Πραγματική Ανάλυση

Εργασία εαρινού εξαμήνου 2024

1. Θεωρούμε το μετρικό χώρο $\mathbb{R}$ με τη συνήθη μετρική. Για καθεμιά από τις παρακάτω σχέσεις, δώστε παράδειγμα άπειρου υποσυνόλου A του $\mathbb{R}$ που την ικανοποιεί. Όπου είναι δυνατόν, βρείτε $A \neq \mathbb{R}$:

(α1) $A' = \emptyset$.

(α2) $A = A'$.

(α3) $A \cap A' = \emptyset$ και $A' \neq \emptyset$.

(α4) $A' \subsetneqq A$ και $A' \neq \emptyset$.

(α5) $A \subsetneqq A'$.

(β1) $\mathrm{bd}(A) = \emptyset$.

(β2) $A = \mathrm{bd}(A)$.

(β3) $A \cap \mathrm{bd}(A) = \emptyset$.

(β4) $\mathrm{bd}(A) \subsetneqq A$.

(β5) $A \subsetneqq \mathrm{bd}(A)$.

2. Έστω (X, d) μετρικός χώρος και $A \subseteq X$. Ποιες από τις συνθήκες (α1) - (α5) και (β1) - (β5) της προηγούμενης άσκησης εξασφαλίζουν ότι (i) το A είναι κλειστό, (ii) το A δεν είναι κλειστό, (iii) το A είναι ανοικτό;

3. Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος.
(α) Έστω $A \subseteq X$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, θέτουμε

$$U_n = \bigcup_{x \in A} B\left(x, \frac{1}{n}\right).$$

(i) Αποδείξτε ότι, για κάθε n, $U_n = \left\{z \in X : d(z, A) < \frac{1}{n}\right\}$.

(ii) Αποδείξτε ότι $\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n = \overline{A}$.

(β) Αποδείξτε ότι κάθε κλειστό υποσύνολο του X είναι G_δ σύνολο.

4. (α) Έστω X μετρικός χώρος και $A \subseteq X$. Αποδείξτε ότι, αν το $x \in X$ είναι σημείο συσσώρευσης του A, τότε υπάρχει ακολουθία διαφορετικών ανά δύο σημείων του A, η οποία συγκλίνει στο x.

(β) Δώστε παράδειγμα φραγμένης ακολουθίας (x_n) στο $\mathbb{R}$, με την ιδιότητα: Το σύνολο $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ έχει ακριβώς ένα σημείο συσσώρευσης, αλλά η ακολουθία (x_n) δεν συγκλίνει.

(γ) Αν το A είναι υποσύνολο ενός μετρικού χώρου X, δείξτε με κατάλληλα αντιπαραδείγματα ότι κανένας από τους εγκλεισμούς $(\overline{A})^\circ \subseteq \overline{A^\circ}$ και $\overline{A^\circ} \subseteq (\overline{A})^\circ$ δεν ισχύει κατ' ανάγκη.

5. (α) Έστω X σύνολο και δ η διακριτή μετρική στο X. Αν (Y,d) τυχών μετρικός χώρος, αποδείξτε ότι κάθε απεικόνιση $f:(X,\delta)\to Y$ είναι ομοιόμορφα συνεχής.

(β) Αποδείξτε ότι η ταυτοτική απεικόνιση $I:(\mathbb{R},\delta)\to(\mathbb{R},|\cdot|)$ δεν είναι Lipschitz συνεχής.

(γ) Αποδείξτε ότι δεν υπάρχει συνεχής 1-1 συνάρτηση $g:\mathbb{Q}\to\mathbb{N}$, όπου $\mathbb{Q}$ το σύνολο των ρητών με τον περιορισμό της συνήθους μετρικής του $\mathbb{R}$.

6. Θεωρούμε τα σύνολα $\mathbb{N}$, $A=\left\{\frac{1}{n}\mid n\in\mathbb{N}\right\}$ και $B=\left\{0\right\}\cup\left\{\frac{1}{n}\mid n\in\mathbb{N}\right\}$ ως υποχώρους του $\mathbb{R}$ με τη συνήθη μετρική.

(α) Εξετάστε ποιοι από τους μετρικούς χώρους $(\mathbb{N},|\cdot|)$, $(A,|\cdot|)$ και $(B,|\cdot|)$ είναι μεταξύ τους ομοιομορφικοί.

(β) Εξετάστε ποιοι από τους παραπάνω μετρικούς χώρους είναι πλήρεις.

7. Θεωρούμε τη συνάρτηση $\rho:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ με $\rho(x,y)=|e^x-e^y|$.

(α) Αποδείξτε ότι ρ είναι μετρική στο $\mathbb{R}$, ισοδύναμη με τη συνήθη.

(β) Αποδείξτε ότι ο μετρικός χώρος $(\mathbb{R},\rho)$ δεν είναι πλήρης.

(γ) Εξετάστε αν υπάρχει ακολουθία (G_n) ρ - ανοικτών και ρ - πυκνών υποσυνόλων του $\mathbb{R}$ με $\bigcap_{n=1}^{\infty}G_n=\emptyset$.

8. (α) Έστω $(X,||\cdot||)$ χώρος με νόρμα και Y ένας γνήσιος γραμμικός υπόχωρος του X. Αποδείξτε ότι το σύνολο $D=X\setminus Y$ είναι πυκνό στον X.

(β) Έστω $(X,||\cdot||)$ χώρος Banach (δηλαδή πλήρης χώρος με νόρμα). Αποδείξτε ότι ο X δεν μπορεί να γραφεί ως ένωση μιας ακολουθίας (Y_n) γνήσιων κλειστών υποχώρων του.

9. Έστω (X,d) μετρικός χώρος με την εξής ιδιότητα: Κάθε κλειστό υποσύνολο F του X με $\mathrm{diam}(F)\le 1$ είναι συμπαγές.

(α) Δείξτε ότι ο (X,d) είναι πλήρης.

(β) Είναι σωστό ότι κάθε κλειστό και φραγμένο υποσύνολο του X είναι συμπαγές; (*Υπόδειξη*: Θεωρήστε ένα άπειρο σύνολο X εφοδιασμένο με μια παραλλαγή της διακριτής μετρικής.)

10. (α) Αποδείξτε ότι κάθε φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ είναι ολικά φραγμένο.

(β) Βρείτε μια ισοδύναμη μετρική στο $\mathbb{R}$ ώστε ο $(\mathbb{R},d)$ να είναι ολικά φραγμένος.

(γ) Αν η μετρική d του $\mathbb{R}$ είναι όπως στο ερώτημα (β), αποδείξτε ότι ο $(\mathbb{R},d)$ δεν θα είναι πλήρης.

11. Δίνονται τα κλειστά διαστήματα $I=[0,1]$ και $J=[3,4]$. Βρείτε τον τύπο της συνάρτησης Urysohn που διαχωρίζει τα I, J και σχεδιάστε τη γραφική της παράσταση.

12. Θεωρούμε την ακολουθία συναρτήσεων $f_n:[0,+\infty\to\mathbb{R}$, με

$$f_n(x)=nx^2e^{-\sqrt{n}x},\ \ x\in[0,+\infty),\ n\in\mathbb{N}.$$

Αποδείξτε ότι η (f_n) συγκλίνει κατά σημείο στη συνάρτηση $f \equiv 0$. Αποδείξτε ότι η σύγκλιση της (f_n) στην f δεν είναι ομοιόμορφη στο $[0, +\infty)$, αλλά, για κάθε $a > 0$, η (f_n) συγκλίνει ομοιόμορφα στην f στο διάστημα $[a, +\infty)$.

13. Δίνεται μια ακολουθία αριθμών (a_n). Ορίζουμε την ακολουθία συναρτήσεων $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ ως εξής: Για κάθε $n = 1, 2, \ldots,$

$$f_n(x) = \begin{cases} a_n & \text{αν } x \in [\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}] \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

(i) Δείξτε ότι η ακολουθία (f_n) συγκλίνει κατά σημείο σε μια συνάρτηση f και βρείτε την f.

(ii) Αποδείξτε ότι η σύγκλιση της (f_n) στην f είναι ομοιόμορφη αν και μόνο αν $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

14. Έστω $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, ακολουθία συναρτήσεων και $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f_n \to f$ ομοιόμορφα. Αν $\lim_{x\to+\infty} f(x) = b$ και, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $\lim_{x\to\infty} f_n(x) = b_n \in \mathbb{R}$, αποδείξτε ότι $\lim_{n\to\infty} b_n = b$.