = 1, \dots, m.$$
Τότε τα G_i είναι ανοιχτά, με $y_i \in G_i$ $\forall i$, και είναι ανά δύο ξένα:
$$x \in G_i \cap G_j \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \rho(y_i, y_j) \leq \rho(y_i, x) + \rho(x, y_j) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon,$$
άτοπο.