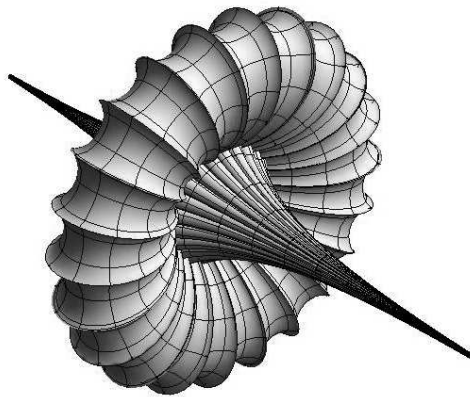


**Ε. ΒΑΣΙΛΕΙΟΥ
Μ. ΠΑΠΑΤΡΙΑΝΤΑΦΥΛΛΟΥ**

**ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ
ΔΙΑΦΟΡΙΚΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ
ΚΑΜΠΥΛΩΝ ΚΑΙ ΕΠΙΦΑΝΕΙΩΝ**



**ΑΘΗΝΑ 2010
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ**

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ
ΔΙΑΦΟΡΙΚΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ
ΚΑΜΠΥΛΩΝ ΚΑΙ ΕΠΙΦΑΝΕΙΩΝ

Οι σημειώσεις αυτές είναι αναρτημένες και στις προσωπικές ιστοσελίδες των συγγραφέων:

<http://www.math.uoa.gr/~evassil>

<http://www.math.uoa.gr/~mpapatr>

Απαγορεύεται ρητώς η καθ' οιονδήποτε τρόπον εμπορική τους εκμετάλλευση.

COPYRIGHT © 2010 by E. Vassiliou - M. Papatriantafillou
evassil@math.uoa.gr, mpapatr@math.uoa.gr

All rights reserved

Πρόλογος

Αλλά πόσο σφρίγος, ζωτικής σημασίας για τη μαθηματική επιστήμη, θα χάνονταν με το ξερίζωμα της γεωμετρίας και της μαθηματικής φυσικής.

Από την ομιλία του D. Hilbert στο 2^ο Διεθνές Συνέδριο Μαθηματικών, Παρίσι 1900 (βλ. C. REID [16, σελ. 170])

Οι σημειώσεις αυτές προορίζονται να καλύψουν τις άμεσες διδακτικές ανάγκες του μαθήματος της Διαφορικής Γεωμετρίας των Καμπυλών και Επιφανειών, η οποία διδάσκεται στο Τμήμα Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Αθηνών στο Στ' εξαήμερο σπουδών.

Λόγω της απόφασης του Τμήματος να περιοριστεί η διδασκαλία του υποχρεωτικού (προπτυχιακού) μαθήματος της Διαφορικής Γεωμετρίας σε ένα μόνον εξάμηνο, η ύλη έχει κι αυτή περιοριστεί, κατ' ανάγκην, στην παρουσίαση αποκλειστικά στοιχειωδών θεμάτων της τοπικής θεωρίας των καμπυλών και επιφανειών. Έτσι, ακόμη και τα απλούστερα αποτελέσματα της λεγόμενης Ολικής Διαφορικής Γεωμετρίας έχουν παραλειφθεί. Παρ' όλ' αυτά, η παρούσα επιλογή της ύλης επιτρέπει στους φοιτητές μας να αποκτήσουν μία πρώτη γνωριμία με μερικές θεμελιώδεις έννοιες αυτού του σημαντικού κλάδου των μαθηματικών, και να διαπιστώσουν με πόσο γόνιμο τρόπο η Διαφορική Γεωμετρία συνδέεται με την Ανάλυση και την Άλγεβρα.

Τα σχήματα των σημειώσεων είχε την ευγενή καλοσύνη να φιλοτεχνήσει, με ιδιαίτερη δεξιοτεχνία και υπομονή ο φοιτητής του Τμήματος Μαθηματικών Κώστας Θρασυβ. Παπαδόπουλος. Τον ευχαριστούμε θερμά και από τη θέση αυτή για την εξαιρετική επιμέλειά που έδειξε σ' αυτήν την επίπονη εργασία.

Ελπίζουμε ότι τα σχήματα αυτά θα συμβάλουν στην καλλίτερη κατανόηση του κειμένου.

Για τη διευκόλυνση του αναγνώστη, στο τέλος κάθε κεφαλαίου παραθέτουμε μία σειρά χαρακτηριστικών ασκήσεων με λεπτομερείς λύσεις. Θα ωφεληθεί πολύ αν επιχειρήσει να τις λύσει μόνος του, και κατόπιν να συμβουλευτεί τις προτεινόμενες λύσεις. Επίσης, σε σχετικό παράρτημα, υπενθυμίζουμε μερικές βασικές έννοιες και αποτελέσματα από τον Διαφορικό Λογισμό διανυσματικών συναρτήσεων πολλών μεταβλητών. Τονίζουμε κυρίως τη γραμμικότητα του (σημειακού) διαφορικού, η οποία παρέχει έναν ουσιώδη μηχανισμό για την κατανόηση πολλών εννοιών, ιδιαίτερας της θεωρίας των Επιφανειών.

Από μια εξαιρετικά εκτεταμένη βιβλιογραφία αναφέρουμε μόνον λίγες πηγές, οι οποίες μπορούν να φανούν χρήσιμες κυρίως στους φοιτητές, που έρχονται για πρώτη φορά σε επαφή με το περιεχόμενο των σημειώσεων, αλλά και επιθυμούν να επεκταθούν σε μερικά πιο προχωρημένα θέματα. Τα βιβλία [2], [16], [17] έχουν ιστορικό περιεχόμενο.

Οι σημειώσεις, όπως είναι φυσικό, υπόκεινται σε αλλαγές και διορθώσεις. Θα είμαστε εκ των προτέρων υποχρεωμένοι σε όλους τους αναγνώστες μας, οι οποίοι θα θέσουν υπ' όψιν μας κάθε υπόδειξη που θα μπορούσε να βοηθήσει στην περαιτέρω βελτίωσή τους και στη διόρθωση λαθών.

Ε.Β. – Μ.Π.

Αθήνα, Ιανουάριος 2009.

Περιεχόμενα

| | |
|---|------------|
| Πρόλογος | v |
| 1 Διαφορίσιμες Καμπύλες | 1 |
| 1.0 Εισαγωγή | 1 |
| 1.1 Διαφορίσιμες καμπύλες | 2 |
| 1.2 Αναπαραμέτρηση καμπύλης | 7 |
| 1.3 Καμπυλότητα και στρέψη | 9 |
| 1.4 Καμπυλότητα και στρέψη τυχαίας κανονικής καμπύλης | 20 |
| 1.5 Το τρίεδρο Frenet μιας τυχαίας καμπύλης | 22 |
| 1.6 Προσανατολισμός | 24 |
| 1.7 Κανονική μορφή καμπύλης | 27 |
| 1.8 Ο εγγύτατος κύκλος | 31 |
| 1.9 Το Θεμελιώδες Θεώρημα των Καμπυλών | 34 |
| 1.10 Επίπεδες καμπύλες | 40 |
| 1.11 Ασκήσεις | 48 |
| 2 Κανονικές Επιφάνειες | 81 |
| 2.0 Εισαγωγή | 81 |
| 2.1 Βασικοί Ορισμοί | 82 |
| 2.2 Παραδείγματα | 86 |
| 2.3 Βασικές ιδιότητες | 97 |
| 2.4 Επιφάνειες εκ περιστροφής | 102 |
| 2.5 Η έννοια της διαφορισιμότητας σε επιφάνειες | 107 |
| 2.6 Ο εφαπτόμενος χώρος | 113 |
| 2.7 Το διαφορικό διαφορίσιμης απεικόνισης | 116 |
| 2.8 Ασκήσεις | 121 |
| 3 Η καμπυλότητα Gauss | 141 |
| 3.0 Εισαγωγή | 141 |
| 3.1 Κάθετα διανύσματα | 142 |
| 3.2 Η πρώτη θεμελιώδης μορφή | 145 |
| 3.3 Η απεικόνιση Gauss | 150 |

| | |
|---|------------|
| 3.4 Η δεύτερη θεμελιώδης μορφή | 154 |
| 3.5 Η καμπυλότητα μέσω των θεμελιωδών μεγεθών | 157 |
| 3.6 Γεωμετρική ερμηνεία της καμπυλότητας | 159 |
| 3.7 Ασκήσεις | 163 |
| Α΄ Διαφορικός Λογισμός | 189 |
| Βιβλιογραφία | 199 |
| Πίνακας εννοιών | 201 |

Κεφάλαιο 1

Διαφορίσιμες Καμπύλες

1.0 Εισαγωγή

Καμπύλες όπως ο κύκλος, οι κωνικές τομές, οι έλικες και οι σπείρες είχαν απασχολήσει τους αρχαίους Έλληνες. Με σχετικά προβλήματα είχαν ασχοληθεί ο Πλάτωνας, ο Μέναιχμος, ο Απολλώνιος, ο Αρχιμήδης, κ.α. Επίσης για την αντιμετώπιση των περίφημων άλυτων (με κανόνα και διαβήτη) προβλημάτων είχαν ανακαλυφθεί και μελετηθεί η κισσοειδής του Διοκλέους, η κογχοειδής του Νικομήδους και η τετραγωνίζουσα του Δεινοστράτου.

Ένα σημαντικό πρόβλημα που απασχόλησε τους Μαθηματικούς από την εποχή της αρχαιότητας, ήταν και η χάραξη της εφαπτομένης σε ένα σημείο μίας καμπύλης. Το πρόβλημα αντιμετωπίστηκε φυσικά στο πλαίσιο της γνωστής τότε (συνθετικής) Ευκλείδειας Γεωμετρίας. Οι απαντήσεις που δόθηκαν ήσαν μόνον μερικές και αφορούσαν συγκεκριμένες καμπύλες. Μια καλλίτερη προσέγγιση έγινε δυνατή στο πλαίσιο της Αναλυτικής Γεωμετρίας. Παρά τις σημαντικές προόδους που σημειώθηκαν στην κατεύθυνση αυτή από τους R. Descartes, P. Fermat και C. Huygens, και πάλι η γενική μέθοδος επίλυσης του προβλήματος σταματούσε όταν επρόκειτο να αντιμετωπιστούν εξισώσεις βαθμού ανωτέρου του 3.

Το πρόβλημα του προσδιορισμού της εφαπτομένης επιλύθηκε στη γενικότητά του με την χρήση του Διαφορικού Λογισμού, που μαζί με τον Ολοκληρωτικό Λογισμό άσκησαν τεράστια επίδραση στην εξέλιξη της μαθηματικής επιστήμης.

Η χρήση του Διαφορικού Λογισμού στη μελέτη της Γεωμετρίας οδήγησε στην δημιουργία ενός νέου κλάδου, της Διαφορικής Γεωμετρίας. Στην ανά-

πτυξη της Διαφορικής Γεωμετρίας των καμπυλών είχαν θεμελιώδη συμβολή οι I. Newton, G. W. Leibniz, L. Euler, G. Monge, J. Bernoulli, A. C. Clairaut, F. Frenet, J. A. Serret, J. Bertrand, Ch. Dupin, και πολλοί άλλοι. Μερικά άλλα σημαντικά ονόματα θα αναφερθούν στη θεωρία των επιφανειών.

Η μελέτη των καμπυλών, εκτός από το καθ' αυτό μαθηματικό ενδιαφέρον της, έχει σημαντικές εφαρμογές στη μηχανική, στη ναυσιπλοΐα, στον προσδιορισμό των τροχιών ουρανίων σωμάτων ή συστημάτων δορυφόρων, κ.α.

Εδώ θα γνωρίσουμε μερικές βασικές έννοιες και συμπεράσματα της λεγόμενης "τοπικής" θεωρίας των καμπυλών.

1.1 Διαφορίσιμες καμπύλες

Στην Αναλυτική Γεωμετρία λέγοντας καμπύλη εννοούμε ένα σύνολο X σημείων (του χώρου ή του επιπέδου) που ικανοποιούν ορισμένες συνθήκες. Για παράδειγμα, μπορεί να είναι ο *γεωμετρικός τύπος* σημείων που ικανοποιούν μια συγκεκριμένη ιδιότητα (κύκλος, έλλειψη, κλπ.), το *γράφημα* μιας συνάρτησης $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, η *τροχιά* ενός κινητού, κ.ο.κ. Σκοπός μας είναι να εφαρμόσουμε μεθόδους του Διαφορικού Λογισμού στην μελέτη του X , και για να γίνει αυτό θα πρέπει να δούμε τις καμπύλες ως *εικόνες κατάλληλων συναρτήσεων*. Ετσι, δίνουμε τον επόμενο ορισμό:

Μια **παραμετρημένη καμπύλη στο χώρο** (parametrized curve), ή απλώς **καμπύλη στο χώρο** (space curve) είναι μια συνεχής απεικόνιση $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$, όπου $I \subseteq \mathbb{R}$ είναι ένα διάστημα.

Ο όρος "παραμετρημένη" (που συνήθως θα παραλείπεται στη συνέχεια) σημαίνει ότι η καμπύλη περιγράφεται με την βοήθεια μιας μεταβλητής (παραμέτρου) $t \in I$.

Επειδή, για κάθε $t \in I$, είναι $\alpha(t) \in \mathbb{R}^3$, η α είναι μία τριάδα της μορφής

$$(1.1.1) \quad \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3).$$

Κάθε συνιστώσα (ή συντεταγμένη)

$$\alpha_i := u_i \circ \alpha; \quad i = 1, 2, 3,$$

όπου η $u_i: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ συμβολίζει την κανονική προβολή στην i -συντεταγμένη, είναι μια πραγματική συνάρτηση μιας πραγματικής μεταβλητής. Η συνέχεια της α ισοδυναμεί με την συνέχεια κάθε μιας από τις α_i .

Αν η εικόνα $\alpha(I)$ μίας καμπύλης περιέχεται σε ένα επίπεδο του \mathbb{R}^3 , λέμε ότι η α είναι **επίπεδη καμπύλη** (plane curve). Σ' αυτήν την περίπτωση, με μια αλλαγή του συστήματος συντεταγμένων μπορούμε να θεωρούμε ότι $\alpha(I) \subset \mathbb{R}^2$.

Ενδιαφερόμαστε όχι για την απεικόνιση α (παραμετρημένη καμπύλη), αλλά για τις γεωμετρικές ιδιότητες της εικόνας, δηλαδή του συνόλου $X = \alpha(I)$. Η απεικόνιση α είναι απλώς το εργαλείο για την μελέτη του $\alpha(I)$.

Εδώ πρέπει να παρατηρήσουμε ότι οι καμπύλες

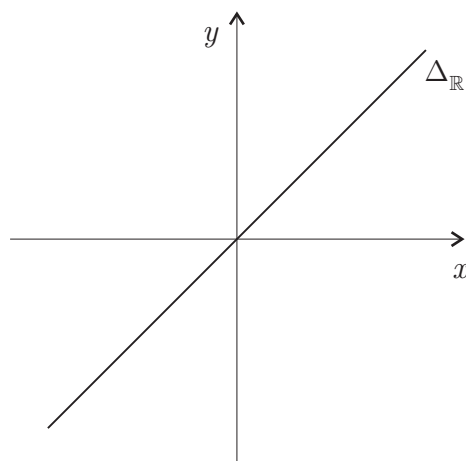
$$\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2: t \mapsto \left(\frac{\sqrt{2}}{2}t, \frac{\sqrt{2}}{2}t\right),$$

$$\beta: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2: t \mapsto (t, t)$$

$$\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2: t \mapsto (t^3, t^3)$$

$$\delta: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2: t \mapsto \begin{cases} (t, t) & : t \leq 0 \\ (t^2, t^2) & : t > 0, \end{cases}$$

έχουν την ίδια εικόνα $\alpha(\mathbb{R}) = \beta(\mathbb{R}) = \gamma(\mathbb{R}) = \delta(\mathbb{R}) = \Delta_{\mathbb{R}}$, δηλαδή την διαγώνιο του \mathbb{R}^2 (βλ. και το επόμενο σχήμα).



Σχήμα 1.1

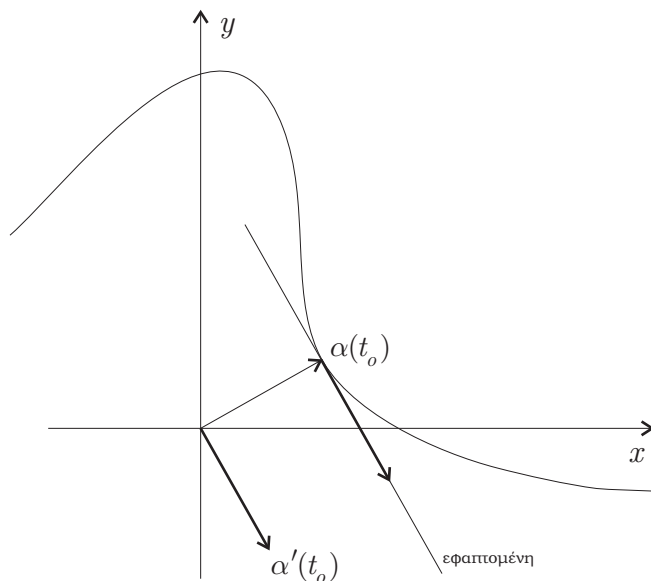
Απ' αυτές,

- η α είναι διαφορίσιμη, με $\|\alpha'(t)\| = 1$, για κάθε $t \in \mathbb{R}$,
- η β είναι διαφορίσιμη, με $\beta'(t) \neq 0$, για κάθε $t \in \mathbb{R}$,
- η γ είναι διαφορίσιμη και υπάρχει ένα σημείο, το 0, όπου $\gamma'(0) = (0, 0)$,
- ενώ η δ δεν είναι διαφορίσιμη.

Από τα προηγούμενα παραδείγματα προκύπτει ότι: (1) η ίδια καμπύλη $\Delta_{\mathbb{R}}$ μπορεί να περιγραφεί ως εικόνα διαφορετικών (παραμετρημένων) καμπυλών και (2) η ανυπαρξία παραγώγου ή ο μηδενισμός της (για μια παραμέτρηση) δεν συνδέονται κατ' ανάγκην με κάποια ανωμαλία στο σχήμα της εικόνας $\Delta_{\mathbb{R}}$. Δημιουργούν όμως τεχνικές δυσκολίες, γι' αυτό θα θεωρήσουμε καμπύλες που διαγράφουν την εικόνα με τον καλλίτερο δυνατό τρόπο, έτσι ώστε να δίνουν αμεσώτερα τα ζητούμενα συμπεράσματα.

Έστω $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ μια διαφορίσιμη καμπύλη και έστω ότι σε ένα σημείο t_0 είναι $\alpha'(t_0) \neq 0$. Τότε υπάρχει η **εφαπτομένη ευθεία** (tangent line) της α στο σημείο $\alpha(t_0)$, που δίνεται από την εξίσωση

$$(1.1.2) \quad \varepsilon(s) = \alpha(t_0) + s\alpha'(t_0), \quad s \in \mathbb{R}.$$



Σχήμα 1.2

Η ανυπαρξία ή ο μηδενισμός της παραγώγου $\alpha'(t_0)$ στο σημείο t_0 δεν επιτρέπουν την προηγούμενη έκφραση της εφαπτομένης. Γι' αυτό στα επόμενα θεωρούμε μόνο διαφορίσιμες καμπύλες, των οποίων η παράγωγος δεν μηδενίζεται πουθενά. Μια καμπύλη μ' αυτήν την ιδιότητα ονομάζεται **κανονική** ή **ομαλή** (regular), ενώ σε μια καμπύλη α που δεν είναι ομαλή, κάθε σημείο όπου μηδενίζεται η παράγωγος λέγεται **σημείο ανωμαλίας** (της α).

Στη συνέχεια θα υποθέτουμε ότι οι καμπύλες μας έχουν τάξη διαφορισιμότητας αρκετά μεγάλη (συνήθως ≥ 3), ώστε να εξασφαλίζεται η ύπαρξη όσων παραγώγων χρειάζονται. Επίσης, θα υποθέτουμε ότι οι καμπύλες μας είναι και **απλές**, δηλαδή είναι απεικονίσεις 1-1. Επομένως, για να αποφύγουμε τις περιπτώσεις επαναλήψεων, με τον όρο "κανονική καμπύλη" θα εννοούμε μια *απλή κανονική καμπύλη*, C^r -διαφορίσιμη, με $r \geq 3$.

Για μια διαφορίσιμη καμπύλη α , η παράγωγος

$$(1.1.3) \quad \alpha'(t) = (\alpha'_1(t), \alpha'_2(t), \alpha'_3(t))$$

ονομάζεται **εφαπτόμενο διάνυσμα** (tangent vector) ή **διάνυσμα ταχύτητας** (velocity) της α στο $\alpha(t)$, ενώ το μήκος του ανωτέρω διανύσματος

$$v(t) := \|\alpha'(t)\| = (\alpha_1'(t)^2 + \alpha_2'(t)^2 + \alpha_3'(t)^2)^{1/2}$$

ονομάζεται **μέτρο της ταχύτητας** (speed) της α στο t .

Αν και η α' είναι διαφορίσιμη, τότε η δεύτερη παράγωγος

$$(1.1.4) \quad \alpha''(t) = (\alpha_1''(t), \alpha_2''(t), \alpha_3''(t))$$

ονομάζεται **επιτάχυνση** (acceleration) της α στο t .

Για μια διαφορίσιμη καμπύλη $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$, ονομάζουμε **μήκος** (length) της α το ολοκλήρωμα

$$(1.1.5) \quad L(\alpha) := \int_I \|\alpha'(t)\| dt.$$

Για δύο καμπύλες $\alpha, \beta: I \rightarrow \mathbb{R}^3$, συμβολίζουμε με $\langle \alpha, \beta \rangle$ την διαφορίσιμη συνάρτηση

$$(1.1.6) \quad \langle \alpha, \beta \rangle: I \rightarrow \mathbb{R}: t \mapsto \langle \alpha(t), \beta(t) \rangle$$

και με $\alpha \times \beta$ την διαφορίσιμη καμπύλη

$$(1.1.7) \quad \alpha \times \beta: I \rightarrow \mathbb{R}^3: t \mapsto \alpha(t) \times \beta(t).$$

Από την διγραμμικότητα του εσωτερικού και του εξωτερικού γινομένου προκύπτουν οι παρακάτω κανόνες παραγώγισης

$$(1.1.8) \quad \langle \alpha, \beta \rangle'(t) = \langle \alpha'(t), \beta(t) \rangle + \langle \alpha(t), \beta'(t) \rangle,$$

$$(1.1.9) \quad (\alpha \times \beta)'(t) = (\alpha'(t) \times \beta(t)) + (\alpha(t) \times \beta'(t)).$$

Η απόδειξη των τύπων αυτών προκύπτει επίσης στοιχειωδώς: αν γράψουμε τις καμπύλες με τις συνιστώσες τους [βλ. σχέση (1.1.1)] και εφαρμόσουμε τον ορισμό του εσωτερικού και εξωτερικού γινομένου, έχουμε τις αντίστοιχες σχέσεις

$$\langle \alpha(t), \beta(t) \rangle = \alpha_1(t)\beta_1(t) + \alpha_2(t)\beta_2(t) + \alpha_3(t)\beta_3(t),$$

$$\alpha(t) \times \beta(t) =$$

$$(\alpha_2(t)\beta_3(t) - \alpha_3(t)\beta_2(t), \alpha_3(t)\beta_1(t) - \alpha_1(t)\beta_3(t), \alpha_1(t)\beta_2(t) - \alpha_2(t)\beta_1(t)),$$

οπότε παραγωγίζουμε τις τελευταίες με το συνήθη τρόπο.

Οι παράγωγοι και το μήκος της α μας δίνουν πολλές πληροφορίες για την $\alpha(I)$, όπως γίνεται φανερό από τα επόμενα

1.1.1 Παραδείγματα. (1) Έστω $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ μια διαφορίσιμη καμπύλη. Αν $\alpha''(t) = 0$, για κάθε $t \in I$, η α είναι ευθεία.

Πράγματι,

$$\alpha''(t) = 0 \Rightarrow \alpha'(t) = \lambda \Rightarrow \alpha(t) = \lambda t + \mu.$$

Προφανώς ισχύει και το αντίστροφο.

(2) Έστω α μια διαφορίσιμη καμπύλη που δεν περνά από το 0. Αν $\alpha(t_0)$ είναι το σημείο της εικόνας το πλησιέστερο στο 0 και $\alpha'(t_0) \neq 0$, τότε το $\alpha(t_0)$ είναι κάθετο στο $\alpha'(t_0)$.

Πράγματι, ας θεωρήσουμε την συνάρτηση που σε κάθε $t \in I$ αντιστοιχεί το τετράγωνο της απόστασης του $\alpha(t)$ από το 0, δηλαδή την

$$\delta: I \rightarrow \mathbb{R}: t \mapsto \|\alpha(t)\|^2 = \alpha_1(t)^2 + \alpha_2(t)^2 + \alpha_3(t)^2 = \langle \alpha(t), \alpha(t) \rangle.$$

Αφού η δ παρουσιάζει ελάχιστο στο t_0 , θα είναι $\delta'(t_0) = 0$, άρα, βάσει της (1.1.8), έχουμε ότι

$$0 = \delta'(t_0) = \langle \alpha(t_0), \alpha'(t_0) \rangle + \langle \alpha'(t_0), \alpha(t_0) \rangle = 2 \langle \alpha(t_0), \alpha'(t_0) \rangle,$$

απ' όπου συνάγεται ότι $\alpha(t_0) \perp \alpha'(t_0)$.

(3) Έστω $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ μια διαφορίσιμη καμπύλη, με $\alpha'(t) \neq 0$, για κάθε $t \in I$. Τότε η εικόνα $\alpha(I)$ είναι τόξο ενός κύκλου με κέντρο 0, εάν και μόνον εάν το $\alpha(t)$ είναι κάθετο στο $\alpha'(t)$, για κάθε $t \in I$.

Όπως προηγουμένως, θεωρούμε το τετράγωνο της απόστασης του $\alpha(t)$ από το 0

$$\delta: I \rightarrow \mathbb{R}: t \mapsto \langle \alpha(t), \alpha(t) \rangle.$$

Η δ είναι σταθερή, εάν και μόνον εάν $\delta' = 0$. Αλλά

$$\delta'(t) = \langle \alpha, \alpha \rangle'(t) = \langle \alpha'(t), \alpha(t) \rangle + \langle \alpha(t), \alpha'(t) \rangle = 2 \langle \alpha'(t), \alpha(t) \rangle.$$

Επομένως $\delta' = 0$ ισοδυναμεί με $\alpha(t) \perp \alpha'(t)$, για κάθε $t \in I$, οπότε έχουμε το αποτέλεσμα.

(4) Η καμπύλη ελάχιστου μήκους που ενώνει δύο σημεία P και Q είναι το ευθύγραμμο τμήμα με άκρα τα P, Q .

Αν p και q είναι τα διανύσματα θέσης των σημείων P και Q αντιστοίχως, το ευθύγραμμο τμήμα με άκρα P, Q είναι η καμπύλη

$$\varepsilon: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3: t \mapsto \varepsilon(t) := p + t(q - p)$$

και έχει μήκος [βλ. σχέση (1.1.5)]

$$L(\varepsilon) = \int_0^1 \|\varepsilon'(t)\| dt = \int_0^1 \|q - p\| dt = \|q - p\|.$$

Έστω $\alpha: [x, y] \rightarrow \mathbb{R}^3$ μια διαφορίσιμη καμπύλη με $\alpha(x) = p$ και $\alpha(y) = q$. Για ένα τυχόν σταθερό $u \in \mathbb{R}^3$ με $\|u\| = 1$, είναι

$$\begin{aligned} \langle \alpha, u \rangle' (t) &= \langle \alpha'(t), u \rangle + \langle \alpha(t), u' \rangle = \langle \alpha'(t), u \rangle \\ &\leq \|\alpha'(t)\| \|u\| = \|\alpha'(t)\|, \end{aligned}$$

επομένως

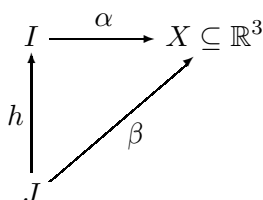
$$\begin{aligned} L(\alpha) &= \int_x^y \|\alpha'(t)\| dt \geq \int_x^y \langle \alpha'(t), u \rangle dt = \langle \alpha(t), u \rangle \Big|_x^y \\ &= \langle q, u \rangle - \langle p, u \rangle = \langle q - p, u \rangle, \end{aligned}$$

για κάθε $u \in \mathbb{R}^3$ με $\|u\| = 1$. Παίρνοντας τώρα $u = (q - p) / \|q - p\|$, καταλήγουμε στη σχέση

$$L(\alpha) \geq \langle q - p, q - p \rangle / \|q - p\| = \|q - p\| = L(\varepsilon).$$

1.2 Αναπαράμετρηση καμπύλης

Αν $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ είναι μια καμπύλη, τότε μια καμπύλη $\beta: J \rightarrow \mathbb{R}^3$ λέγεται **αναπαράμετρηση** (reparametrization) της α , αν υπάρχει μια αμφιδιαφόριση $h: J \rightarrow I$, με $\beta = \alpha \circ h$ (βλ. και το επόμενο σχετικό διάγραμμα).



Διάγραμμα 1.1

Υπενθυμίζουμε ότι η έκφραση "η h είναι αμφιδιαφόριση" σημαίνει ότι η h είναι διαφορίσιμη απεικόνιση 1-1 και επί με διαφορίσιμη αντίστροφη. Κατά το Θεώρημα της Αντίστροφης Συνάρτησης, η h είναι αμφιδιαφόριση τότε και μόνον τότε αν είναι 1-1 και επί με $h'(s) \neq 0$, για κάθε $s \in J$.

Είναι φανερό ότι κάθε αναπαράμετρηση της α έχει την ίδια εικόνα με την α . Είναι επίσης φανερό ότι αν η α είναι κανονική, τότε και κάθε αναπαράμετρησή της είναι κανονική.

Θα αναζητήσουμε εκείνες τις ιδιότητες της εικόνας $X := \alpha(I) = \beta(J)$ που δεν εξαρτώνται από την καμπύλη με την οποία διατρέχουμε το X . Μια τέτοια ιδιότητα μας δίνει το επόμενο

1.2.1 Θεώρημα. Αν β είναι μια αναπαραμέτρηση της α , τότε $L(\beta) = L(\alpha)$.

Απόδειξη. Έστω $\alpha: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ και $\beta: [a', b'] \rightarrow \mathbb{R}^3$ αναπαραμέτρησή της α με $\beta = \alpha \circ h$, όπου $h: [a', b'] \rightarrow [a, b]$ αμφιδιαφόριση. Είναι

$$\begin{aligned} L(\beta) &= \int_{a'}^{b'} \|\beta'(s)\| ds = \int_{a'}^{b'} \|(\alpha \circ h)'(s)\| ds \\ &= \int_{a'}^{b'} \|\alpha'(h(s))\| \cdot |h'(s)| ds. \end{aligned}$$

Για $h' > 0$, δηλαδή για h γνησίως αύξουσα, έχουμε

$$\begin{aligned} L(\beta) &= \int_{a'}^{b'} \|\alpha'(h(s))\| h'(s) ds = \int_{h(a')}^{h(b')} \|\alpha'(h(s))\| dh(s) \\ &= \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt = L(\alpha). \end{aligned}$$

Για $h' < 0$, δηλαδή για h γνησίως φθίνουσα, έχουμε

$$\begin{aligned} L(\beta) &= - \int_{a'}^{b'} \|\alpha'(h(s))\| h'(s) ds = - \int_{h(a')}^{h(b')} \|\alpha'(h(s))\| dh(s) \\ &= - \int_b^a \|\alpha'(t)\| dt = L(\alpha), \end{aligned}$$

που ολοκληρώνει την απόδειξη. \square

Αξίζει να παρατηρήσουμε εδώ ότι η α'' μας δείχνει πώς αλλάζει η α' . Η αλλαγή αυτή μπορεί να αφορά σε αλλαγή του μέτρου της α' , ή σε αλλαγή της διεύθυνσης. Σταθεροποιώντας το μέτρο, παίρνουμε επιτάχυνση που δείχνει μόνο την αλλαγή της διεύθυνσης, άρα την καμπύλωση του χώρου $X = \alpha(I)$. Έτσι, ανάμεσα σε όλες τις καμπύλες που έχουν την ίδια εικόνα, αυτή που μας δίνει ευκολότερα τα ζητούμενα συμπεράσματα για την κοινή εικόνα είναι η καμπύλη που έχει ταχύτητα με σταθερό μέτρο, ίσο με 1.

Ισχύει το επόμενο βασικό

1.2.2 Θεώρημα. Κάθε κανονική καμπύλη $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ δέχεται αναπαραμέτρηση $\beta: J \rightarrow \mathbb{R}^3$ με $\|\beta'(s)\| = 1$, για κάθε $s \in J$.

Απόδειξη. Έστω $I := [a, b]$. Θεωρούμε την απεικόνιση

$$s: [a, b] \longrightarrow [0, L(\alpha)]: t \mapsto \int_a^t \|\alpha'(u)\| du.$$

Αυτή είναι γνησίως αύξουσα και διαφορίσιμη, με

$$s'(t) = \|\alpha'(t)\| = v(t) > 0,$$

άρα (βλ. Θεώρημα Αντίστροφης Απεικόνισης), έχει διαφορίσιμη αντίστροφη

$$h: [0, L(\alpha)] \longrightarrow [a, b]$$

της οποίας η παράγωγος δίνεται από την σχέση

$$(1.2.1) \quad h'(s) = 1/s'(h(s)), \quad \forall s \in [0, L(\alpha)].$$

Θέτοντας $\beta := \alpha \circ h$, έχουμε ότι

$$\|\beta'(s)\| = \|\alpha'(h(s))\| \cdot |h'(s)| = \|\alpha'(h(s))\|/|s'(h(s))| = 1,$$

που αποδεικνύει τον ισχυρισμό. \square

Μια καμπύλη $\beta: J \rightarrow \mathbb{R}^3$ με $\|\beta'(s)\| = 1$, για κάθε $s \in J$, ονομάζεται **καμπύλη μοναδιαίας ταχύτητας**. Αν α είναι μια τυχαία κανονική καμπύλη, λέμε ότι η αναπαραμέτρηση β που κατασκευάστηκε στο προηγούμενο θεώρημα, είναι η **αναπαραμέτρηση μέσω (του) μήκους τόξου** ή ότι έχει **παράμετρο το μήκος τόξου**. Επίσης το μήκος τόξου λέγεται και **φυσική παράμετρος**.

1.3 Καμπυλότητα και στρέψη

Σκοπός μας είναι να ορίσουμε κάποια αριθμητικά μεγέθη που χαρακτηρίζουν το σύνολο $X = \alpha(I)$, όπου α είναι μια κανονική καμπύλη. Οπως σημειώσαμε και νωρίτερα, τα ζητούμενα συμπεράσματα για το X τα παίρνουμε ευκολότερα αν η καμπύλη έχει μοναδιαία ταχύτητα. Γι' αυτό, αν η αρχική α δεν έχει μοναδιαία ταχύτητα, θεωρούμε την αντίστοιχη αναπαραμέτρηση μέσω του μήκους τόξου.

Έστω λοιπόν $\beta(s)$, $s \in J$, μια καμπύλη *μοναδιαίας ταχύτητας*. Θέτουμε

$$(1.3.1) \quad \boxed{T(s) := \beta'(s)} \quad \forall s \in J.$$

Επομένως, το $T(s)$ είναι το **εφαπτόμενο διάνυσμα** ή **διάνυσμα ταχύτητας** της β στο σημείο $\beta(s)$. Εφ' όσον $\|T(s)\| = 1$, για κάθε $s \in J$, τα εφαπτόμενα διανύσματα $T(s)$ είναι στοιχεία της μοναδιαίας σφαίρας του \mathbb{R}^3 .

Μεταβάλλοντας το s στο J παίρνουμε μία *διαφορίμη* συνάρτηση

$$(1.3.1') \quad T: J \ni s \longmapsto T(s) = \beta'(s) \in \mathbb{R}^3.$$

Ισχύει το επόμενο

1.3.1 Λήμμα. Αν $\beta(s)$, $s \in J$, είναι καμπύλη μοναδιαίας ταχύτητας, τότε

$$T' \perp T,$$

δηλαδή

$$T'(s) \perp T(s), \quad \forall s \in J.$$

Απόδειξη. Το μήκος του διανύσματος $T(s)$ είναι σταθερό, άρα και η συνάρτηση $\|T(s)\|^2 = \langle T(s), T(s) \rangle$ είναι σταθερή, δηλαδή έχει μηδενική παράγωγο

$$\langle T, T \rangle'(s) = 2 \langle T'(s), T(s) \rangle = 0, \quad \forall s \in J,$$

απ' όπου προκύπτει το ζητούμενο. \square

Επειδή το μήκος του $T(s) = \beta'(s)$ (ταχύτητα) είναι σταθερά 1, η παράγωγος $T'(s) = \beta''(s)$ (επιτάχυνση) δείχνει την αλλαγή της διεύθυνσης του διανύσματος $T(s)$.

Το μήκος του διανύσματος $T'(s)$ συμβολίζεται με

$$(1.3.2) \quad \boxed{k(s) := \|T'(s)\|}$$

και ονομάζεται **καμπυλότητα** της β στο $\beta(s)$. Η $k(s)$ είναι ένας μη αρνητικός πραγματικός αριθμός. Αν $k(s) = 0$, λέμε ότι το σημείο s είναι **ιδιάζον σημείο τάξης 1**. Προφανώς ορίζεται και η διαφορίσιμη συνάρτηση (καμπυλότητας)

$$(1.3.2') \quad k: J \ni s \mapsto k(s) \in [0, \infty).$$

Όπως θα δούμε στο Θεώρημα 1.3.4, η καμπυλότητα μετράει το κατά πόσον η καμπύλη διαφέρει από την ευθεία.

Για τα επόμενα χρειάζεται η β να μην έχει ιδιάζοντα σημεία τάξης 1, άρα έχει παντού μη μηδενική καμπυλότητα. Για $k(s) \neq 0$, το αντίστροφο της καμπυλότητας, δηλαδή ο αριθμός

$$(1.3.3) \quad \rho(s) := \frac{1}{k(s)}$$

καλείται **ακτίνα καμπυλότητας**. Μέσω της τελευταίας, για κάθε $s \in J$, ορίζουμε το διάνυσμα

$$(1.3.4) \quad \boxed{N(s) := \frac{1}{k(s)} T'(s)}$$

που ονομάζεται **πρώτο κάθετο** ή **πρωτεύον κάθετο διάνυσμα** (normal vector) της β στο $\beta(s)$. Το διάνυσμα αυτό είναι ένα μοναδιαίο και (σύμφωνα

με το Λήμμα 1.3.1) κάθετο στο εφαπτόμενο διάνυσμα. Ορίζεται επίσης και η αντίστοιχη διαφορίσιμη απεικόνιση

$$(1.3.4') \quad N: J \ni s \mapsto N(s) \in \mathbb{R}^3.$$

Τέλος, για κάθε $s \in J$, ορίζουμε και το διάνυσμα

$$(1.3.5) \quad \boxed{B(s) := T(s) \times N(s)}$$

και την αντίστοιχη διαφορίσιμη απεικόνιση

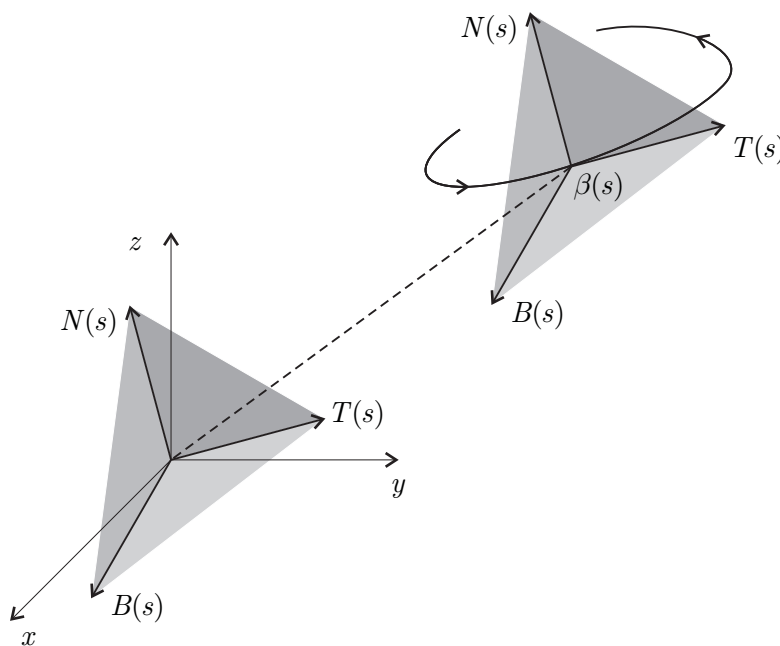
$$(1.3.5') \quad B: J \ni s \mapsto B(s) \in \mathbb{R}^3.$$

Το $B(s)$ καλείται **δεύτερο κάθετο διάνυσμα** (binormal vector) της β στο $\beta(s)$. Προφανώς είναι κάθετο στα $T(s)$, $N(s)$ και μοναδιαίο.

Από τα προηγούμενα συνάγεται ότι, για κάθε $s \in J$, η τριάδα

$$\{T(s), N(s), B(s)\}$$

αποτελεί μία ορθοκανονική βάση του \mathbb{R}^3 , και ονομάζεται **συνοδεύον τρίεδρο** (moving frame) ή **τρίεδρο Frenet** (Frenet frame) **στο σημείο $\beta(s)$ της β** .



Σχήμα 1.3

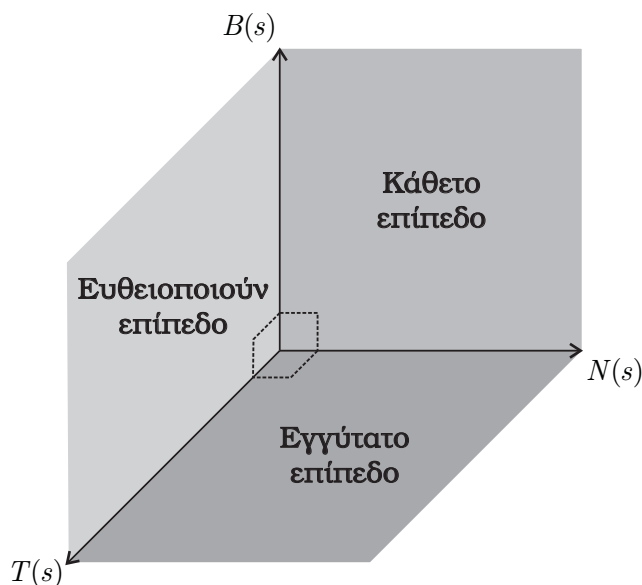
Αντιστοίχως, η τριάδα των συναρτήσεων

$$\{T, N, B\}$$

καλείται **συνοδεύον τρίεδρο** ή **τρίεδρο Frenet κατά μήκος της β** .

Πολλές φορές, για διευκόλυνση αλλά και για την παραστατικότερη απεικόνιση των πραγμάτων, θεωρούμε ότι τα τρία προηγούμενα διανύσματα έχουν μεταφερθεί παράλληλα κατά το διάνυσμα $\beta(s)$, οπότε έχουν ως αρχή το σημείο $\beta(s)$ της καμπύλης. Έτσι σχηματίζεται η εικόνα ενός τριέδρου, που συνοδεύει τα σημεία της καμπύλης. Αυτό δικαιολογεί και την παραπάνω ορολογία. Σχετικώς παραθέτουμε το Σχήμα 1.3.

Μέσω των παραπάνω βασικών διανυσμάτων, ορίζουμε τρία χαρακτηριστικά επίπεδα, που επίσης συνοδεύουν την καμπύλη. Ακριβέστερα, για κάθε σημείο $s \in J$, τα κάθετα μεταξύ τους διανύσματα $T(s)$ και $N(s)$ ορίζουν ένα επίπεδο E . Το (μοναδικό) επίπεδο που περνά από το σημείο $\beta(s)$ και είναι *παράλληλο* προς το E (άρα και προς τα διανύσματα $T(s)$, $N(s)$) ονομάζεται **εγγύτατο επίπεδο** (osculating plane) της β στο $\beta(s)$. Το επίπεδο, που διέρχεται από το $\beta(s)$ και είναι παράλληλο προς το επίπεδο των $N(s)$ και $B(s)$ καλείται **κάθετο επίπεδο** (normal plane) της β στο σημείο $\beta(s)$, ενώ το επίπεδο που διέρχεται από το $\beta(s)$ και είναι παράλληλο προς το επίπεδο των $T(s)$ και $B(s)$ καλείται **ευθειοποιούν επίπεδο** (rectifying plane) της β στο σημείο $\beta(s)$.



Σχήμα 1.4

Προφανώς, το εγγύτατο επίπεδο (στο $\beta(s)$) είναι κάθετο στο διάνυσμα $B(s)$, το κάθετο επίπεδο είναι κάθετο στο $T(s)$ και το ευθειοποιούν επίπεδο είναι κάθετο στο $N(s)$. Οι τελευταίες ιδιότητες χρησιμοποιούνται για τον προσδιορισμό των αντιστοίχων εξισώσεων των επιπέδων αυτών, όπως εξηγήσαμε στις ασκήσεις του παρόντος κεφαλαίου.

Στα Σχήματα 1.3 και 1.4 απεικονίζονται τα προηγούμενα επίπεδα. Σημειώνουμε ότι και στα δύο έχουμε μεταθέσει τα διανύσματα $\{T(s), N(s), B(s)\}$ στο σημείο $\beta(s)$, οπότε το εγγύτατο επίπεδο ταυτίζεται με το επίπεδο των $T(s), N(s)$ κ.ο.κ.

Στη συνέχεια θα ορίσουμε και ένα άλλο βασικό, για την μελέτη μιας καμπύλης, μέγεθος. Επειδή $\langle N(s), B(s) \rangle = 0$, για κάθε $s \in J$, παραγωγίζοντας τη συνάρτηση $\langle N, B \rangle = 0$ [βλ. και τις ανάλογες σχέσεις (1.1.6), (1.1.8)] βρίσκουμε ότι

$$\langle N'(s), B(s) \rangle + \langle N(s), B'(s) \rangle = 0.$$

Τον πραγματικό αριθμό

$$(1.3.6) \quad \boxed{\tau(s) := -\langle N(s), B'(s) \rangle = \langle N'(s), B(s) \rangle}$$

ονομάζουμε **στρέψη** (torsion) της καμπύλης β στο σημείο $\beta(s)$. Προφανώς ορίζεται και η διαφορίσιμη συνάρτηση

$$(1.3.6') \quad \tau: J \ni s \mapsto \tau(s) \in \mathbb{R}.$$

Από την (1.3.6) προκύπτει ότι η στρέψη, αφού περιέχει την παράγωγο $B'(s)$, μετρά κατά κάποιον τρόπο την μεταβολή του δευτέρου καθέτου διανύσματος, άρα και τη μεταβολή του εγγυτάτου επιπέδου. Η μεταβολή του τελευταίου ουσιαστικά καθορίζει τη θέση της καμπύλης στο χώρο, δηλαδή το κατά πόσον η καμπύλη απομακρίνεται από το επίπεδο, άρα διαφέρει από μια επίπεδη καμπύλη. Την ακριβή σημασία της στρέψης (όπως και της καμπυλότητας) θα δούμε στο Θεώρημα 1.3.5.

Πριν συνδέσουμε τα διανύσματα του τριέδρου Frenet και τις παραγώγους τους με την καμπυλότητα και την στρέψη, αποδεικνύουμε το επόμενο βοηθητικό συμπέρασμα.

1.3.2 Λήμμα. Αν $u, v \in \mathbb{R}^3$ με $\|u\| = 1$ και $u \perp v$, τότε

$$(u \times v) \times u = v.$$

Απόδειξη. Έστω $u = (a, b, c)$ και $v = (x, y, z)$. Τότε

$$\begin{aligned} u \times v &= \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} = (bz - cy)e_1 - (az - cx)e_2 + (ay - bx)e_3 \\ &= (bz - cy, cx - az, ay - bx). \end{aligned}$$

Επομένως,

$$\begin{aligned}
(u \times v) \times u &= \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ bz - cy & cx - az & ay - bx \\ a & b & c \end{vmatrix} \\
&= [c(cx - az) - b(ay - bx)]e_1 - [c(bz - cy) - a(ay - bx)]e_2 + \\
&\quad + [b(bz - cy) - a(cx - az)] \\
&= (c^2x - acz - aby + b^2x)e_1 - (cbz - c^2y - a^2y + abx)e_2 + \\
&\quad + (b^2z - bcy - acx + a^2z)e_3 = \\
&= ((1 - a^2)x - acz - aby, (1 - b^2)y - abx - cbz, \\
&\quad (1 - c^2)z - bcy - acx) \\
&= (x - a(ax + by + cz), y - b(ax + by + cz), \\
&\quad z - c(ax + by + cz)) \\
&= (x - a \langle u, v \rangle, y - b \langle u, v \rangle, z - c \langle u, v \rangle) \\
&= (x, y, z) = v,
\end{aligned}$$

που είναι η ζητούμενη ισότητα. \square

1.3.3 Πρόρισμα. *Ισχύουν οι σχέσεις:*

$$\begin{aligned}
T(s) \times N(s) &= B(s), \\
N(s) \times B(s) &= T(s), \\
B(s) \times T(s) &= N(s).
\end{aligned}$$

Απόδειξη. Η πρώτη σχέση είναι ακριβώς η (1.3.5), δηλαδή ο ορισμός του $B(s)$. Για την τρίτη παρατηρούμε ότι

$$B(s) \times T(s) = (T(s) \times N(s)) \times T(s) = N(s).$$

Τέλος, για την δεύτερη σχέση έχουμε:

$$\begin{aligned}
N(s) \times B(s) &= N(s) \times (T(s) \times N(s)) = \\
&= -(T(s) \times N(s)) \times N(s) = (N(s) \times T(s)) \times N(s) = T(s). \quad \square
\end{aligned}$$

Ερχόμαστε τώρα στην απόδειξη των τύπων (εξισώσεων) Frenet-Serret, οι οποίοι εκφράζουν τις παραγώγους $T'(s)$, $N'(s)$, $B'(s)$ ως γραμμικούς συνδυασμούς των βασικών διανυσμάτων με συντελεστές την καμπυλότητα και στρέψης. Αποδείχτηκαν (ανεξαρτητά) από τους F. Frenet και J. Serret.

1.3.4 Θεώρημα. Έστω $\beta: J \rightarrow \mathbb{R}^3$ μια καμπύλη μοναδιαίας ταχύτητας, με $k > 0$ και $\{T, N, B\}$ το αντίστοιχο τριέδρο του Frenet κατά μήκος της β . Τότε ισχύουν οι σχέσεις (τύποι **Frenet-Serret**):

$$(F. 1) \quad T' = kN$$

$$(F. 2) \quad N' = -kT + \tau B$$

$$(F. 3) \quad B' = -\tau N.$$

Απόδειξη. Η (F. 1) προκύπτει από τον ορισμό του $N(s)$ [βλ. σχέση (1.3.4)].

Για την (F. 2) προχωρούμε ως εξής: Επειδή, για κάθε $s \in J$, τα διανύσματα $T(s), N(s)$ και $B(s)$ αποτελούν ορθοκανονική βάση, υπάρχουν μονοσήμαντα ορισμένες συναρτήσεις $a, b, c: J \rightarrow \mathbb{R}$, έτσι ώστε

$$(1.3.7) \quad N'(s) = a(s)T(s) + b(s)N(s) + c(s)B(s), \quad \forall s \in J.$$

Για να προσδιορίσουμε τις συναρτήσεις a, b, c θα σχηματίσουμε το εσωτερικό γινόμενο της (1.3.7) διαδοχικά με τα διανύσματα $T(s), N(s), B(s)$. Στην πρώτη περίπτωση έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \langle N'(s), T(s) \rangle &= a(s) \langle T(s), T(s) \rangle + b(s) \langle N(s), T(s) \rangle \\ &\quad + c(s) \langle B(s), T(s) \rangle \\ &= a(s)1 + b(s)0 + c(s)0 = a(s). \end{aligned}$$

Απ' το άλλο μέρος, η παραγωγή της σχέσης $\langle T, N \rangle = 0$ δίνει ότι

$$\langle T, N \rangle' = \langle T', N \rangle + \langle T, N' \rangle = 0,$$

άρα, μαζί με την (F. 1),

$$\langle T, N' \rangle = - \langle T', N \rangle = - \langle kN, N \rangle = -k \cdot 1 = -k.$$

Επομένως καταλήγουμε στη σχέση

$$a(s) = -k(s),$$

οπότε η (1.3.7) παίρνει την μορφή

$$(1.3.8) \quad N'(s) = -k(s)T(s) + b(s)N(s) + c(s)B(s), \quad \forall s \in J.$$

Πολλαπλασιάζοντας την τελευταία "εσωτερικά" με $N(s)$ έχουμε

$$\begin{aligned} \langle N'(s), N(s) \rangle &= -k(s) \langle T(s), N(s) \rangle + b(s) \langle N(s), N(s) \rangle \\ &\quad + c(s) \langle B(s), N(s) \rangle \\ &= -k(s)0 + b(s)1 + c(s)0 = b(s). \end{aligned}$$

Η σχέση $\langle N, N \rangle = 1$ οδηγεί στην

$$\langle N, N \rangle' = 2 \langle N, N' \rangle = 0,$$

άρα

$$b(s) = 0,$$

μέσω της οποίας η (1.3.8) μετασχηματίζεται στην

$$(1.3.9) \quad N'(s) = -k(s)T(s) + 0N(s) + c(s)B(s), \quad \forall s \in J.$$

Τέλος, από την προηγούμενη σχέση έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \langle N'(s), B(s) \rangle &= -k(s)\langle T(s), B(s) \rangle + 0\langle N(s), B(s) \rangle \\ &\quad + c(s)\langle B(s), B(s) \rangle \\ &= -k(s)0 + 0 + c(s)1 = c(s). \end{aligned}$$

Αλλά η $\langle B, N \rangle = 0$ δίνει ότι

$$\langle B, N \rangle' = \langle B', N \rangle + \langle B, N' \rangle = 0,$$

άρα, σύμφωνα με την (1.3.6),

$$\langle B(s), N'(s) \rangle = -\langle B'(s), N(s) \rangle = \tau(s),$$

οπότε

$$c(s) = \tau(s),$$

και η (1.3.9) μετασχηματίζεται στην

$$N'(s) = -k(s)T(s) + \tau(s)B(s); \quad \forall s \in J,$$

δηλαδή καταλήγουμε στην (F. 2).

Για την (F. 3) αρκεί να παραγωγίσουμε την $B = T \times N$, λαμβάνοντας υπόψιν τις (F. 1), (F. 2) και τις σχέσεις του Πορίσματος 1.3.3. Πράγματι,

$$\begin{aligned} B' &= T' \times N + T \times N' \\ &= kN \times N + T \times (-kT + \tau B) \\ &= k \cdot 0 + (-kT \times T + \tau T \times B) \\ &= -k \cdot 0 + \tau T \times B \\ &= -\tau N. \end{aligned}$$

□

Οι τύποι Frenet-Serret συνοψίζονται και στην επόμενη μορφή:

$$(1.3.10) \quad \begin{pmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k & 0 \\ -k & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix}.$$

Απο εδώ φαίνεται και ο μνημονοτεχνικός κανόνας, μέσω του οποίου βρίσκουμε αμέσως τους συντελεστές των (F. 1)–(F. 3): εμφανίζονται μόνον η καμπυλότητα και η στρέψη (κατά σειράν), στην 2η γραμμή και την 2η στήλη, με την σημειούμενη εναλλαγή προσήμων.

Το επόμενο αποτέλεσμα διαφωτίζουν το ρόλο της καμπυλότητας και της στρέψης μιας καμπύλης.

1.3.5 Θεώρημα. Έστω $\beta: J \rightarrow \mathbb{R}^3$ μια καμπύλη μοναδιαίας ταχύτητας. Τότε ισχύουν οι επόμενοι χαρακτηρισμοί:

- (i) $k = 0$ εάν και μόνον εάν η β είναι ευθεία.
- (ii) Αν $k > 0$, τότε $\tau = 0$ εάν και μόνον εάν η β είναι επίπεδη.

Απόδειξη. (i) $k = 0 \Leftrightarrow T' = \beta'' = 0 \Leftrightarrow \beta'(s) = \lambda \Leftrightarrow \beta(s) = \lambda s + \mu$ [βλ. και Παράδειγμα 1.1.1(1)]. Προφανώς, για να είναι η καμπύλη μοναδιαίας ταχύτητας, θα πρέπει $\|\lambda\| = 1$.

(ii) Από τις σχέσεις $B' = -\tau N$ και $\tau = -\langle N, B' \rangle$ συνάγεται ότι $\tau = 0$ εάν και μόνον εάν $B' = 0$, που με τη σειρά του ισοδυναμεί με το ότι η απεικόνιση $B = T \times N$ είναι σταθερή, δηλαδή για ένα $s_0 \in J$,

$$B(s) = B(s_0), \quad \forall s \in J.$$

Έτσι έχουμε

$$\begin{aligned} \tau = 0 &\Rightarrow B(s) = B(s_0) \quad \forall s \in J \\ &\Rightarrow T(s) \perp B(s_0), \quad \forall s \in J \\ &\Rightarrow \langle T(s), B(s_0) \rangle = \langle \beta'(s), B(s_0) \rangle = 0, \quad \forall s \in J \\ &\Rightarrow \langle \beta(s), B(s_0) \rangle' = 0, \quad \forall s \in J \\ &\Rightarrow \langle \beta(s), B(s_0) \rangle = \text{σταθερό}, \quad \forall s \in J \\ &\Rightarrow \langle \beta(s), B(s_0) \rangle = \langle \beta(s_0), B(s_0) \rangle, \quad \forall s \in J \\ &\Rightarrow \langle \beta(s) - \beta(s_0), B(s_0) \rangle = 0, \quad \forall s \in J \\ &\Rightarrow \beta(s) - \beta(s_0) \perp B(s_0), \quad \forall s \in J. \end{aligned}$$

Η τελευταία σχέση σημαίνει ότι $\beta(s) - \beta(s_0)$ ανήκει στο επίπεδο E_{s_0} των $T(s_0)$ και $N(s_0)$, δηλαδή το $\beta(s)$ ανήκει στο εγγύτατο επίπεδο $E_{s_0} + \beta(s_0)$, για κάθε $s \in J$.

Αντιστρόφως, έστω ότι $\beta(s) \in E$, για κάποιο επίπεδο E , και έστω E_o το επίπεδο (υπόχωρος του \mathbb{R}^2 , διάστασης 2) που είναι παράλληλο με το E και περιέχει το 0. Τότε,

$$E = \beta(s) + E_o, \quad \forall s \in J.$$

Σταθεροποιώντας ένα $s_o \in J$, παίρνουμε ότι

$$\beta(s) \in \beta(s_o) + E_o, \quad \forall s \in J.$$

Αν το E_o παράγεται από μία ορθοκανονική βάση $\{u, v\}$, τότε

$$(1.3.11) \quad \beta(s) = \beta(s_o) + \lambda(s)u + \mu(s)v; \quad \forall s \in J,$$

όπου $\lambda, \mu: J \rightarrow \mathbb{R}$ είναι *διαφορίσιμες* συναρτήσεις. Πραγματικά, η διαφορισιμότητα της λ ελέγχεται ως εξής: Από την (1.3.11) έχουμε ότι

$$\beta(s) - \beta(s_o) = \lambda(s)u + \mu(s)v; \quad \forall s \in J,$$

οπότε, παίρνοντας το εσωτερικό γινόμενο και των δύο μελών της τελευταίας με το u βρίσκουμε την

$$\begin{aligned} \langle \beta(s) - \beta(s_o), u \rangle &= \langle \lambda(s)u, u \rangle + \langle \mu(s)v, u \rangle \\ &= \lambda(s)1 + \mu(s)0 = \lambda(s), \end{aligned}$$

δηλαδή $\lambda = \langle \beta - \beta(s_o), u \rangle$, που αποδεικνύει τον ισχυρισμό. Παρόμοια αποδεικνύεται και η διαφορισιμότητα της μ .

Παραγωγίζοντας τώρα την σχέση (1.3.11) έχουμε ότι

$$T(s) = \beta'(s) = \lambda'(s)u + \mu'(s)v \in E_o; \quad \forall s \in J,$$

η παραγωγή της οποίας οδηγεί στην

$$N(s) = \frac{1}{k(s)}T'(s) = \frac{1}{k(s)}(\lambda''(s)u + \mu''(s)v) \in E_o, \quad \forall s \in J.$$

Άρα, το επίπεδο των $T(s)$ και $N(s)$ είναι σταθερά το E_o και το διάνυσμα $B(s)$ είναι σταθερά το ένα από τα δύο μοναδιαία διανύσματα που είναι κάθετα στο E_o . Επομένως, λόγω της σταθερότητας του $B(s)$ και της (1.3.6), προκύπτει ότι $\tau = 0$. \square

1.3.6 Θεώρημα. Έστω $\beta: J \rightarrow \mathbb{R}^3$ μια επίπεδη καμπύλη μοναδιαίας ταχύτητας. Τότε η β είναι τμήμα κύκλου εάν και μόνον εάν έχει σταθερή καμπυλότητα $k > 0$.

Απόδειξη. Αν η β είναι τμήμα κύκλου κέντρου (x_o, y_o) και ακτίνας r , τότε δίνεται από τον τύπο

$$\beta(s) = r \left(\cos \frac{s}{r}, \sin \frac{s}{r} \right) + (x_o, y_o); \quad s \in J \subseteq [0, 2\pi],$$

απ' όπου παίρνουμε τις σχέσεις

$$\begin{aligned} T(s) &= \beta'(s) = \left(-\sin \frac{s}{r}, \cos \frac{s}{r} \right), \\ T'(s) &= \beta''(s) = \frac{1}{r} \left(-\cos \frac{s}{r}, -\sin \frac{s}{r} \right) \end{aligned}$$

και

$$k(s) = \|T'(s)\| = \frac{1}{r}.$$

Αντιστρόφως, έστω ότι η β έχει σταθερή καμπυλότητα $k > 0$ και μηδενική στρέψη. Θεωρούμε την απεικόνιση

$$\gamma(s) := \beta(s) + \frac{1}{k}N(s).$$

Η γ είναι προφανώς διαφορίσιμη και

$$\begin{aligned} \gamma'(s) &= \beta'(s) + \frac{1}{k}N'(s) \\ &= T(s) + \frac{1}{k}(-kT(s) + \tau B(s)) \\ &= T(s) - T(s) + 0 = 0, \end{aligned}$$

δηλαδή η γ είναι σταθερή. Αν $a := \gamma(s) \in \mathbb{R}^3$ είναι η σταθερή τιμή της γ , τότε

$$\|\beta(s) - a\| = \frac{1}{k}\|N(s)\| = \frac{1}{k} = r,$$

δηλ. τα σημεία $\beta(s)$ ανήκουν στην σφαίρα με κέντρο a και ακτίνα r . Επειδή η β είναι επίπεδη, ολοκληρώνεται η απόδειξη. \square

1.3.7 Παρατηρήσεις. 1) Από την προηγούμενη απόδειξη φαίνεται ότι η ακτίνα του κύκλου είναι ακριβώς η ακτίνα καμπυλότητας της β [βλ. σχέση (1.3.3)], ενώ το κέντρο είναι το σημείο $\beta(s) + \frac{1}{k}N(s)$.

2) Από τα Θεωρήματα 1.3.5 και 1.3.6 συνάγεται ότι η καμπυλότητα μετρά το πόσο αποκλίνει η καμπύλη από το να είναι ευθεία, ενώ η στρέψη μετρά την απόκλιση από το να είναι η καμπύλη επίπεδη.

1.4 Καμπυλότητα και στρέψη τυχαίας κανονικής καμπύλης

Το τρίεδρο Frenet καθώς η καμπυλότητα και η στρέψη μιας καμπύλης β ορίστηκαν προηγουμένως με την προϋπόθεση ότι η β είναι καμπύλη μοναδιαίας ταχύτητας. Ας υποθέσουμε τώρα ότι έχουμε μια τυχαία κανονική καμπύλη $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$. Σύμφωνα με όσα είπαμε στην προηγούμενη παράγραφο, τα παραπάνω μεγέθη αναφέρονται σε ιδιότητες του συνόλου $X = \alpha(I)$ και όχι της παραμέτρησης (απεικόνισης) α . Επομένως, ο επόμενος ορισμός είναι εντελώς φυσιολογικός.

1.4.1 Ορισμός. Έστω α μια τυχαία κανονική καμπύλη και $\bar{\alpha}$ η παραμετρήσή της μέσω του μήκους τόξου (βλ. Θεώρημα 1.2.2). Αν $\bar{T}, \bar{N}, \bar{B}, \bar{k}, \bar{\tau}$ είναι το τρίεδρο Frenet, η καμπυλότητα και η στρέψη της $\bar{\alpha}$, τότε ορίζουμε τα αντίστοιχα μεγέθη T, N, B, k, τ της α μέσω των τύπων

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & T(t) := \bar{T}(s(t)), \\ \text{(ii)} \quad & N(t) := \bar{N}(s(t)), \\ \text{(iii)} \quad & B(t) := \bar{B}(s(t)), \\ \text{(iv)} \quad & k(t) := \bar{k}(s(t)), \\ \text{(v)} \quad & \tau(t) := \bar{\tau}(s(t)). \end{aligned}$$

1.4.2 Θεώρημα. Αν $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ είναι μια (τυχαία) κανονική καμπύλη, τότε

$$k = \frac{\|\alpha' \times \alpha''\|}{\|\alpha'\|^3}.$$

Απόδειξη. Έστω α μια κανονική καμπύλη και $\bar{\alpha} = \alpha \circ h$ η αναπαραμετρήσή της μέσω του μήκους τόξου, όπου $h = s^{-1}$ και s το μήκος τόξου. Τότε $\alpha = \bar{\alpha} \circ s$, οπότε, για κάθε $t \in I$, έχουμε τις σχέσεις

$$(1.4.1) \quad \alpha'(t) = (\bar{\alpha} \circ s)'(t) = s'(t)\bar{\alpha}'(s(t)) = s'(t)\bar{T}(s(t)),$$

$$(1.4.2) \quad \begin{aligned} \alpha''(t) &= s''(t)\bar{T}(s(t)) + s'(t)^2\bar{T}'(s(t)) \\ &= s''(t)\bar{T}(s(t)) + s'(t)^2\bar{k}(s(t))\bar{N}(s(t)) \end{aligned}$$

οπότε

$$\begin{aligned} \alpha'(t) \times \alpha''(t) &= s'(t)\bar{T}(s(t)) \times [s''(t)\bar{T}(s(t)) + \\ &\quad + s'(t)^2\bar{k}(s(t))\bar{N}(s(t))], \end{aligned}$$

ή

$$\begin{aligned}
 \alpha'(t) \times \alpha''(t) &= s'(t)s''(t)[\bar{T}(s(t)) \times \bar{T}(s(t))] + \\
 &\quad + s'(t)^3 \bar{k}(s(t))[\bar{T}(s(t)) \times \bar{N}(s(t))] \\
 (1.4.3) \qquad &= 0 + s'(t)^3 \bar{k}(s(t)) \bar{B}(s(t)) \\
 &= \|\alpha'(t)\|^3 \bar{k}(s(t)) \bar{B}(s(t)).
 \end{aligned}$$

Άρα

$$\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\| = \|\alpha'(t)\|^3 \bar{k}(s(t)),$$

απ' όπου προκύπτει η

$$k(t) := \bar{k}(s(t)) = \frac{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|}{\|\alpha'(t)\|^3},$$

δηλαδή η ζητούμενη σχέση. □

1.4.3 Θεώρημα. Αν η α είναι μια κανονική καμπύλη με $k > 0$, τότε

$$\tau = \frac{\langle \alpha' \times \alpha'', \alpha''' \rangle}{\|\alpha' \times \alpha''\|^2} = \frac{[\alpha' \alpha'' \alpha''']}{\|\alpha' \times \alpha''\|^2}.$$

Απόδειξη. Όπως προηγουμένως, θεωρούμε την αναπαραμέτρηση $\bar{\alpha}$ της α μέσω του μήκους τόξου. Από την σχέση (1.4.2) βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned}
 \alpha'''(t) &= s'''(t)\bar{T}(s(t)) + s'(t)s''(t)\bar{T}'(s(t)) + \\
 &\quad + [s'(t)^2 \bar{k}(s(t))]' \bar{N}(s(t)) + s'(t)^3 \bar{k}(s(t)) \bar{N}'(s(t)) \\
 &= s'''(t)\bar{T}(s(t)) + s'(t)s''(t)\bar{k}(s(t))\bar{N}(s(t)) + \\
 &\quad + [s'(t)^2 \bar{k}(s(t))]' \bar{N}(s(t)) - s'(t)^3 \bar{k}(s(t))^2 \bar{T}(s(t)) + \\
 &\quad + s'(t)^3 \bar{k}(s(t)) \bar{\tau}(s(t)) \bar{B}(s(t)) \\
 &= X(t)\bar{T}(s(t)) + Y(t)\bar{N}(s(t)) + Z(t)\bar{B}(s(t)),
 \end{aligned}$$

όπου θέσαμε

$$\begin{aligned}
 X(t) &= s'''(t) - s'(t)^3 \bar{k}(s(t))^2, \\
 Y(t) &= s'(t)s''(t)\bar{k}(s(t)) + [s'(t)^2 \bar{k}(s(t))]', \\
 Z(t) &= s'(t)^3 \bar{k}(s(t)) \bar{\tau}(s(t)).
 \end{aligned}$$

Λαμβάνοντας υπ' όψιν την (1.4.3) και ότι το $\bar{B}(s(t))$ είναι κάθετο προς τα $\bar{T}(s(t))$ και $\bar{N}(s(t))$, έχουμε:

$$\begin{aligned} \langle \alpha'(t) \times \alpha''(t), \alpha'''(t) \rangle &= s'(t)^3 \bar{k}(s(t)) \langle \bar{B}(s(t)), \alpha'''(t) \rangle \\ &= s'(t)^3 \bar{k}(s(t)) X(t) \langle \bar{B}(s(t)), \bar{T}(s(t)) \rangle + \\ &\quad + s'(t)^3 \bar{k}(s(t)) Y(t) \langle \bar{B}(s(t)), \bar{N}(s(t)) \rangle + \\ &\quad + s'(t)^3 \bar{k}(s(t)) Z(t) \langle \bar{B}(s(t)), \bar{B}(s(t)) \rangle \\ &= 0 + 0 + s'(t)^6 \bar{k}(s(t))^2 \bar{\tau}(s(t)) \\ &= \|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|^2 \bar{\tau}(s(t)), \end{aligned}$$

απ' όπου παίρνουμε την

$$\tau(t) := \bar{\tau}(s(t)) = \frac{\langle \alpha'(t) \times \alpha''(t), \alpha'''(t) \rangle}{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|^2},$$

με την οποίαν ολοκληρώνεται η απόδειξη. \square

1.5 Το τρίεδρο Frenet μιας τυχαίας καμπύλης

Θα υπολογίσουμε τώρα τα διανύσματα $T(t)$, $N(t)$ και $B(t)$ (βλ. Ορισμό 1.4.1), για μία τυχαία κανονική καμπύλη α , με μη μηδενική καμπυλότητα.

1.5.1 Θεώρημα. Έστω $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ μια κανονική καμπύλη, όχι κατ' ανάγκη μοναδιαίας ταχύτητας, με μη μηδενική καμπυλότητα, και $\{T(t), N(t), B(t)\}$ το αντίστοιχο τρίεδρο Frenet. Τότε

$$(1.5.1) \quad T(t) = \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|},$$

$$(1.5.2) \quad N(t) = \frac{(\alpha'(t) \times \alpha''(t)) \times \alpha'(t)}{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\| \cdot \|\alpha'(t)\|},$$

$$(1.5.3) \quad B(t) = \frac{\alpha'(t) \times \alpha''(t)}{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|}.$$

Απόδειξη. Έστω $\bar{\alpha} = \alpha \circ h$ η αντίστοιχη καμπύλη μοναδιαίας ταχύτητας (βλ. Θεώρημα 1.2.2), όπου $h = s^{-1}$ και s το μήκος τόξου. Τότε

$$\begin{aligned} T(t) &= \bar{T}(s(t)) = \bar{\alpha}'(s(t)) = (\alpha \circ h)'(s(t)) \\ &= \alpha'(h(s(t))) h'(s(t)) = \alpha'(t) \cdot \frac{1}{s'(t)} \\ &= \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|}. \end{aligned}$$

Ανάλογα, από την σχέση $T = \bar{T} \circ s$, παίρνουμε την $\bar{T} = T \circ h$, επομένως

$$\begin{aligned} N(t) &= \bar{N}(s(t)) = \frac{\bar{T}'(s(t))}{\bar{k}(s(t))} = \frac{(T \circ h)'(s(t))}{k(t)} \\ &= \frac{T'(h(s(t)))h'(s(t))}{k(t)} = \frac{T'(t)}{k(t)s'(t)} \\ &= \frac{T'(t)}{s'(t)} \cdot \frac{\|\alpha'(t)\|^3}{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|} \\ &= T'(t) \frac{\|\alpha'(t)\|^2}{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|}. \end{aligned}$$

Από την παραπάνω ισότητα, έχουμε ότι $T'(t)$ και $N(t)$ είναι συγγραμμικά. Επειδή $T(t) \perp N(t)$, είναι και $T(t) \perp T'(t)$. Επίσης προφανώς $\|T(t)\| = 1$. Άρα, εφαρμόζοντας το Λήμμα 1.3.2 για $u = T(t)$ και $v = T'(t)$, παίρνουμε

$$T'(t) = (T(t) \times T'(t)) \times T(t).$$

Λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι $T(t) = \frac{\alpha'(t)}{s'(t)}$ [βλ. σχέση (1.5.1)] και

$$T'(t) = \frac{\alpha''(t)s'(t) - \alpha'(t)s''(t)}{s'(t)^2},$$

βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned} T'(t) &= \left(\frac{\alpha'(t)}{s'(t)} \times \frac{\alpha''(t)s'(t) - \alpha'(t)s''(t)}{s'(t)^2} \right) \times \frac{\alpha'(t)}{s'(t)} \\ &= \frac{1}{s'(t)^4} [(\alpha'(t) \times \alpha''(t)s'(t) - \alpha'(t) \times \alpha'(t)s''(t))] \times \alpha'(t) \\ &= \frac{1}{s'(t)^3} [(\alpha'(t) \times \alpha''(t)) \times \alpha'(t)], \end{aligned}$$

απ' όπου προκύπτει η

$$N(t) = \frac{(\alpha'(t) \times \alpha''(t)) \times \alpha'(t)}{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\| \cdot \|\alpha'(t)\|}.$$

Τέλος,

$$\begin{aligned} B(t) &= \bar{B}(s(t)) = \bar{T}(s(t)) \times \bar{N}(s(t)) = T(t) \times N(t) \\ &= \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|} \times \frac{(\alpha'(t) \times \alpha''(t)) \times \alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\| \cdot \|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|} \\ &= \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|} \times \left(\frac{\alpha'(t) \times \alpha''(t)}{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|} \times \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|} \right) \\ &= \frac{\alpha'(t) \times \alpha''(t)}{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|}, \end{aligned}$$

όπου στην τελευταία ισότητα, έχει πάλι χρησιμοποιηθεί το Λήμμα 1.3.2, για $u = \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|}$ και $v = \frac{\alpha'(t) \times \alpha''(t)}{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|}$. \square

1.5.2 Θεώρημα. Έστω $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ μια κανονική καμπύλη, όχι και ανάγκη μοναδιαίας ταχύτητας, με μη μηδενική καμπυλότητα, και $\{T, N, B\}$ το αντίστοιχο τρίεδρο Frenet (κατά μήκος της α). Τότε ισχύουν οι **(γενικευμένοι) τύποι Frenet-Serret**:

$$\begin{aligned} (F'. 1) \quad & T' = kvN, \\ (F'. 2) \quad & N' = -kvT + \tau vB, \\ (F'. 3) \quad & B' = -\tau vN, \end{aligned}$$

όπου $v(t) := \|\alpha'(t)\|$ το μέτρο της ταχύτητας της α στο $t \in I$.

Απόδειξη. Θεωρούμε την αναπαραμέτρηση $\bar{\alpha}: J \rightarrow \mathbb{R}^3$ της α μέσω του μήκους τόξου και το τρίεδρο Frenet $\{\bar{T}, \bar{N}, \bar{B}\}$ κατά μήκος της $\bar{\alpha}$. Για κάθε $t \in I$, είναι

$$\begin{aligned} T'(t) &= (\bar{T} \circ s)'(t) = \bar{T}'(s(t))s'(t) = \bar{k}(s(t))\bar{N}(s(t))s'(t) \\ &= k(t)v(t)N(t), \\ N'(t) &= (\bar{N} \circ s)'(t) = \bar{N}'(s(t))s'(t) \\ &= -\bar{k}(s(t))s'(t)\bar{T}(s(t)) + \bar{\tau}(s(t))s'(t)\bar{B}(s(t)) \\ &= -k(t)v(t)T(t) + \tau(t)v(t)B(t), \\ B'(t) &= (\bar{B} \circ s)'(t) = \bar{B}'(s(t))s'(t) = -\bar{\tau}(s(t))\bar{N}(s(t))s'(t) \\ &= -\tau(t)v(t)N(t), \end{aligned}$$

οπότε η απόδειξη των τύπων είναι πλήρης. \square

1.6 Προσανατολισμός

Ας θεωρήσουμε δύο διατεταγμένες βάσεις (u_1, u_2, u_3) και (v_1, v_2, v_3) του \mathbb{R}^3 . Λέμε ότι οι ανωτέρω βάσεις έχουν τον **ίδιο προσανατολισμό**, αν ο αντίστοιχος πίνακας αλλαγής βάσης έχει θετική ορίζουσα.

Η προηγούμενη σχέση είναι μια σχέση ισοδυναμίας στο σύνολο των διατεταγμένων βάσεων του \mathbb{R}^3 , που τις χωρίζει σε δύο κλάσεις ισοδυναμίας. Οι βάσεις που έχουν ίδιο προσανατολισμό με την συνήθη (ορθοκανονική) βάση (e_1, e_2, e_3) λέγονται **θετικά προσανατολισμένες** και οι υπόλοιπες **αρνητικά προσανατολισμένες**.

1.6.1 Λήμμα. Αν a, b είναι δύο γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα του \mathbb{R}^3 , τότε η τριάδα $(a, b, a \times b)$ είναι μια θετικά προσανατολισμένη βάση.

Απόδειξη. Έστω ότι $a = (a_1, a_2, a_3)$ και $b = (b_1, b_2, b_3)$. Τότε

$$a \times b = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1),$$

και ο πίνακας αλλαγής βάσης έχει ορίζουσα

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_2 & b_2 & a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_3 & b_3 & a_1b_2 - a_2b_1 \end{vmatrix} = (a_1b_2 - a_2b_1)^2 + (a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_3b_1 - a_1b_3)^2,$$

που είναι γνήσια θετική. Επομένως, η τριάδα $(a, b, a \times b)$ είναι πράγματι βάση, θετικά ορισμένη. \square

1.6.2 Πρόρισμα. Αν $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ είναι μια κανονική καμπύλη, το τριέδρο Frenet σε κάθε σημείο $t \in I$ είναι μια θετικά προσανατολισμένη βάση του \mathbb{R}^3 .

Ας θεωρήσουμε τώρα μια καμπύλη $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ και μια τυχαία αναπαραμέτρησή της $\beta := \alpha \circ h: J \rightarrow \mathbb{R}^3$. Λέμε ότι οι α και β έχουν τον **ίδιο προσανατολισμό**, αν $h'(t) > 0$, για κάθε $t \in J$. Διαφορετικά, αν $h'(t) < 0$, για κάθε $t \in J$, λέμε ότι έχουν **αντίθετο προσανατολισμό**.

1.6.3 Πρόταση. Αν $\alpha: I = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ είναι μια κανονική καμπύλη και $\beta := \alpha \circ h: [0, L(\alpha)] \rightarrow \mathbb{R}^3$ η αναπαραμέτρησή της μέσω του μήκους τόξου, τότε α και β έχουν τον ίδιο προσανατολισμό.

Επίσης, η καμπύλη $\gamma: [0, L(\alpha)] \rightarrow \mathbb{R}^3$ με $\gamma(s) := \beta(L(\alpha) - s)$ είναι αναπαραμέτρηση της α , μοναδιαίας ταχύτητας και αντίθετου προσανατολισμού.

Απόδειξη. Για την β , λόγω της (1.2.1), έχουμε ότι

$$h'(s(t)) = \frac{1}{s'(t)} = \frac{1}{\|\alpha'(t)\|} > 0,$$

για κάθε $t \in I$. Αντιστοίχως για την γ , αρκεί να παρατηρήσουμε ότι

$$\gamma = \alpha \circ h \circ \lambda,$$

όπου η λ είναι η αμφιδιαφόριση με $\lambda(s) = L(\alpha) - s$ και $\lambda'(s) = -1$, για κάθε $s \in [0, L(\alpha)]$. Άρα $(h \circ \lambda)'(s) = h'(\lambda(s)) \cdot \lambda'(s) < 0$. \square

1.6.4 Εφαρμογή. Να βρεθεί πώς σχετίζεται το τριέδρο Frenet, η καμπυλότητα και η στρέψη μιας αναπαραμέτρησης με τον προσανατολισμό της.

Έστω $\beta = \alpha \circ h$ μια τυχαία αναπαραμέτρηση της α . Τότε

$$\begin{aligned}\beta'(t) &= (\alpha \circ h)'(t) = \alpha'(h(t))h'(t), \\ \beta''(t) &= (\alpha'(h(t))h'(t))' = \alpha''(h(t))h'(t)^2 + \alpha'(h(t))h''(t), \\ \beta'''(t) &= [\alpha''(h(t))h'(t)^2 + \alpha'(h(t))h''(t)]' \\ &= h'(t)^3\alpha'''(h(t)) + 3h'(t)h''(t)\alpha''(h(t)) + h'''(t)\alpha'(h(t)),\end{aligned}$$

απ' όπου προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}\beta'(t) \times \beta''(t) &= h'(t)^3(\alpha'(h(t)) \times \alpha''(h(t))), \\ (\beta'(t) \times \beta''(t)) \times \beta'(t) &= h'(t)^4((\alpha'(h(t)) \times \alpha''(h(t))) \times \alpha'(h(t)))\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}\langle \beta'(t) \times \beta''(t), \beta'''(t) \rangle &= h'(t)^6 \langle \alpha'(h(t)) \times \alpha''(h(t)), \alpha'''(h(t)) \rangle + \\ &+ 3h'(t)^4 h''(t) \langle \alpha'(h(t)) \times \alpha''(h(t)), \alpha''(h(t)) \rangle + \\ &+ h'''(t) h'(t)^3 \langle \alpha'(h(t)) \times \alpha''(h(t)), \alpha'(h(t)) \rangle \\ &= h'(t)^6 \langle \alpha'(h(t)) \times \alpha''(h(t)), \alpha'''(h(t)) \rangle.\end{aligned}$$

Επομένως, το εφαπτόμενο διάνυσμα $T_\beta(t)$ της β στο $\beta(t)$ είναι

$$T_\beta(t) = \frac{\beta'(t)}{\|\beta'(t)\|} = \frac{(\alpha \circ h)'(t)}{\|(\alpha \circ h)'(t)\|} = \frac{\alpha'(h(t)) \cdot h'(t)}{\|\alpha'(h(t))\| \cdot |h'(t)|} = T_\alpha(h(t)) \cdot \frac{h'(t)}{|h'(t)|},$$

δηλαδή, αν η β έχει ίδιο προσανατολισμό με την α , τότε η β διατηρεί την κατεύθυνση της ταχύτητας της α (: την ευθεία πάνω στην οποία κείται το διάνυσμα της ταχύτητας) και την φορά, ενώ αν έχει τον αντίθετο προσανατολισμό, τότε αντιστρέφει την φορά.

Για το πρώτο κάθετο διάνυσμα $N_\beta(t)$ έχουμε:

$$\begin{aligned}N_\beta(t) &= \frac{(\beta'(t) \times \beta''(t)) \times \beta'(t)}{\|\beta'(t) \times \beta''(t)\| \cdot \|\beta'(t)\|} \\ &= \frac{h'(t)^4}{|h'(t)|^4} \cdot \frac{(\alpha'(h(t)) \times \alpha''(h(t))) \times \alpha'(h(t))}{\|\alpha'(h(t)) \times \alpha''(h(t))\| \cdot \|\alpha'(h(t))\|} \\ &= N_\alpha(h(t)),\end{aligned}$$

δηλαδή η β αφήνει το πρώτο κάθετο διάνυσμα αναλλοίωτο, ανεξαρτήτως του προσανατολισμού της.

Η διγραμμικότητα του εξωτερικού γινομένου μας δίνει για το δεύτερο κάθετο διάνυσμα:

$$B_\beta(t) = T_\beta(t) \times N_\beta(t) = \frac{h'(t)}{|h'(t)|} \cdot T_\alpha(h(t)) \times N_\alpha(h(t)) = \frac{h'(t)}{|h'(t)|} \cdot B_\alpha(h(t)),$$

δηλαδή, αν η β έχει ίδιο προσανατολισμό με την α , τότε η β διατηρεί το δεύτερο κάθετο διάνυσμα, ενώ αν έχει τον αντίθετο προσανατολισμό, τότε το αντιστρέφει.

Ακόμη, για την καμπυλότητα k_β της β βρίσκουμε ότι

$$k_\beta(t) = \frac{\|\beta'(t) \times \beta''(t)\|}{\|\beta'(t)\|^3} = \frac{|h'(t)|^3 \|\alpha'(h(t)) \times \alpha''(h(t))\|}{|h'(t)|^3 \|\alpha'(h(t))\|} = k_\alpha(h(t)),$$

δηλαδή, η καμπυλότητα μένει αναλλοίωτη από τις αναπαραμετρήσεις. Τέλος, για την στρέψη, παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} \tau_\beta(t) &= \frac{\langle \beta'(t) \times \beta''(t), \beta'''(t) \rangle}{\|\beta'(t) \times \beta''(t)\|^2} \\ &= \frac{h'(t)^6}{|h'(t)|^6} \cdot \frac{\langle \alpha'(h(t)) \times \alpha''(h(t)), \alpha'''(h(t)) \rangle}{\|\alpha'(h(t)) \times \alpha''(h(t))\|^2} \\ &= \tau_\alpha(h(t)), \end{aligned}$$

δηλαδή και η στέψη μένει αναλλοίωτη.

Από τα προηγούμενα συνάγεται ότι τα μεγέθη N , k και τ δεν εξαρτώνται από τον τρόπο με τον οποίο διατρέχεται η καμπύλη, δηλαδή είναι "εσωτερικά" (intrinsic) μεγέθη της καμπύλης.

1.7 Κανονική μορφή καμπύλης

Έστω $\alpha: J \rightarrow \mathbb{R}^3$ μια διαφορίσιμη καμπύλη μοναδιαίας ταχύτητας και $s_0 \in J$. Επιλέγουμε ένα σύστημα συντεταγμένων, τέτοιο ώστε το $\alpha(s_0)$ να συμπίπτει με την αρχή των αξόνων, δηλαδή $\alpha(s_0) = 0$, και εφαρμόζουμε την στροφή που κάνει το $T(s_0)$ να συμπίπτει με το e_1 και το $N(s_0)$ να συμπίπτει με το e_2 . Τότε κατ' ανάγκην $B(s_0) = e_3$.

Γνωρίζουμε ότι, για ένα τυχαίο $s \in J$, είναι

$$\begin{aligned} \alpha'(s) &= T(s), \\ \alpha''(s) &= T'(s) = k(s)N(s), \\ \alpha'''(s) &= (k(s)N(s))' = k'(s)N(s) + k(s)N'(s) \\ &= -k(s)^2T(s) + k'(s)N(s) + k(s)\tau(s)B(s). \end{aligned}$$

Άρα, ιδιαίτερος για το σημείο s_0 , έχουμε

$$\begin{aligned} \alpha(s_0) &= 0, \\ \alpha'(s_0) &= T(s_0) = e_1, \\ \alpha''(s_0) &= k(s_0)N(s_0) = k(s_0)e_2, \\ \alpha'''(s_0) &= -k(s_0)^2e_1 + k'(s_0)e_2 + k(s_0)\tau(s_0)e_3. \end{aligned}$$

Απ' το άλλο μέρος, λόγω του Θεωρήματος του Taylor, είναι

$$\alpha(s) = \alpha(s_0) + \frac{\alpha'(s_0)}{1!}(s - s_0) + \frac{\alpha''(s_0)}{2!}(s - s_0)^2 + \frac{\alpha'''(s_0)}{3!}(s - s_0)^3 + O(s^3).$$

Αντικαθιστώντας τα παραπάνω δεδομένα στο προηγούμενο αναπτυγμα, καταλήγουμε στη σχέση

$$\begin{aligned} \alpha(s) &= 0 + (s - s_0)e_1 + \frac{k(s_0)}{2}(s - s_0)^2e_2 + \\ &+ \frac{1}{6}[-k(s_0)^2e_1 + k'(s_0)e_2 + k(s_0)\tau(s_0)e_3](s - s_0)^3 + O(s^3) \\ &= [(s - s_0) - \frac{k(s_0)^2}{6}(s - s_0)^3]e_1 + \\ &+ [\frac{k(s_0)}{2}(s - s_0)^2 + \frac{k'(s_0)}{6}(s - s_0)^3]e_2 + \\ &+ [\frac{k(s_0)\tau(s_0)}{6}(s - s_0)^3]e_3 + O(s^3). \end{aligned}$$

Η τελευταία καλείται **κανονική μορφή** ή **παράσταση** (canonical representation) της καμπύλης α στο $\alpha(s_0)$. Παραλείποντας σε κάθε συντεταγμένη τους όρους με την μεγαλύτερη δύναμη του $(s - s_0)$ (που συγκλίνουν ταχύτερα στο 0, καθώς $s \rightarrow s_0$), παίρνουμε την επόμενη **προσέγγιση** (approximation) της α (κοντά στο s_0):

$$(1.7.1) \quad \alpha(s) \cong (s - s_0)e_1 + \frac{k(s_0)}{2}(s - s_0)^2e_2 + \frac{k(s_0)\tau(s_0)}{6}(s - s_0)^3e_3.$$

Ισοδύναμα, έχουμε ότι

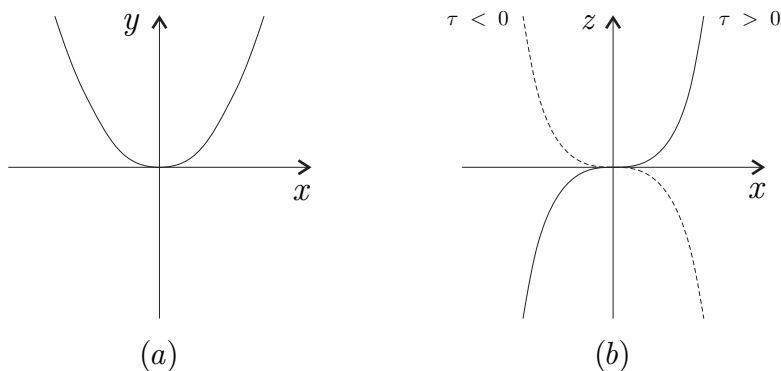
$$(1.7.1') \quad \alpha(s) \cong \left(s - s_0, \frac{k(s_0)}{2}(s - s_0)^2, \frac{k(s_0)\tau(s_0)}{6}(s - s_0)^3 \right).$$

Θα προσπαθήσουμε να προσδιορίσουμε την μορφή που έχει η (τυχαία) καμπύλη α κοντά στο s_0 , «φωτογραφίζοντάς την από τρεις πλευρές», δηλαδή προβάλλοντάς την στα επίπεδα που σχηματίζουν οι άξονες του συστήματος συντεταγμένων. Εδώ το επίπεδο των x, y (δηλαδή το επίπεδο των $e_1 = T(s_0), e_2 = N(s_0)$) είναι το εγγύτατο επίπεδο· το επίπεδο των x, z (: των $e_1 = T(s_0), e_3 = B(s_0)$) είναι το ευθειοποιούν, ενώ αυτό των y, z (: των $e_2 = N(s_0), e_3 = B(s_0)$) είναι το κάθετο επίπεδο.

Έτσι, η προβολή της α στο επίπεδο των x, y (: εγγύτατο επίπεδο) είναι η $(s - s_0, \frac{k(s_0)}{2}(s - s_0)^2)$, οπότε, για $x = s - s_0$ και $y = \frac{k(s_0)}{2}(s - s_0)^2$, καταλήγουμε στην

$$y = \frac{k(s_0)}{2}x^2,$$

που είναι σχέση δευτέρου βαθμού και παριστάνει μία *παραβολή* [βλ. Σχήμα 1.5(a)].



Σχήματα 1.5

Η προβολή της α στο επίπεδο των x, z (: ευθειοποιούν επίπεδο) είναι η $(s - s_o, \frac{k(s_o)\tau(s_o)}{6}(s - s_o)^3)$. Θέτοντας $x = s - s_o$ και $z = \frac{k(s_o)\tau(s_o)}{6}(s - s_o)^3$ βρίσκουμε την σχέση τρίτου βαθμού (*κυβική*)

$$z = \frac{k(s_o)\tau(s_o)}{6}x^3$$

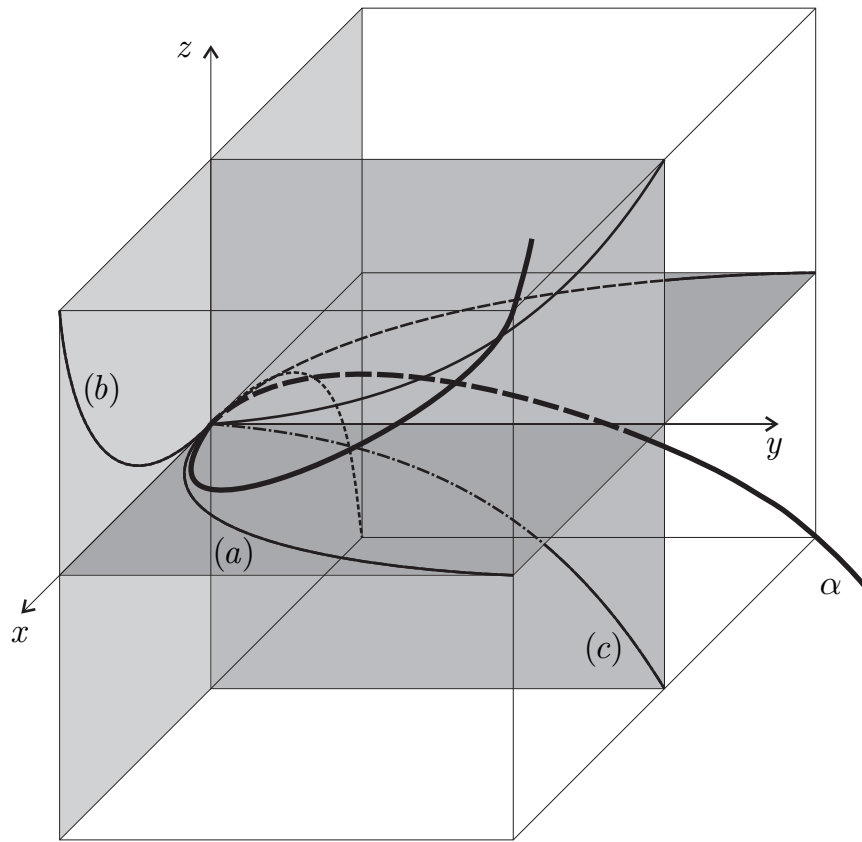
για την οποία έχουμε την εικόνα του Σχήματος 1.5(b).

Τέλος, η προβολή της α στο επίπεδο των y, z (: κάθετο επίπεδο) είναι η $(\frac{k(s_o)}{2}(s - s_o)^2, \frac{k(s_o)\tau(s_o)}{6}(s - s_o)^3)$, η οποία, για $y = \frac{k(s_o)}{2}(s - s_o)^2$ και $z = \frac{k(s_o)\tau(s_o)}{6}(s - s_o)^3$, οδηγεί στην

$$z^2 = \frac{2}{9} \cdot \frac{\tau(s_o)^2}{k(s_o)} y^3.$$

Η προηγούμενη καμπύλη είναι γνωστή ως *παραβολή Neil* και την εικόνα της αποδίδει το Σχήμα 1.5(c). Εδώ πρέπει να παρατηρήσουμε ότι η τελευταία εξίσωση έχει έννοια επειδή $k(s_0) > 0$ (διαφορετικά η α θα ήταν ευθεία, οπότε η ανάλυση κατά Taylor είναι τετριμμένη και οι προβολές της καμπύλης στα τρία επίπεδα είναι ευθείες, άρα η προηγούμενη διαδικασία δεν δίνει καμιά ιδιαίτερη πληροφορία).

Μια συνολική εικόνα και των τριών προβολών μας δίνει το επόμενο σχήμα.



Σχήμα 1.6

1.7.1 Εφαρμογή. Έστω $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ καμπύλη μοναδιαίας ταχύτητας και σημείο $t_0 \in I$ τέτοιο ώστε, σε μια περιοχή $I_0 = (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$ του t_0 , η καμπύλη να μην έχει συνευθειακά σημεία. Θεωρούμε και τα σημεία $t_0 + t_1, t_0 + t_2 \in I_0$. Επειδή τα $A := \alpha(t_0)$, $B := \alpha(t_0 + t_1)$ και $\Gamma := \alpha(t_0 + t_2)$ δεν είναι συνευθειακά, ορίζουν ένα επίπεδο $P(A, B, \Gamma)$. Ζητάμε να προσδιορίσουμε την οριακή θέση του $P(A, B, \Gamma)$, όταν τα B και Γ συγκλίνουν στο A .

Το επίπεδο $P(A, B, \Gamma)$ περνά από το A και είναι παράλληλο προς το επίπεδο των $u = \vec{AB} = \alpha(t_o + t_1) - \alpha(t_o)$ και $v = \vec{A\Gamma} = \alpha(t_o + t_2) - \alpha(t_o)$. Θεωρούμε την ανάλυση Taylor της α

$$\alpha(t_o + t) = \alpha(t_o) + t\alpha'(t_o) + \frac{t^2}{2}\alpha''(t_o) + O(t^2),$$

διαδοχικά για $t = t_1, t_2$, οπότε

$$u = t_1\alpha'(t_o) + \frac{t_1^2}{2}\alpha''(t_o) + O(t_1^2),$$

$$v = t_2\alpha'(t_o) + \frac{t_2^2}{2}\alpha''(t_o) + O(t_2^2).$$

Θέτουμε

$$u_1 := \frac{u}{t_1} = \alpha'(t_o) + \frac{t_1}{2}\alpha''(t_o) + \frac{O(t_1^2)}{t_1},$$

$$v_1 := \frac{v}{t_2} = \alpha'(t_o) + \frac{t_2}{2}\alpha''(t_o) + \frac{O(t_2^2)}{t_2}.$$

Θεωρούμε και το διάνυσμα

$$w := 2\frac{v_1 - u_1}{t_2 - t_1} = \alpha''(t_o) + \frac{2}{t_2 - t_1} \left(\frac{O(t_2^2)}{t_2} - \frac{O(t_1^2)}{t_1} \right).$$

Τα διανύσματα u_1, w είναι γραμμικοί συνδυασμοί των u και v , άρα ορίζουν το ίδιο επίπεδο, επομένως

$$\begin{aligned} \lim_{B, \Gamma \rightarrow A} P(A, B, \Gamma) &= \lim_{t_1, t_2 \rightarrow 0} P(u_1, w) = P\left(\lim_{t_1 \rightarrow 0} u_1, \lim_{t_1, t_2 \rightarrow 0} w\right) \\ &= P(\alpha'(t_o), \alpha''(t_o)) = P(T(t_o), N(t_o)), \end{aligned}$$

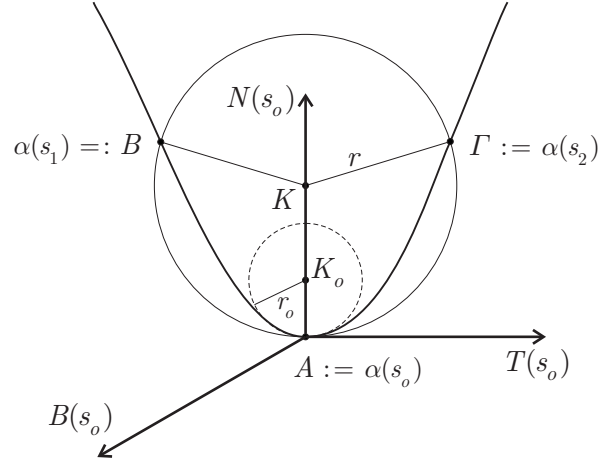
δηλαδή, στην οριακή του θέση το $P(A, B, \Gamma)$ συμπίπτει με το εγγύτατο επίπεδο.

1.8 Ο εγγύτατος κύκλος

Ο εγγύτατος κύκλος, που θα μελετηθεί στη συνέχεια, ορίστηκε από τον G. W. Leibniz, αναπτύχθηκε περαιτέρω από τους Jakob και Johann Bernoulli, και χρησιμοποιήθηκε συστηματικά από τον L. Euler για τον ορισμό της καμπυλότητας.

Έστω $\alpha: J \rightarrow \mathbb{R}^3$ καμπύλη μοναδιαίας ταχύτητας και $s_o \in J$ σημείο, τέτοιο ώστε η καμπύλη να μην έχει συνευθειακά σημεία σε μια περιοχή J_o του s_o . Θεωρούμε δύο σημεία $s_1, s_2 \in J_o$. Επειδή τα $A := \alpha(s_o), B := \alpha(s_1)$ και

$\Gamma := \alpha(s_2)$ δεν είναι συνευθειακά, ορίζουν ένα κύκλο $C(K, r)$ [που βρίσκεται πάνω στο επίπεδο $P(A, B, \Gamma)$ (βλ. Εφαρμογή 1.7.1)]. Θα προσδιορίσουμε την οριακή θέση $C(K_o, r_o)$ του ανωτέρω κύκλου, όταν τα s_1, s_2 συγκλίνουν στο s_o .



Σχήμα 1.7

Αρχικά σημειώνουμε ότι, αφού κάθε κύκλος $C(K, r)$ ανήκει στο αντίστοιχο επίπεδο $P(A, B, \Gamma)$, ο οριακός κύκλος $C(K_o, r_o)$ θα ανήκει στο οριακό επίπεδο, δηλαδή στο εγγύτατο της α στο σημείο $\alpha(s_o)$.

Θεωρούμε την διαφορίσιμη συνάρτηση

$$\rho: J \longrightarrow \mathbb{R}: s \mapsto \rho(s) := \|\alpha(s) - K\|^2 = \langle \alpha(s) - K, \alpha(s) - K \rangle,$$

για την οποία είναι

$$(1.8.1) \quad \rho'(s) = 2 \langle \alpha'(s), \alpha(s) - K \rangle = 2 \langle T(s), \alpha(s) - K \rangle$$

και

$$(1.8.2) \quad \begin{aligned} \rho''(s) &= 2 \langle T'(s), \alpha(s) - K \rangle + 2 \langle T(s), T(s) \rangle \\ &= 2 \langle k(s)N(s), \alpha(s) - K \rangle + 2. \end{aligned}$$

Εφ' όσον

$$\rho(s_o) = \rho(s_1) = \rho(s_2) = r^2,$$

από το θεώρημα του Rolle προκύπτει ότι υπάρχει σημείο s_3 μεταξύ των s_o και s_1 , καθώς και σημείο s_4 μεταξύ των s_o και s_2 , έτσι ώστε

$$(1.8.3) \quad \rho'(s_3) = \rho'(s_4) = 0,$$

οπότε η (1.8.1) δίνει ότι

$$\langle T(s_3), \alpha(s_3) - K \rangle = 0 = \langle T(s_4), \alpha(s_4) - K \rangle.$$

Από τις προηγούμενες ισότητες έχουμε ότι

$$(1.8.4) \quad \alpha(s_3) - K \perp T(s_3) \quad \text{και} \quad \alpha(s_4) - K \perp T(s_4).$$

Επίσης, πάλι από το θεώρημα του Rolle και τις (1.8.3), υπάρχει s_5 μεταξύ των s_3 και s_4 με $\rho''(s_5) = 0$, άρα η (1.8.2) συνεπάγεται ότι

$$(1.8.5) \quad \langle k(s_5)N(s_5), \alpha(s_5) - K \rangle = -1.$$

Παρατηρούμε ότι όταν $s_1, s_2 \rightarrow s_o$, οπότε $K \rightarrow K_o$ και $r \rightarrow r_o$, τότε και $s_3, s_4, s_5 \rightarrow s_o$. Επομένως η σχέση (1.8.4) δίνει οριακά την

$$\alpha(s_o) - K_o \perp T(s_o),$$

άρα το διάνυσμα $\alpha(s_o) - K_o$ ανήκει στο επίπεδο $P(N(s_o), B(s_o))$. Ομως, όπως παρατηρήσαμε στην αρχή, το $\alpha(s_o) - K_o$ ανήκει και στο εγγύτατο επίπεδο $P(T(s_o), N(s_o))$, άρα ανήκει στην ευθεία (τομή των δύο προηγούμενων επιπέδων) που παράγεται από το $N(s_o)$, δηλαδή

$$(1.8.6) \quad \alpha(s_o) - K_o = \lambda N(s_o),$$

για κάποιο $\lambda \in \mathbb{R}$. Επίσης η (1.8.5) δίνει οριακά

$$(1.8.7) \quad \langle k(s_o)N(s_o), \alpha(s_o) - K_o \rangle = -1.$$

Συνδυάζοντας τις (1.8.6) και (1.8.7) παίρνουμε

$$\langle k(s_o)N(s_o), \lambda N(s_o) \rangle = \lambda k(s_o) = -1,$$

απ' όπου

$$\lambda = -\frac{1}{k(s_o)}.$$

Αντικαθιστώντας την τελευταία στην (1.8.6) βρίσκουμε ότι

$$(1.8.8) \quad K_o = \alpha(s_o) + \frac{1}{k(s_o)}N(s_o)$$

και

$$(1.8.9) \quad r_o = \|\alpha(s_o) - K_o\| = \|\lambda N(s_o)\| = |\lambda| = \frac{1}{k(s_o)}.$$

Ο κύκλος $C(K_o, r_o)$ λέγεται **εγγύτατος κύκλος** (osculating circle) της α στο $\alpha(s_o)$.

1.8.1 Παρατηρήσεις. 1) Από την (1.8.9) προκύπτει ότι η καμπυλότητα της καμπύλης α στο σημείο $\alpha(s_o)$ είναι το αντίστροφο του μήκους της ακτίνας του εγγύτατου κύκλου, άρα η ακτίνα καμπυλότητας της καμπύλης συμπίπτει με το μήκος της ακτίνας του κύκλου αυτού.

2) Ερμηνεύοντας την εικόνα $\alpha(I)$ μίας καμπύλης α ως τροχιά ενός κινητού, από την σχέση

$$N(s_o) = \frac{1}{k(s_o)} T'(s_o) = \frac{1}{k(s_o)} \alpha''(s_o),$$

προκύπτει ότι το $N(s_o)$ κατεύθунεται προς το κοίλο μέρος της καμπύλης, αφού η επιτάχυνση έχει μια τέτοια κατεύθυνση.

Το ίδιο συμπέρασμα προκύπτει "γεωμετρικά" μέσω του εγγύτατου κύκλου. Πράγματι, από την (1.8.8) έχουμε ότι

$$N(s_o) = k(s_o)(K_o - \alpha(s_o)) = \frac{1}{r_o}(K_o - \alpha(s_o)),$$

άρα το $N(s_o)$ κατεύθунεται προς το κέντρο του εγγύτατου κύκλου, που βρίσκεται στο κοίλο μέρος της καμπύλης (βλ. σχετικώς και την Άσκηση 2).

1.9 Το Θεμελιώδες Θεώρημα των Καμπυλών

Τα δύο αριθμητικά μεγέθη, η καμπυλότητα και η στρέψη, που αντιστοιχίσαμε σε μια κανονική καμπύλη, καθορίζουν ουσιαστικά μονοσήμαντα την καμπύλη. Πιο συγκεκριμένα, δύο καμπύλες με την ίδια καμπυλότητα και την ίδια στρέψη διαφέρουν μόνο ως προς την θέση τους στο χώρο, και αντιστρόφως.

Υπενθυμίζουμε ότι **μεταφορά** (translation) κατά $c \in \mathbb{R}^3$ ονομάζεται η απεικόνιση

$$\mu_c: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3: u \mapsto \mu_c(u) := u + c,$$

και **στροφή** (rotation) ονομάζεται κάθε ορθογώνιος μετασχηματισμός του \mathbb{R}^3 με θετική ορίζουσα, με άλλα λόγια κάθε γραμμική απεικόνιση

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

που διατηρεί τα εσωτερικά γινόμενα, δηλαδή

$$\langle f(u), f(v) \rangle = \langle u, v \rangle; \quad \forall u, v \in \mathbb{R}^3,$$

και ο πίνακας της έχει θετική ορίζουσα (άρα διατηρεί τον προσανατολισμό των βάσεων). Επομένως, η f διατηρεί τις αποστάσεις, αντιστρέφεται (δηλαδή είναι γραμμικός ισομορφισμός) και διατηρεί τα εξωτερικά γινόμενα με την έννοια ότι ισχύει η σχέση

$$f(u \times v) = f(u) \times f(v), \quad \forall u, v \in \mathbb{R}^3.$$

Παρατηρούμε ότι οι μεταφορές και οι στροφές είναι διαφορίσιμες απεικονίσεις. Επί πλέον είναι αντιστρέψιμες: η αντίστροφη της μ_c είναι η μ_{-c} , δηλαδή είναι επίσης μία μεταφορά, ενώ η αντίστροφη μιάς στροφής είναι και αυτή στροφή. Επομένως μεταφορές και στροφές είναι αμφιδιαφορίσιμες με αντίστροφες απεικονίσεις του ίδιου τύπου. Διαπιστώνεται εύκολα ότι

$$f \circ \mu_c = \mu_{f(c)} \circ f.$$

Η σύνθεση μια μεταφοράς και μια στροφής ονομάζεται **στερεά κίνηση** (rigid motion).

1.9.1 Πρόταση. Έστω $\alpha: J \rightarrow \mathbb{R}^3$ μια καμπύλη μοναδιαίας ταχύτητας, και β καμπύλη που προκύπτει από μια στροφή f της α και μια μεταφορά μ_c , δηλ.

$$\beta(s) = f(\alpha(s)) + c, \quad \forall s \in J.$$

Τότε η β είναι καμπύλη μοναδιαίας ταχύτητας, έχει ίδια καμπυλότητα και στρέψη με την α , και το τριέδρο Frenet της β είναι εικόνα του αντίστοιχου τριέδρου της α μέσω της στροφής f .

Απόδειξη. Συμβολίζουμε με $k_\alpha, \tau_\alpha, T_\alpha, N_\alpha$ και B_α (αντιστ. $k_\beta, \tau_\beta, T_\beta, N_\beta$ και B_β) την καμπυλότητα, την στρέψη και το τριέδρο Frenet της α (αντιστ. της β). Τότε, λόγω της γραμμικότητας της f , της διατήρησης εσωτερικών/ εξωτερικών γωνιών και αποστάσεων, βρίσκουμε διαδοχικά:

$$\begin{aligned} T_\beta(s) &= \beta'(s) = (f \circ \alpha)'(s) = f(\alpha'(s)) = f(T_\alpha(s)), \\ \|T_\beta(s)\| &= \|f(T_\alpha(s))\| = \|T_\alpha(s)\| = 1, \\ T'_\beta(s) &= (f \circ T'_\alpha)'(s) = f(T'_\alpha(s)), \\ k_\beta(s) &= \|T'_\beta(s)\| = \|f(T'_\alpha(s))\| = \|T'_\alpha(s)\| = k_\alpha(s), \\ N_\beta(s) &= \frac{T'_\beta(s)}{k_\beta(s)} = \frac{f(T'_\alpha(s))}{k_\alpha(s)} = f\left(\frac{T'_\alpha(s)}{k_\alpha(s)}\right) = f(N_\alpha(s)), \\ B_\beta(s) &= T_\beta(s) \times N_\beta(s) = f(T_\alpha(s)) \times f(N_\alpha(s)) \\ &= f(T_\alpha(s) \times N_\alpha(s)) = f(B_\alpha(s)), \\ B'_\beta(s) &= (f \circ B'_\alpha)'(s) = f(B'_\alpha(s)), \\ \tau_\beta(s) &= - \langle N_\beta(s), B'_\beta(s) \rangle = - \langle f(N_\alpha(s)), f(B'_\alpha(s)) \rangle \\ &= - \langle N_\alpha(s), B'_\alpha(s) \rangle = \tau_\alpha(s), \end{aligned}$$

οπότε αποδεικνύονται οι ισχυρισμοί της πρότασης. \square

1.9.2 Παρατήρηση. Ας εξηγήσουμε την σχέση $(f \circ \alpha)'(s) = f(\alpha'(s))$ (και τις άλλες ανάλογες), που χρησιμοποιήσαμε στην προηγούμενη απόδειξη.

A' τρόπος: Σύμφωνα με όσα αναφέρουμε στο Παράρτημα B', έχουμε:

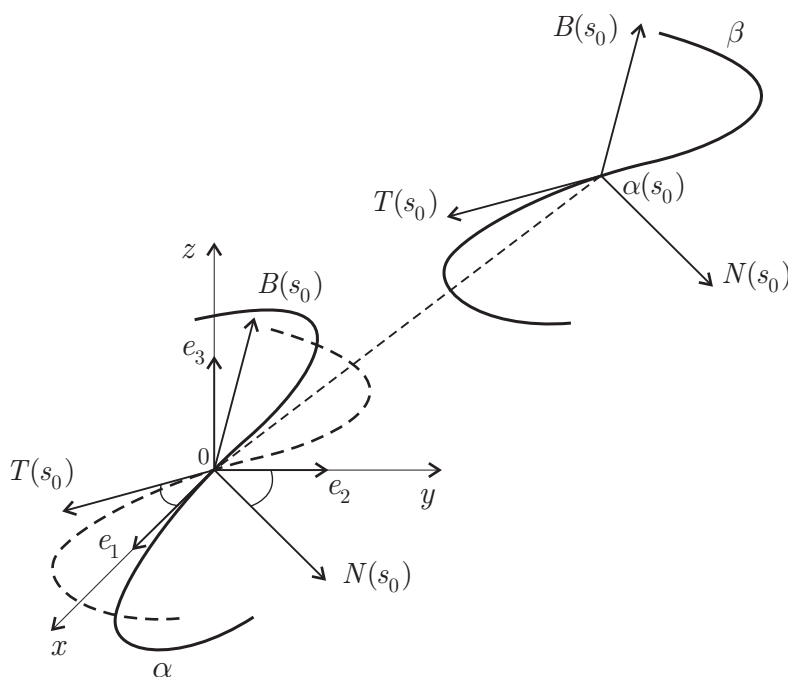
$$\begin{aligned}(f \circ \alpha)'(s) &= [D(f \circ \alpha)(s)](1) = [Df(\alpha(s)) \circ Da(s)](1) \\ &= [f \circ Da(s)](1) = f([Da(s)](1)) = f(\alpha'(s)).\end{aligned}$$

B' τρόπος: Αν M είναι ο πίνακας της f (ως προς την φυσική βάση του \mathbb{R}^3), θα είναι $f(\alpha(s)) = M \cdot (\alpha_1(s), \alpha_2(s), \alpha_3(s))^t$, όπου ο εκθέτης t συμβολίζει τον ανάστροφο πίνακα. Επομένως, η διγραμμικότητα του πολλαπλασιασμού πινάκων, δίνει ότι *

$$\begin{aligned}(f \circ \alpha)'(s) &= M' \cdot (\alpha_1(s), \alpha_2(s), \alpha_3(s))^t + M \cdot (\alpha'_1(s), \alpha'_2(s), \alpha'_3(s))^t \\ &= M \cdot (\alpha'_1(s), \alpha'_2(s), \alpha'_3(s))^t = f(\alpha'(s)).\end{aligned}$$

Ερχόμαστε τώρα στη διατύπωση και απόδειξη του **Θεμελιώδους Θεωρήματος των Καμπυλών**

1.9.3 Θεώρημα. Έστω $k(s) > 0$ και $\tau(s)$, $s \in J = [0, a]$, δύο διαφορίσιμες πραγματικές συναρτήσεις. Τότε υπάρχει μια καμπύλη $\alpha: J \rightarrow \mathbb{R}^3$ μοναδιαίας ταχύτητας με καμπυλότητα k και σπρέψη τ . Επιπλέον, η β είναι μια άλλη κανονική καμπύλη με τις ίδιες ιδιότητες, εάν και μόνον εάν η β διαφέρει από την α κατά μία στερεά κίνηση.



*Φυσικά, στο ίδιο αποτέλεσμα καταλήγουμε και στοιχειωδώς: Αν $M = (b_{ij})_{i,j=1,2,3}$, αρκεί να παραγωγίσουμε τον πίνακα $M \cdot (\alpha_1(s), \alpha_2(s), \alpha_3(s))^t = (\sum_{j=1}^3 b_{ij} \cdot \alpha_j(s))^t_{i=1,2,3}$.

Σχήμα 1.8

Απόδειξη. (1) Υπαρξη: Θεωρούμε το σύστημα των εννέα διαφορικών εξισώσεων

$$T'_i = k \cdot N_i, \quad N'_i = -k \cdot T_i + \tau \cdot B_i, \quad B'_i = -\tau N_i, \quad i = 1, 2, 3,$$

με αρχικές συνθήκες

$$\begin{aligned} T_1(0) = N_2(0) = B_3(0) &= 1, \\ T_2(0) = T_3(0) = N_1(0) = N_3(0) = B_1(0) = B_2(0) &= 0. \end{aligned}$$

Αυτό είναι ένα σύστημα γραμμικών ομογενών διαφορικών εξισώσεων με διαφορίσιμους συντελεστές, και η γενική θεωρία των Διαφορικών Εξισώσεων μας εξασφαλίζει την ύπαρξη λύσης

$$(T_1, T_2, T_3, N_1, N_2, N_3, B_1, B_2, B_3),$$

μοναδικής για τις δεδομένες αρχικές συνθήκες. Θέτουμε

$$T := \sum_{i=1}^3 T_i e_i, \quad N := \sum_{i=1}^3 N_i e_i, \quad B := \sum_{i=1}^3 B_i e_i.$$

Διαπιστώνουμε αμέσως ότι η τριάδα (T, N, B) ικανοποιεί τις εξισώσεις

$$\begin{aligned} T' &= kN \\ N' &= -kT + \tau B \\ B' &= -\tau N \end{aligned}$$

και τις συνθήκες

$$(T(0), N(0), B(0)) = (e_1, e_2, e_3).$$

Θα αποδείξουμε ότι $(T(s), N(s), B(s))$ είναι μια θετικά προσανατολισμένη βάση του \mathbb{R}^3 , για κάθε $s \in J$. Θεωρούμε το γραμμικό ομογενές σύστημα των διαφορικών εξισώσεων

$$\begin{aligned} x' &= 2ky, \\ y' &= kw - kx + \tau z, \\ z' &= kp - \tau y, \\ w' &= -2ky + 2\tau p, \\ p' &= -kz + \tau q - \tau w, \\ q' &= -2\tau p, \end{aligned}$$

με αρχικές συνθήκες

$$x(0) = w(0) = q(0) = 1, \quad y(0) = z(0) = p(0) = 0.$$

Παρατηρούμε ότι η εξάδα των σταθερών συναρτήσεων

$$x = w = q = 1, \quad y = z = p = 0$$

είναι λύση του ανωτέρω συστήματος, αλλά το ίδιο συμβαίνει και με την εξάδα

$$\begin{aligned} x &= \langle T, T \rangle, \\ y &= \langle T, N \rangle, \\ z &= \langle T, B \rangle, \\ w &= \langle N, N \rangle, \\ p &= \langle N, B \rangle, \\ q &= \langle B, B \rangle. \end{aligned}$$

Από το μονοσήμαντο των λύσεων συνάγεται ότι

$$\begin{aligned} \langle T, T \rangle &= \langle N, N \rangle = \langle B, B \rangle = 1, \\ \langle T, N \rangle &= \langle T, B \rangle = \langle N, B \rangle = 0, \end{aligned}$$

επομένως η τριάδα $(T(s), N(s), B(s))$ είναι ορθοκανονική βάση του \mathbb{R}^3 , για κάθε $s \in J$. Η βάση αυτή είναι θετικά προσανατολισμένη: Πράγματι, η απεικόνιση

$$d: J \longrightarrow \mathbb{R}: s \mapsto \begin{vmatrix} T_1(s) & T_2(s) & T_3(s) \\ N_1(s) & N_2(s) & N_3(s) \\ B_1(s) & B_2(s) & B_3(s) \end{vmatrix}$$

είναι συνεχής, παντού διάφορη του μηδενός και $d(0) > 0$. Άρα είναι παντού γνήσια θετική.

Ορίζουμε τώρα την καμπύλη

$$\alpha(s) := \int_0^s T(u) du := \left(\int_0^s T_1(u) du, \int_0^s T_2(u) du, \int_0^s T_3(u) du \right)$$

Προφανώς η α είναι τάξης C^2 . Επίσης, $\|\alpha'\| = \|T\| = 1$, δηλ. η καμπύλη α είναι μοναδιαίας ταχύτητας. Επειδή $T' = kN$, με $\|N\| = 1$, η k είναι η καμπυλότητα της α . Επίσης, το B είναι μοναδιαίο, κάθετο στα T και N , και (T, N, B) είναι θετικά προσανατολισμένη βάση, άρα $B = T \times N$, ενώ

$$\begin{aligned} B' &= (T' \times N) + (T \times N') = \\ &= k(N \times N) + (-k(T \times T) + \tau(T \times B)) = -\tau N, \end{aligned}$$

άρα η τ είναι η στρέψη της α . Παρατηρούμε ότι για την α , που κατασκευάστηκε προηγουμένως, είναι $\alpha(0) = (0, 0, 0)$.

(2) Μονοσήμαντο: Αν $\beta: J = [0, a] \rightarrow \mathbb{R}^3$ είναι μια άλλη καμπύλη μοναδιαίας ταχύτητας, με την ίδια καμπυλότητα k και στρέψη τ , θα δείξουμε ότι οι

α και β διαφέρουν μόνο κατά την θέση στο χώρο. Πράγματι: Συμβολίζουμε με $\{T_\alpha, N_\alpha, B_\alpha\}$ και $\{T_\beta, N_\beta, B_\beta\}$ τα τριέδρα Frenet των α και β , αντιστοίχως, και θεωρούμε την απεικόνιση

$$f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3: xT_\alpha(0) + yN_\alpha(0) + zB_\alpha(0) \mapsto xT_\beta(0) + yN_\beta(0) + zB_\beta(0).$$

Η f είναι ένας γραμμικός ισομορφισμός που στέλνει την ορθοκανονική βάση $(T_\alpha(0), N_\alpha(0), B_\alpha(0))$ στην ορθοκανονική βάση $(T_\beta(0), N_\beta(0), B_\beta(0))$, δηλ. είναι μια στροφή. Θέτουμε $c := \beta(0)$. Τότε η στερεά κίνηση $g := f + c$ στέλνει το $\alpha(0) = (0, 0, 0)$ στο $\beta(0)$, ταυτίζοντας συγχρόνως τα τριέδρα Frenet των δύο καμπυλών $(f \circ \alpha) + c$ και β στο 0. Συμβολίζουμε με $\{T_g, N_g, B_g\}$ το τριέδρο Frenet της $g \circ \alpha = (f \circ \alpha) + c$ και θεωρούμε τις παραγώγους (βλ. προηγούμενη Πρόταση 1.9.1)

$$\begin{aligned} \langle T_g, T_g \rangle' &= \langle T_g', T_g \rangle + \langle T_g, T_g' \rangle = \\ &= k(\langle N_g, T_g \rangle + \langle T_g, N_g \rangle) \\ \langle N_g, N_g \rangle' &= \langle N_g', N_g \rangle + \langle N_g, N_g' \rangle \\ &= \langle -kT_g + \tau B_g, N_g \rangle + \langle N_g, -kT_g + \tau B_g \rangle \\ &= -k(\langle T_g, N_g \rangle + \langle N_g, T_g \rangle) + \\ &\quad + \tau(\langle B_g, N_g \rangle + \langle N_g, B_g \rangle) \\ \langle B_g, B_g \rangle' &= \langle B_g', B_g \rangle + \langle B_g, B_g' \rangle \\ &= -\tau(\langle N_g, B_g \rangle + \langle B_g, N_g \rangle). \end{aligned}$$

Προσθέτοντας κατά μέλη έχουμε

$$(\langle T_g, T_g \rangle + \langle N_g, N_g \rangle + \langle B_g, B_g \rangle)' = 0,$$

απ' την οποίαν προκύπτει η

$$\langle T_g, T_g \rangle + \langle N_g, N_g \rangle + \langle B_g, B_g \rangle = \text{σταθερά}.$$

Επειδή

$$\begin{aligned} T_g(0) &= f(T_\alpha(0)) = T_\beta(0), \\ N_g(0) &= f(N_\alpha(0)) = N_\beta(0), \\ B_g(0) &= f(B_\alpha(0)) = B_\beta(0), \end{aligned}$$

θα είναι

$$(\langle T_g, T_g \rangle + \langle N_g, N_g \rangle + \langle B_g, B_g \rangle)(0) = 3,$$

άρα και

$$(1.9.1) \quad (\langle T_g, T_g \rangle + \langle N_g, N_g \rangle + \langle B_g, B_g \rangle)(s) = 3, \quad \forall s \in J.$$

Ομως, για οποιαδήποτε $u, v \in \mathbb{R}^3$, είναι $\langle u, v \rangle = \|u\| \cdot \|v\| \cos \theta \leq \|u\| \cdot \|v\|$. Στην σχέση (1.9.1) όλα τα διανύσματα έχουν μήκος 1, άρα κάθε εσωτερικό γινόμενο πρέπει να παίρνει την μέγιστη τιμή του 1, πράγμα που συμβαίνει όταν $\cos \theta = 1$, οπότε $T_g(s) = T_\beta(s)$, $N_g(s) = N_\beta(s)$ και $B_g(s) = B_\beta(s)$, για κάθε $s \in J$. Η ταύτιση των παραπάνω τριέδρων Frenet συνεπάγεται και την ταύτιση των καμπυλών $g \circ \alpha$ και β , αφού $(g \circ \alpha)(0) = \beta(0) = c$ και

$$\beta(s) = \int_0^s T_\beta(u) du + c = \int_0^s T_g(u) du + c = (g \circ \alpha)(s)$$

για κάθε $s \in J$. □

Κλείνοντας, σημειώνουμε ότι οι εξισώσεις $k = k(s) > 0$ και $\tau = \tau(s)$ καλούνται **φυσικές** ή **εσωτερικές εξισώσεις** (natural or intrinsic equations) μιάς καμπύλης στον χώρο, επειδή προσδιορίζουν πλήρως την καμπύλη (εκτός από την θέση της).

1.10 Επίπεδες καμπύλες

Στην παράγραφο αυτή θα μελετήσουμε τις ιδιαίτερες ιδιότητες που έχουν οι επίπεδες καμπύλες. Ήδη γνωρίζουμε ότι μια καμπύλη είναι επίπεδη εάν και μόνον εάν η στρέψη της είναι μηδέν. Μπορούμε πάντα να επιλέξουμε σύστημα συντεταγμένων ώστε η καμπύλη να παίρνει τιμές στο επίπεδο των x και y .

Έστω λοιπόν μια επίπεδη καμπύλη $\beta: I \rightarrow \mathbb{R}^2$, μοναδιαίας ταχύτητας. Τότε $\beta = (\beta_1, \beta_2)$, οπότε

$$T(s) := (T_1(s), T_2(s)) = (\beta_1'(s), \beta_2'(s))$$

και

$$\|T(s)\| = (T_1(s)^2 + T_2(s)^2)^{1/2} = 1.$$

Απ' το άλλο μέρος, το κάθετο διάνυσμα $N(s)$ (όπως το γνωρίζουμε από την προηγούμενη γενική θεωρία) θα βρίσκεται και αυτό στο επίπεδο της καμπύλης, αφού

$$N(s) = \frac{1}{k(s)} T'(s) = \frac{1}{k(s)} \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{T(s + \Delta s) - T(s)}{\Delta s}$$

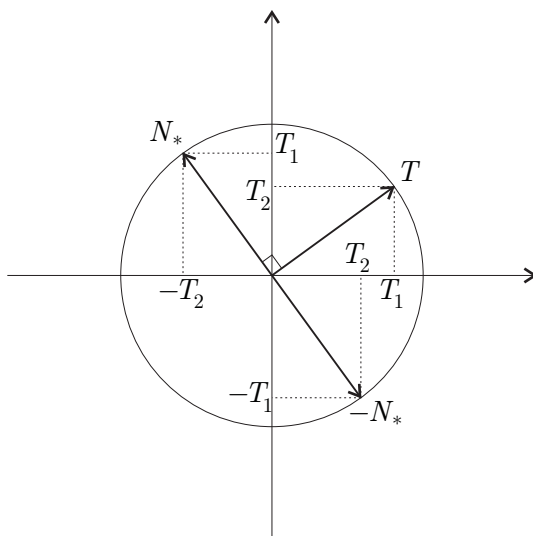
και τα $T(s)$, $T(s + \Delta s)$ βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο. Έτσι, ενώ στον χώρο υπάρχουν άπειρα μοναδιαία διανύσματα κάθετα στο $T(s)$, στο επίπεδο υπάρχουν μόνο δύο: το $(-T_2(s), T_1(s))$ και το αντίθετό του $(T_2(s), -T_1(s))$. Αυτές είναι και οι μόνες δυνατές τιμές του πρώτου κάθετου διανύσματος $N(s)$ (βλ. Σχήμα 1.9). Παρατηρούμε ότι αν $N(s) = (-T_2(s), T_1(s))$, το ζεύγος $(T(s), N(s))$

είναι θετικά προσανατολισμένη βάση του \mathbb{R}^2 , ενώ για $N(s) = (T_2(s), -T_1(s))$, είναι αρνητικά προσανατολισμένη. Θέτουμε

$$N_* := (-T_2, T_1),$$

εξασφαλίζοντας με αυτόν τον τρόπο τον θετικό προσανατολισμό κάθε ζεύγους $(T(s), N_*(s))$. Τότε

$$N_* = \pm N = \pm \frac{T'}{k} = \frac{T'}{\pm k}.$$



Σχήμα 1.9

Προσαρτώντας το πρόσημο στην καμπυλότητα k , παίρνουμε την **προσημασμένη** ή **επίπεδη καμπυλότητα** k_* , δηλαδή

$$k_* := \pm k \quad \text{οπότε} \quad k = |k_*|.$$

Επομένως,

$$N_* = \frac{T'}{k_*},$$

απ' όπου προκύπτει η ανάλογη της (F. 1) [βλ. Θεώρημα 1.3.4].

$$(1.10.1) \quad T' = k_* N_*.$$

Για να βρούμε την ανάλογη της (F. 2), εργαζόμαστε όπως και στο Θεώρημα 1.3.4. Συνοπτικά έχουμε: Αφού $(T(s), N_*(s))$ είναι (ορθοκανονική) βάση του

\mathbb{R}^2 , για το $N'_*(s)$ θα υπάρχουν μονοσήμαντα ορισμένα $a(s), b(s) \in \mathbb{R}$, ώστε $N'_*(s) = a(s)T(s) + b(s)N_*(s)$, για κάθε $s \in I$, άρα $N'_* = aT + bN_*$. Συνεπώς,

$$\begin{aligned} \langle N_*, T \rangle = 0 &\Rightarrow \langle N'_*, T \rangle + \langle N_*, T' \rangle = 0 \\ &\Rightarrow \langle aT + bN_*, T \rangle + \langle N_*, k_*N_* \rangle = 0 \\ &\Rightarrow a + k_* = 0 \\ &\Rightarrow a = -k_*, \end{aligned}$$

και ανάλογα

$$\begin{aligned} \langle N_*, N_* \rangle = 1 &\Rightarrow \langle N'_*N_* \rangle = 0 \\ &\Rightarrow \langle aT + bN_*, N_* \rangle = 0 \\ &\Rightarrow b = 0, \end{aligned}$$

άρα καταληγουμε στην

$$(1.10.2) \quad N'_* = -k_*T.$$

Οι σχέσεις (1.10.1) και (1.10.2) αποτελούν το ανάλογο των τύπων Frenet-Serret μιας επίπεδης καμπύλης μοναδιαίας ταχύτητας.

Από την (1.10.1) προκύπτει ότι $\langle T', N_* \rangle = \langle k_*N_*, N_* \rangle = k_*$, δηλαδή

$$(1.10.2') \quad k_* = \langle T', N_* \rangle.$$

Αντικαθιστώντας στην τελευταία ισότητα τα $T' = (\beta''_1, \beta''_2)$ και $N_* = (-\beta'_2, \beta'_1)$, βρίσκουμε την επόμενη έκφραση της προσημασμένης καμπυλότητας μέσω των συντεταγμένων της καμπύλης (μοναδιαίας ταχύτητας) β :

$$(1.10.3)$$

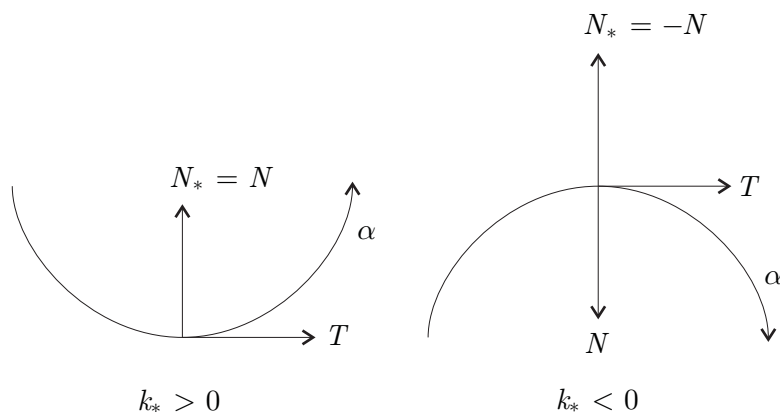
$$k_* = \beta'_1\beta''_2 - \beta''_1\beta'_2.$$

Θα δούμε τώρα την γεωμετρική σημασία της προσημασμένης καμπυλότητας: Ας υποθέσουμε πρώτα ότι $k_* > 0$. Στην περίπτωση αυτή είναι $k_* = k$ και

$$N_* = \frac{T'}{k_*} = \frac{T'}{k} = N.$$

Επομένως, όταν διατρέχουμε την καμπύλη κατά την φορά που αντιστοιχεί στην αύξηση της παραμέτρου (χρόνου), το κοίλον μέρος της καμπύλης βρίσκεται προς το "αριστερό" μέρος του εφαπτομένου διανύσματος, όπως φαίνεται και

στο πρώτο από τα Σχήματα 1.10.



Σχήματα 1.10

Αν υποθέσουμε ότι $k_* < 0$, τότε $k_* = -k$ και $N_* = -N$. Επομένως, διατρέχοντας την καμπύλη με τον ίδιο τρόπο, όπως πριν, το κοίλον μέρος της καμπύλης βρίσκεται προς το "δεξιό" μέρος του εφαπτομένου διανύσματος (βλ. το δεύτερο από τα Σχήματα 1.10).

Στη συνέχεια θα υπολογίσουμε το εφαπτόμενο διάνυσμα, το πρώτο κάθετο διάνυσμα και την καμπυλότητα μιάς τυχούσας επίπεδης καμπύλης, μέσω των συντεταγμένων της. Ακριβέστερα έχουμε την

1.10.1 Πρόταση. Έστω $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ μια τυχαία επίπεδη κανονική καμπύλη (όχι κατ' ανάγκην μοναδιαίας ταχύτητας). Τότε ισχύουν οι σχέσεις

$$(1.10.4) \quad T(t) = \left(\frac{\alpha'_1(t)}{\|\alpha'(t)\|}, \frac{\alpha'_2(t)}{\|\alpha'(t)\|} \right),$$

$$(1.10.5) \quad N_*(t) = \left(-\frac{\alpha'_2(t)}{\|\alpha'(t)\|}, \frac{\alpha'_1(t)}{\|\alpha'(t)\|} \right),$$

$$(1.10.6) \quad k_*(t) = \frac{\alpha'_1(t)\alpha''_2(t) - \alpha''_1(t)\alpha'_2(t)}{\|\alpha'(t)\|^3}.$$

Απόδειξη. Έστω $\beta = \alpha \circ h: J \rightarrow \mathbb{R}^2$ η αναπαραμέτρησή της α μέσω του μήκους τόξου. Σύμφωνα με την (1.5.1), έχουμε ότι

$$T(t) = \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|} = \left(\frac{\alpha'_1(t)}{\|\alpha'(t)\|}, \frac{\alpha'_2(t)}{\|\alpha'(t)\|} \right),$$

δηλαδή παίρνουμε την (1.10.4).

Η (1.10.5) είναι συνέπεια της (1.10.4) και του ορισμού του $N_*(t)$ [ισχύει ό,τι και για το $N_*(s)$].

Για τον υπολογισμό της καμπυλότητας προχωρούμε ως εξής: Αν συμβολίσουμε με k_*^β την προσημασμένη καμπυλότητα της β , τότε, σύμφωνα με την (1.10.3) και την σχέση (iv) του Ορισμού 1.4.1 (για $\bar{k} = k_*^\beta$), έχουμε ότι

$$(1.10.7) \quad k_*(t) := k_*^\beta(s(t)) = \beta_1'(s(t))\beta_2''(s(t)) - \beta_1''(s(t))\beta_2'(s(t)),$$

όπου s η συνάρτηση μήκους τόξου. Επειδή $\beta_i = \alpha_i \circ h$ ($i = 1, 2$), θα είναι

$$(1.10.8) \quad \beta_i'(s(t)) = (\alpha_i \circ h)'(s(t)) = \alpha_i'(h(s(t))) \cdot h'(s(t)) = \frac{\alpha_i'(t)}{s'(t)},$$

για κάθε $t \in I$ (βλ. σχετικά και το Θεώρημα 1.2.2). Από την προηγούμενη προκύπτει ότι

$$\beta_i' \circ s = \frac{\alpha_i'}{s'} \quad \text{ή} \quad \beta_i' = \frac{\alpha_i'}{s'} \circ h.$$

Η παραγώγιση της τελευταίας δίνει ότι

$$(1.10.9) \quad \begin{aligned} \beta_i''(s(t)) &= \left(\frac{\alpha_i'}{s'} \circ h \right)'(s(t)) \\ &= \left(\frac{\alpha_i'}{s'} \right)'(h(s(t))) \cdot h'(s(t)) \\ &= \left(\frac{\alpha_i'}{s'} \right)'(t) \cdot \frac{1}{s'(t)} \\ &= \frac{\alpha_i''(t) \cdot s'(t) - \alpha_i'(t) \cdot s''(t)}{s'(t)^2} \cdot \frac{1}{s'(t)} \\ &= \frac{\alpha_i''(t) \cdot s'(t) - \alpha_i'(t) \cdot s''(t)}{s'(t)^3}. \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας τις (1.10.8) και (1.10.9) στην (1.10.7) βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned} k_*(t) &= \frac{1}{s'(t)^4} \cdot (\alpha_1'(t)\alpha_2''(t)s'(t) - \alpha_1''(t)\alpha_2'(t)s'(t)) \\ &= \frac{1}{s'(t)^3} \cdot (\alpha_1'(t)\alpha_2''(t) - \alpha_1''(t)\alpha_2'(t)) \\ &= \frac{\alpha_1'(t)\alpha_2''(t) - \alpha_1''(t)\alpha_2'(t)}{\|\alpha'(t)\|^3}, \end{aligned}$$

όπως ακριβώς αναφέρεται στην εκφώνηση της πρότασης. \square

Ας δούμε τώρα πώς επηρεάζει η φορά διαγραφής της καμπύλης τα μεγέθη που σχετίζονται με αυτήν.

1.10.2 Πρόταση. Υποθέτουμε ότι $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ είναι μια επίπεδη καμπύλη και $\beta := \alpha \circ h: J \rightarrow \mathbb{R}^2$ μια αναπαραμέτρηση της α αντίθετου προσανατολισμού. Τότε το εφαπτόμενο διάνυσμα, το (πρώτο) κάθετο διάνυσμα, και η καμπυλότητα αντιστρέφονται, δηλαδή ισχύουν οι σχέσεις

$$(1.10.10) \quad T^\beta(t) = -T^\alpha(h(t)),$$

$$(1.10.11) \quad N_*^\beta(t) = -N_*^\alpha(h(t)),$$

$$(1.10.12) \quad k_*^\beta(t) = -k_*^\alpha(h(t)).$$

Απόδειξη. Αφού η h αλλάζει τον προσανατολισμό, είναι $h' < 0$. Επομένως

$$\begin{aligned} T^\beta(t) &= \frac{\beta'(t)}{\|\beta'(t)\|} = \frac{(\alpha \circ h)'(t)}{\|(\alpha \circ h)'(t)\|} = \\ &= \frac{\alpha'(h(t))h'(t)}{\|\alpha'(h(t))\| |h'(t)|} = -\frac{\alpha'(h(t))}{\|\alpha'(h(t))\|} = -T^\alpha(h(t)). \end{aligned}$$

Αναλόγως,

$$N_*^\beta(t) = (-T_2^\beta(t), T_1^\beta(t)) = (T_2^\alpha(h(t)), -T_1^\alpha(h(t))) = -N_*^\alpha(h(t)).$$

Τέλος, λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι $(\alpha \circ h)_i(t) = (\alpha_i \circ h)(t)$, για κάθε $t \in I$ και $i = 1, 2$, έχουμε διαδοχικά ότι

$$\begin{aligned} (\alpha \circ h)'_i(t) &= \alpha'_i(h(t)) \cdot h'(t); \quad \forall t \in I, \\ (\alpha \circ h)''_i &= (\alpha'_i \circ h) \cdot h', \\ (\alpha \circ h)''_i(t) &= \alpha''_i(h(t)) \cdot h'(t)^2 + \alpha'_i(h(t)) \cdot h''(t), \quad \forall t \in I. \end{aligned}$$

Επομένως, βάσει της (1.10.6),

$$\begin{aligned} k_*^\beta(t) &= \frac{\beta'_1(t)\beta''_2(t) - \beta''_1(t)\beta'_2(t)}{\|\beta'(t)\|^3} \\ &= \frac{(\alpha \circ h)'_1(t)(\alpha \circ h)''_2(t) - (\alpha \circ h)''_1(t)(\alpha \circ h)'_2(t)}{\|(\alpha \circ h)'(t)\|^3} \\ &= \frac{h'(t)^3}{\|h'(t)\|^3} \cdot \frac{\alpha'_1(h(t))\alpha''_2(h(t)) - \alpha''_1(h(t))\alpha'_2(h(t))}{\|\alpha'(h(t))\|^3} \\ &= -k_*^\alpha(h(t)), \end{aligned}$$

με την οποίαν και κλείνει η απόδειξη. \square

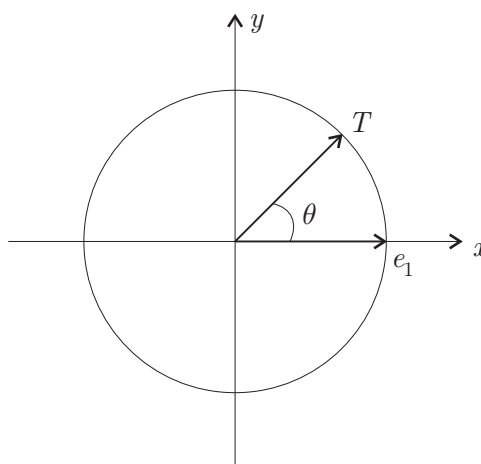
Η ακόλουθη πρόταση μας προσφέρει μια γεωμετρική ερμηνεία της επίπεδης καμπυλότητας.

1.10.3 Πρόταση. Έστω $\alpha: J \rightarrow \mathbb{R}^2$ μια επίπεδη καμπύλη μοναδιαίας ταχύτητας. Τότε ισχύει η σχέση

$$(1.10.13) \quad k_* = \theta',$$

όπου $\theta(s)$ είναι η γωνία που σχηματίζουν τα διανύσματα $T(s)$ και e_1 .

Σχετικώς παραθέτουμε το επόμενο σχήμα:



Σχήμα 1.11

Απόδειξη. Επειδή, για κάθε $s \in J$, το διάνυσμα $T(s)$ είναι στοιχείο του μοναδιαίου κύκλου, θα είναι $T(s) = (\cos \theta(s), \sin \theta(s))$, όπου $\theta: J \rightarrow \mathbb{R}$ διαφορίσιμη απεικόνιση. Τότε

$$\begin{aligned} T'(s) &= (-\sin \theta(s) \cdot \theta'(s), \cos \theta(s) \cdot \theta'(s)), \\ N_*(s) &= (-\sin \theta(s), \cos \theta(s)), \end{aligned}$$

οπότε η (1.10.2') συνεπάγεται ότι

$$\begin{aligned} k_*(s) &= \langle T'(s), N_*(s) \rangle = \\ &= \langle (-\theta'(s) \sin \theta(s), \theta'(s) \cos \theta(s)), (-\sin \theta(s), \cos \theta(s)) \rangle = \\ &= \theta'(s) \sin^2 \theta(s) + \theta'(s) \cos^2 \theta(s) = \theta'(s), \end{aligned}$$

που αποδεικνύει το ζητούμενο. \square

Δεδομένης της μηδενικής στρέψης μιας επίπεδης καμπύλης, αρκεί η καμπυλότητά της για να την χαρακτηρίσει. Επομένως, το Θεμελιώδες Θεώρημα των Καμπυλών παίρνει την επόμενη ειδική μορφή, με την οποία κλείνουμε την παράγραφο αυτή.

1.10.4 Θεώρημα. Έστω $k_*: J = [0, a] \rightarrow \mathbb{R}$ μια διαφορίσιμη συνάρτηση. Τότε υπάρχει επίπεδη καμπύλη μοναδιαίας ταχύτητας $\alpha: J \rightarrow \mathbb{R}^2$, της οποίας η επίπεδη καμπυλότητα είναι η k_* . Επίσης, αν $\beta: J \rightarrow \mathbb{R}^2$ είναι καμπύλη με τις ίδιες ιδιότητες, τότε υπάρχει στερεά κίνηση g του επιπέδου, τέτοια ώστε $g \circ \alpha = \beta$.

Απόδειξη. Θέτουμε

$$\phi(s) := \int_0^s k_*(t) dt$$

και

$$\alpha(s) := (\alpha_1(s), \alpha_2(s)) = \left(\int_0^s \cos \phi(u) du, \int_0^s \sin \phi(u) du \right).$$

Επαληθεύεται αμέσως ότι η α είναι διαφορίσιμη καμπύλη μοναδιαίας ταχύτητας και, βάσει της (1.10.3), ότι η επίπεδη καμπυλότητά της είναι ακριβώς η δοθείσα k_* .

Έστω τώρα β μια άλλη καμπύλη με τις ίδιες ιδιότητες. Αν T_β είναι η ταχύτητα της β και θ είναι η γωνία που σχηματίζει η T_β με το e_1 , από την σχέση (1.10.13) έχουμε

$$(1.10.14) \quad \theta(s) = \int_0^s k_*(t) dt + \theta_o = \phi(s) + \theta_o,$$

οπότε

$$(1.10.15) \quad \begin{aligned} (\cos \theta(s), \sin \theta(s)) &= (\cos(\phi(s) + \theta_o), \sin(\phi(s) + \theta_o)) \\ &= (\cos \theta_o \cos \phi(s) - \sin \theta_o \sin \phi(s), \\ &\quad \cos \theta_o \sin \phi(s) + \sin \theta_o \cos \phi(s)) \\ &= \begin{pmatrix} \cos \theta_o & -\sin \theta_o \\ \sin \theta_o & \cos \theta_o \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \phi(s) \\ \sin \phi(s) \end{pmatrix} \\ &= f(\cos \phi(s), \sin \phi(s)), \end{aligned}$$

όπου με f συμβολίζουμε την γραμμική απεικόνιση, που αντιστοιχεί στον αμέσως προηγούμενο 2×2 πίνακα, και ορίζει την στροφή του επιπέδου κατά την γωνία θ_o , δηλαδή

$$f(x, y) = (x \cos \theta_o - y \sin \theta_o, x \sin \theta_o + y \cos \theta_o), \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Στη συνέχεια, η σχέση

$$\beta'(s) = (\beta'_1(s), \beta'_2(s)) = T_\beta(s) = (\cos \theta(s), \sin \theta(s))$$

δίνει ότι

$$\beta(s) = \left(\int_0^s \cos \theta(u) du + x_o, \int_0^s \sin \theta(u) du + y_o \right),$$

όπου x_o, y_o σταθερές. Άρα, χρησιμοποιώντας τις πρώτες ισότητες από τις (1.10.15), η παραπάνω σχέση για το $\beta(s)$ μετασχηματίζεται στην

$$\begin{aligned} \beta(s) &= \left(\int_0^s [\cos \theta_o \cos \phi(u) - \sin \theta_o \sin \phi(u)] du, \right. \\ &\quad \left. \int_0^s [\cos \theta_o \sin \phi(u) + \sin \theta_o \cos \phi(u)] du \right) + (x_o, y_o) = \\ &= \left(\cos \theta_o \int_0^s \cos \phi(u) du - \sin \theta_o \int_0^s \sin \phi(u) du, \right. \\ &\quad \left. \cos \theta_o \int_0^s \sin \phi(u) du + \sin \theta_o \int_0^s \cos \phi(u) du \right) + (x_o, y_o) = \\ &= f \left(\int_0^s \cos \phi(u) du, \int_0^s \sin \phi(u) du \right) + (x_o, y_o) = \\ &= f(\alpha(s)) + (x_o, y_o), \end{aligned}$$

που αποδεικνύει το ζητούμενο. □

1.11 Ασκήσεις

Άσκηση 1. Να βρεθούν: (i) Μία παραμέτρηση α του ευθυγράμμου τμήματος, που ενώνει δύο (διαφορετικά) σημεία P και Q του \mathbb{R}^3 . (ii) Το μήκος και η καμπυλότητα της α . (iii) Μία αναπαραμέτρηση β της α μοναδιαίας ταχύτητας. (iv) Το μήκος και η καμπυλότητα της β .

Λύση. (i) Αν p, q είναι τα αντίστοιχα διανύσματα θέσης των P, Q , το ευθύγραμμο τμήμα \overline{PQ} είναι εικόνα της παραμετρημένης καμπύλης

$$\alpha: [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^3: t \mapsto \alpha(t) := p + t(q - p).$$

(ii) Παρατηρούμε ότι

$$\|\alpha'(t)\| = \|q - p\| \neq 0,$$

δηλαδή η καμπύλη είναι κανονική, και το μήκος της δίνεται από την σχέση

$$L(\alpha) = \int_0^1 \|\alpha'(u)\| du = \int_0^1 \|q - p\| du = \|q - p\|.$$

Απ' το άλλο μέρος, επειδή $\alpha''(t) = 0$, το Θεώρημα 1.4.2 συνεπάγεται ότι $k_\alpha(t) = 0$, για κάθε $t \in [0, 1]$.

(iii) Επειδή το μήκος τόξου της α είναι

$$s(t) = \int_0^t \|\alpha'(u)\| du = \int_0^t \|q - p\| du = \|q - p\|t,$$

βλέπουμε ότι η απεικόνιση

$$s: [0, 1] \longrightarrow [0, \|q - p\|]: t \mapsto \|q - p\|t$$

είναι αμφιδιαφόριση με αντίστροφη την

$$h := s^{-1}: [0, \|q - p\|] \longrightarrow [0, 1]: s \mapsto \frac{s}{\|q - p\|},$$

οπότε η ζητούμενη αναπαραμέτρηση είναι η $\beta: [0, \|q - p\|] \rightarrow \mathbb{R}^3$ με

$$\beta(s) := (\alpha \circ h)(s) = \alpha \left(\frac{s}{\|q - p\|} \right) = p + \frac{s}{\|q - p\|}(q - p).$$

(iv) Επειδή $\beta'(s) = \frac{q - p}{\|q - p\|}$, το μήκος της β είναι επίσης

$$L(\beta) = \int_0^{\|q-p\|} \|\beta'(u)\| du = \int_0^{\|q-p\|} du = \|q - p\|.$$

Τέλος, για την καμπυλότητα k_β της β έχουμε ότι $T(s) = \beta'(s) = \frac{q - p}{\|q - p\|}$, άρα $T'(s) = 0$ και [από την (1.3.2)] $k_\beta(s) = 0$.

Άσκηση 2. Ο κύκλος με κέντρο $(0, 0)$ και ακτίνα r είναι εικόνα της καμπύλης

$$\alpha: [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2: t \mapsto (r \cos t, r \sin t).$$

Να δείξετε ότι: (i) Το διάνυσμα της ταχύτητας είναι κάθετο στην ακτίνα. (ii) Το διάνυσμα της επιτάχυνσης κατευθύνεται προς το κέντρο. (iii) Να υπολογίσετε το μήκος της α . (iv) Να βρεθεί αναπαραμέτρηση β της α με μοναδιαία ταχύτητα και να υπολογιστεί η καμπυλότητα k της β . (v) Ποιά είναι η επίπεδη καμπυλότητα k_*^α της α ;

Λύση. (i) Κάθε χρονική στιγμή t η ακτίνα συμπίπτει με την θέση του κινητού, δηλαδή με το σημείο $\alpha(t)$ και η ταχύτητα είναι

$$\alpha'(t) = (-r \sin t, r \cos t).$$

Επομένως,

$$\langle \alpha(t), \alpha'(t) \rangle = -r^2 \cos t \sin t + r^2 \cos t \sin t = 0,$$

που σημαίνει ότι $\alpha(t) \perp \alpha'(t)$.

(ii) $\alpha''(t) = (-r \cos t, -r \sin t) = -\alpha(t)$.

(iii) Για το μήκος της α έχουμε $\|\alpha'(t)\| = r$, άρα

$$L(\alpha) = \int_0^{2\pi} \|\alpha'(t)\| dt = \int_0^{2\pi} r dt = 2\pi r.$$

(iv) Είναι $\|\alpha'(t)\| = r \neq 0$. Ορίζουμε την συνάρτηση μήκους τόξου

$$s: [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}: t \mapsto s(t) := \int_0^t \|\alpha'(u)\| du = rt.$$

Άρα η $s: [0, 2\pi] \rightarrow [0, 2\pi r]$ είναι αμφιδιαφόριση, με αντίστροφη την

$$h := s^{-1}: [0, 2\pi r] \longrightarrow [0, 2\pi]: s \rightarrow \frac{s}{r},$$

και η ζητούμενη αναπαραμέτρηση είναι η $\beta: [0, 2\pi r] \rightarrow \mathbb{R}^2$ με

$$\beta(s) = (\alpha \circ h)(s) = \alpha\left(\frac{s}{r}\right) = \left(r \cos \frac{s}{r}, r \sin \frac{s}{r}\right).$$

Για την καμπυλότητα της τελευταίας έχουμε ότι

$$T(s) = \beta'(s) = \left(-\sin \frac{s}{r}, \cos \frac{s}{r}\right),$$

απ' όπου παίρνουμε

$$T'(s) = \left(-\frac{1}{r} \cos \frac{s}{r}, -\frac{1}{r} \sin \frac{s}{r}\right),$$

και

$$k(s) = \|T'(s)\| = \frac{1}{r}.$$

Απ' το άλλο μέρος, η (1.10.6) μας δίνει ότι

$$k_*^\alpha(t) = \frac{1}{r^3}(r^2 \sin^2 t + r^2 \cos^2 t) = \frac{1}{r}.$$

Άσκηση 3. Να βρεθεί μία κανονική παραμέτρηση της παραβολής $y = x^2$ και η αντίστοιχη καμπυλότητα. Ποιόν γεωμετρικό τόπο παριστάνει η $\beta(t) = (t^3, t^6)$, με $t \in \mathbb{R}$;

Λύση. Προφανώς, η

$$\alpha(t) = (t, t^2); \quad t \in \mathbb{R},$$

είναι μία παραμέτρηση της αναφερόμενης παραβολής. Είναι κανονική, αφού

$$\alpha'(t) = (1, 2t) \neq 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Επειδή η α δεν είναι μοναδιαίας ταχύτητας και $\alpha''(t) = (0, 2)$, η (1.10.6) δίνει ότι

$$k_*(t) = 2(1 + 4t^2)^{-3/2} = k(t).$$

Η β είναι μία καμπύλη της οποίας η εικόνα είναι η ίδια παραβολή, όμως δεν είναι κανονική, αφού $\beta'(t) = (3t^2, 6t^5)$, άρα το $t = 0$ είναι σημείο ανωμαλίας.

Άσκηση 4. Δίνεται μία διαφορίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Να βρεθεί μία κανονική παραμέτρηση α του γραφήματος της και να προσδιοριστούν τα διανύσματα T , N_* και η καμπυλότητα k_* της α .

Λύση. Η καμπύλη $\alpha(t) = (t, f(t))$, $t \in \mathbb{R}$, έχει εικόνα ακριβώς το γράφημα της f . Για την α έχουμε ότι

$$\alpha'(t) = (1, f'(t)) \quad \text{και} \quad \alpha''(t) = (0, f''(t)).$$

Επειδή

$$\|\alpha'(t)\| = (1 + f'(t)^2)^{1/2} \neq 0; \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

έχουμε κανονική καμπύλη, που εν γένει δεν είναι μοναδιαίας ταχύτητας. Οπότε, σύμφωνα με τους τύπους της Πρότασης 1.10.1, τα ζητούμενα διανύσματα είναι:

$$T(t) = \frac{1}{\|\alpha'(t)\|} (\alpha'_1(t), \alpha'_2(t)) = \left(\frac{1}{(1 + f'(t)^2)^{1/2}}, \frac{f'(t)}{(1 + f'(t)^2)^{1/2}} \right),$$

$$N_*(t) = (-T_2(t), T_1(t)) = \left(-\frac{f'(t)}{(1 + f'(t)^2)^{1/2}}, \frac{1}{(1 + f'(t)^2)^{1/2}} \right),$$

ενώ η επίπεδη/προσημασμένη καμπυλότητα δίνεται από την σχέση

$$k_*(t) = \frac{1 \cdot f''(t) - 0 \cdot f'(t)}{(1 + f'(t)^2)^{3/2}} = \frac{f''(t)}{(1 + f'(t)^2)^{3/2}}.$$

Από την τελευταία βλέπουμε ότι το πρόσημο της k_* συμπίπτει με αυτό της $f''(t)$, άρα η γεωμετρική συμπεριφορά της α (ως προς τα κοίλα της) βρίσκεται σε συμφωνία με τα γνωστά συμπεράσματα του Απειροστικού Λογισμού για τις συνήθεις συναρτήσεις και το γράφημά τους.

Άσκηση 5. Να βρεθούν το μήκος, η καμπυλότητα και η στρέψη της καμπύλης

$$\alpha: [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3: t \mapsto \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos t, \sin t, \frac{1}{\sqrt{2}} \cos t \right).$$

Λύση. Είναι

$$T(t) = \alpha'(t) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \sin t, \cos t, -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin t \right),$$

άρα

$$\|\alpha'(t)\| = \left(\frac{1}{2} \sin^2 t + \cos^2 t + \frac{1}{2} \sin^2 t \right)^{1/2} = 1,$$

δηλαδή η α είναι καμπύλη μοναδιαίας ταχύτητας, με

$$L(\alpha) = \int_0^{2\pi} \|\alpha'(t)\| dt = \int_0^{2\pi} 1 dt = 2\pi.$$

Για την καμπυλότητα έχουμε

$$T'(t) = \alpha''(t) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \cos t, -\sin t, -\frac{1}{\sqrt{2}} \cos t \right),$$

οπότε

$$k(t) = \|T'(t)\| = \left(\frac{1}{2} \cos^2 t + \sin^2 t + \frac{1}{2} \cos^2 t \right)^{1/2} = 1.$$

Παρατηρούμε ότι

$$B(t) = T(t) \times N(t) = \alpha'(t) \times \alpha''(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-e_1 + e_3) = c$$

άρα $B'(t) = 0$, και

$$\tau(t) = -\langle N(t), B'(t) \rangle = 0,$$

δηλαδή, τελικά, η α είναι επίπεδη καμπύλη.

Άσκηση 6. Να υπολογιστεί η καμπυλότητα και η επίπεδη καμπυλότητα της καμπύλης

$$\alpha(t) = (a \cos t, b \sin t), \quad t \in [0, 2\pi], \quad a, b > 0.$$

Ποιά είναι η εικόνα της;

Λύση. Θέτοντας $x = a \cos t$ και $y = b \sin t$, έχουμε ότι

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

άρα πρόκειται για έλλειψη.

Βρίσκουμε:

$$\alpha'(t) = (-a \sin t, b \cos t) \equiv (-a \sin t, b \cos t, 0),$$

άρα

$$\|\alpha'(t)\| = (a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{1/2}.$$

Επίσης

$$\alpha''(t) = (-a \cos t, -b \sin t) \equiv (-a \cos t, -b \sin t, 0)$$

και

$$\alpha'(t) \times \alpha''(t) = abe_3,$$

απ' όπου

$$\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\| = ab,$$

και τελικά

$$k(t) = \frac{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|}{\|\alpha'(t)\|^3} = \frac{ab}{(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{3/2}} = k_*(t).$$

Άσκηση 7. Η (διαφορίσιμη) καμπύλη

$$\alpha: [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3: t \mapsto (r \cos t, r \sin t, bt); \quad r > 0, \quad b \in \mathbb{R}_*.$$

περιγράφει μία **κυκλική έλικα** (circular helix), η οποία απεικονίζεται στο παρακάτω Σχήμα 1.12. (i) Να βρεθεί αναπαραμέτρηση β της α μοναδιαίας ταχύτητας. (ii) Να βρεθούν καμπυλότητα και η στρέψη της β . (iii) Να αποδειχθεί ότι η γωνία θ μεταξύ της εφαπτομένης σε κάθε σημείο της έλικας και του άξονα $z'Oz$ είναι σταθερή. (iv) Να αποδειχθεί ότι η γωνία ϕ μεταξύ της δεύτερης καθέτου σε κάθε σημείο της έλικας και του άξονα $z'Oz$ είναι σταθερή.

Λύση. (i) Είναι

$$\alpha'(t) = (-r \sin t, r \cos t, b),$$

επομένως

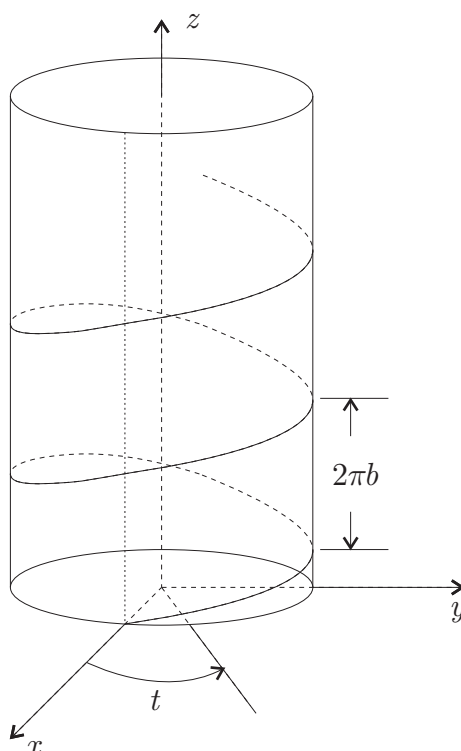
$$\|\alpha'(t)\| = (r^2 + b^2)^{1/2} =: c > 0.$$

Θεωρούμε την

$$s: [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}: t \mapsto \int_0^t \|\alpha'(u)\| du = tc$$

και την αντίστροφή της

$$h: [0, 2\pi c] \longrightarrow [0, 2\pi]: s \mapsto \frac{s}{c}.$$



Σχήμα 1.12

Η ζητούμενη αναπαραμέτρηση είναι η

$$\beta: [0, 2\pi c] \longrightarrow \mathbb{R}^3: s \mapsto \beta(s) = (\alpha \circ h)(s) = \left(r \cos \frac{s}{c}, r \sin \frac{s}{c}, \frac{b}{c}s \right).$$

(ii) Για την καμπυλότητα της β έχουμε

$$T(s) = \beta'(s) = \left(-\frac{r}{c} \sin \frac{s}{c}, \frac{r}{c} \cos \frac{s}{c}, \frac{b}{c} \right),$$

άρα

$$T'(s) = \left(-\frac{r}{c^2} \cos \frac{s}{c}, -\frac{r}{c^2} \sin \frac{s}{c}, 0 \right)$$

και

$$k(s) = \|T'(s)\| = \frac{r}{c^2} \neq 0.$$

Σχετικά με την στρέψη, είναι:

$$N(s) = \frac{1}{k(s)} T'(s) = \left(-\cos \frac{s}{c}, -\sin \frac{s}{c}, 0 \right),$$

$$B(s) = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ T_1 & T_2 & T_3 \\ N_1 & N_2 & N_3 \end{vmatrix} = \left(\frac{b}{c} \sin \frac{s}{c}, -\frac{b}{c} \cos \frac{s}{c}, \frac{r}{c} \right),$$

απ' όπου προκύπτει ότι

$$B'(s) = \left(\frac{b}{c^2} \cos \frac{s}{c}, \frac{b}{c^2} \sin \frac{s}{c}, 0 \right)$$

και

$$\tau(s) = - \langle N(s), B'(s) \rangle = \frac{b}{c^2}.$$

(iii) Αν θ είναι η ζητούμενη γωνία, τότε

$$\cos \theta = \frac{\langle \alpha'(t), e_3 \rangle}{\|\alpha'(t)\| \cdot \|e_3\|} = \frac{b}{c}.$$

Παρατηρούμε ότι η θ δίνεται και από τη σχέση

$$\cos \theta = \frac{\langle T(s), e_3 \rangle}{\|T(s)\| \cdot \|e_3\|} = \langle T(s), e_3 \rangle = \frac{b}{c}.$$

(iv) Ομοίως, για την γωνία ϕ του τελευταίου ερωτήματος είναι

$$\cos \phi = \frac{\langle B(s), e_3 \rangle}{\|B(s)\| \cdot \|e_3\|} = \langle B(s), e_3 \rangle = \frac{r}{c}.$$

Άσκηση 8. Να βρεθεί η καμπυλότητα και η προσημασμένη καμπυλότητα της καμπύλης

$$\alpha(t) := \left(t, \frac{t^2}{2} \right), \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Λύση. Είναι:

$$\alpha'(t) = (1, t) \equiv (1, t, 0),$$

$$\|\alpha'(t)\| = (1 + t^2)^{1/2} > 0,$$

$$\alpha''(t) = (0, 1) \equiv (0, 1, 0),$$

$$\alpha'(t) \times \alpha''(t) = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & t & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = e_3,$$

$$\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\| = 1.$$

Επομένως,

$$k(t) = \frac{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|}{\|\alpha'(t)\|^3} = \frac{1}{(1 + t^2)^{3/2}},$$

ενώ

$$k_*(t) = \frac{\alpha'_1(t)\alpha''_2(t) - \alpha''_1(t)\alpha'_2(t)}{\|\alpha'(t)\|^3} = \frac{1 \cdot 1 - 0 \cdot t}{(1+t^2)^{3/2}} = \frac{1}{(1+t^2)^{3/2}},$$

άρα $k = k_*$.

Άσκηση 9. Θεωρούμε την καμπύλη

$$\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2: t \mapsto (t^2, t^3).$$

Είναι κανονική; Να βρεθεί η καμπυλότητά της.

Λύση. Παρατηρούμε ότι

$$\alpha'(t) = (2t, 3t^2)$$

άρα $\alpha'(0) = (0, 0)$ και η α δεν είναι κανονική σε όλο το \mathbb{R} . Είναι όμως κανονική στα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$. Για $t \neq 0$ έχουμε

$$\|\alpha'(t)\| = (4t^2 + 9t^4)^{1/2},$$

$$\alpha''(t) = (2, 6t),$$

$$\alpha'(t) \times \alpha''(t) = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 2t & 3t^2 & 0 \\ 2 & 6t & 0 \end{vmatrix} = 6t^2 e_3 = (0, 0, 6t^2),$$

$$\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\| = 6t^2,$$

οπότε

$$k(t) = \frac{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|}{\|\alpha'(t)\|^3} = \frac{6t^2}{(4t^2 + 9t^4)^{3/2}}.$$

Άσκηση 10. Να βρεθεί διαφορίσιμη καμπύλη α με $\alpha(0) = (0, 1)$, η οποία διαγράφει τον κύκλο με την φορά των δεικτών του ωρολογίου.

Λύση. Η $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ διαγράφει τον κύκλο με φορά αντίθετη των δεικτών του ωρολογίου και έχει $\gamma(0) = (1, 0)$.

Η $\beta(t) = (\cos(t + \pi/2), \sin(t + \pi/2))$ διαγράφει τον κύκλο με την ίδια φορά, με $\beta(0) = (0, 1)$.

Η **αντίθετη καμπύλη** της β , δηλαδή η

$$\alpha(t) = \beta(-t) = (\cos(\pi/2 - t), \sin(\pi/2 - t)),$$

διαγράφει τον κύκλο με την αντίθετη φορά και έχει $\alpha(0) = \beta(0) = (0, 1)$.

Άσκηση 11. Έστω $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ διαφορίσιμη καμπύλη και διάνυσμα $v \in \mathbb{R}^3$, τέτοιο ώστε

$$\alpha(0) \perp v \quad \text{και} \quad \alpha'(t) \perp v, \quad \forall t \in I.$$

Να δείξετε ότι $\alpha(t) \perp v$, για κάθε $t \in I$.

Λύση. Αφού $\langle \alpha(0), v \rangle = 0$, αρκεί να δείξουμε ότι $\langle \alpha(t), v \rangle$ είναι σταθερό ή, ισοδύναμα, ότι $\langle \alpha(t), v \rangle' = 0$. Πράγματι,

$$\begin{aligned} \langle \alpha(t), v \rangle' &\equiv \langle \alpha, v \rangle'(t) = \\ &\langle \alpha'(t), v \rangle + \langle \alpha(t), v' \rangle = \\ &0 + \langle \alpha(t), 0 \rangle = 0. \end{aligned}$$

Άσκηση 12. Να δείξετε ότι οι εφαπτόμενες της καμπύλης

$$\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3: t \mapsto (3t, 3t^2, 2t^3)$$

σχηματίζουν σταθερή γωνία θ με την ευθεία $y = 0, x = z$.

Λύση. Η εφαπτομένη της α στο τυχόν σημείο $\alpha(t)$ είναι η ευθεία

$$\varepsilon_t(s) = \alpha(t) + s\alpha'(t); \quad t \in \mathbb{R},$$

που είναι παράλληλη προς το διάνυσμα $\alpha'(t) = (3, 6t, 6t^2)$ (να σημειωθεί εδώ ότι το s δεν είναι κατ' ανάγκην μήκος τόξου). Η ευθεία που ορίζεται από τις συνθήκες $y = 0$ και $x = z$ περιέχει το διάνυσμα $v = (1, 0, 1)$. Επειδή η ζητούμενη γωνία θ είναι η γωνία των ανωτέρω διανυσμάτων, βρίσκουμε ότι

$$\cos \theta = \frac{\langle \alpha'(t), v \rangle}{\|\alpha'(t)\| \cdot \|v\|} = \frac{3 + 6t^2}{\sqrt{9 + 36t^2 + 36t^4} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right).$$

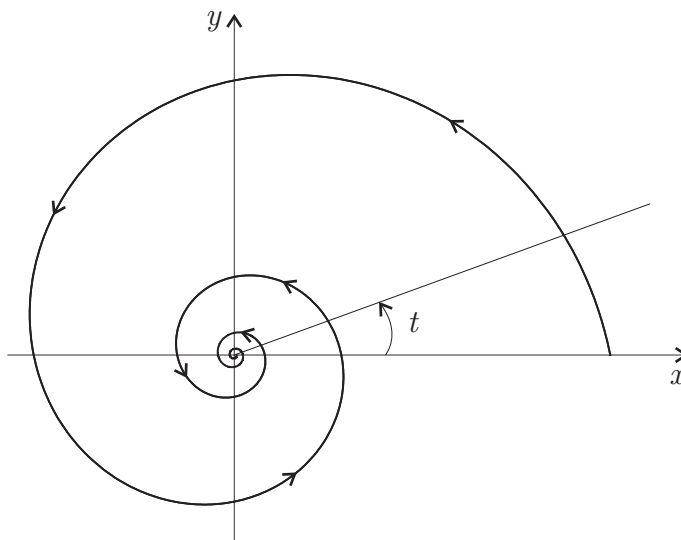
Άσκηση 13. Δίνεται η **λογαριθμική σπείρα** (logarithmic spiral)

$$\gamma(t) = (a \exp(bt) \cos t, a \exp(bt) \sin t); \quad t \in \mathbb{R},$$

όπου a και b είναι σταθερές με $a > 0, b < 0$ (βλ. και το Σχήμα 1.13). Να αποδειχθεί ότι

- (i) $\lim_{t \rightarrow +\infty} \gamma(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \gamma'(t) = (0, 0)$.
- (ii) $\int_{t_0}^{+\infty} \|\gamma'(u)\| du$ είναι πεπερασμένο.

(iii) Να υπολογιστεί η καμπυλότητα της γ .



Σχήμα 1.13

Λύση. Από την

$$\gamma'(t) = (ab \exp(bt) \cos t - a \exp(bt) \sin t, ab \exp(bt) \sin t + a \exp(bt) \cos t),$$

με έναν απλό υπολογισμό, βρίσκουμε ότι

$$\|\gamma'(t)\| = a(b^2 + 1)^{1/2} \exp(bt),$$

άρα η γ είναι κανονική καμπύλη.

(i) Επειδή $\cos t, \sin t$ είναι φραγμένα και $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{bt} = 0$, έχουμε αμέσως την

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \gamma(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \gamma'(t) = (0, 0).$$

(ii) Για κάθε $t \in [t_0, +\infty)$, είναι

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t \|\gamma'(u)\| du &= \int_{t_0}^t a(b^2 + 1)^{1/2} \exp(bu) du = \frac{a}{b} (b^2 + 1)^{1/2} \exp(bu) \Big|_{t_0}^t \\ &= \frac{a}{b} (b^2 + 1)^{1/2} (\exp(tb) - \exp(t_0 b)), \end{aligned}$$

απ' όπου προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{+\infty} \|\gamma'(u)\| du &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{a}{b} (b^2 + 1)^{1/2} (\exp(tb) - \exp(t_0 b)) = \\ &= -\frac{a}{b} (b^2 + 1)^{1/2} \cdot \exp(t_0 b), \end{aligned}$$

που αποδεικνύει το (ii).

(iii) Θέτοντας $x(t) = a \exp(bt) \cos t$, $y(t) = a \exp(bt) \sin t$, παίρνουμε διαδοχικά:

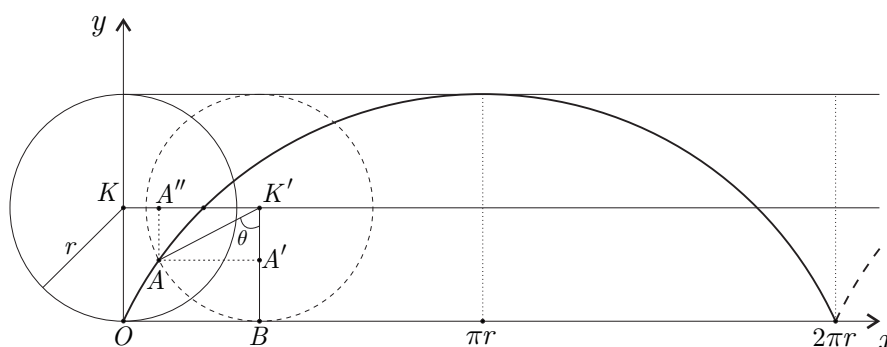
$$\begin{aligned}x'(t) &= ab \exp(bt) \cos t - a \exp(bt) \sin t, \\y'(t) &= ab \exp(bt) \sin t + a \exp(bt) \cos t, \\x''(t) &= a(b^2 - 1) \exp(bt) \cos t - 2ab \exp(bt) \sin t, \\y''(t) &= a(b^2 - 1) \exp(bt) \sin t + 2ab \exp(bt) \cos t, \\x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t) &= a^2(b^2 + 1) \exp(2bt), \\x'(t)^2 + y'(t)^2 &= a^2(b^2 + 1) \exp(2bt),\end{aligned}$$

επομένως [βάσει της (1.10.6) και της σχέσης μεταξύ καμπυλότητας και επίπεδης (προσημασμένης) καμπυλότητας] καταλήγουμε στην

$$k(t) = |k_*(t)| = \frac{|x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)|}{(x'(t)^2 + y'(t)^2)^{3/2}} = \frac{1}{a(b^2 + 1)^{1/2} \exp(bt)}.$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ. Το συμπέρασμα (i) σημαίνει ότι η λογαριθμική καμπύλη πλησιάζει στην αρχή των αξόνων, γύρω από την οποίαν άλλωστε περιστρέφεται (βλ. Σχήμα 1.13). Το συμπέρασμα (ii) σημαίνει ότι η καμπύλη έχει πεπερασμένο μήκος στο διάστημα $[t_0, +\infty)$.

Άσκηση 14. Ένας κύκλος ακτίνας r στέκεται στο σημείο $(0, 0)$ του άξονα $x'Ox$ και αρχίζει να κυλά προς τα δεξιά. (i) Να βρεθεί η καμπύλη α που διαγράφει το σημείο A , το οποίον αρχικά ακουμπά στο $(0, 0)$. (ii) Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της α τις χρονικές στιγμές $t = 0$, $t = \pi$ και $t = 2\pi$. (iii) Να υπολογιστεί το μήκος του τμήματος της α , όταν $t \in [0, 2\pi]$.



Σχήμα 1.14

Η καμπύλη α είναι γνωστή με το όνομα **κυκλοειδής** και εμφανίζεται στο προηγούμενο σχήμα.

Λύση. (i) Έστω ότι το A , από την αρχική του θέση στο $(0, 0)$, μετακινείται στη θέση $A = (x, y)$, οπότε το κέντρο $K = (0, r)$ του κύκλου θα μετακινηθεί κατά ένα μήκος a και θα έρθει στο σημείο $K' = (a, r)$. Τότε στον άξονα $x'Ox$ ακουμπά το σημείο B και το τόξο AB έχει μήκος a . Αν θ είναι η γωνία \widehat{AKB} τότε $a = r\theta$. Συμβολίζουμε με A' και A'' τις προβολές του A στις ευθείες $K'B$ και KK' . Τότε έχουμε

$$\begin{aligned}x &= OB - AA' = r\theta - r \sin \theta = r(\theta - \sin \theta), \\y &= OK - AA'' = r - r \cos \theta = r(1 - \cos \theta),\end{aligned}$$

άρα η κυκλοειδής περιγράφεται από την παραμέτρηση

$$\alpha(\theta) = (r(\theta - \sin \theta), r(1 - \cos \theta)).$$

(ii) Παρατηρούμε ότι

$$\alpha'(\theta) = (r(1 - \cos \theta), r \sin \theta),$$

απ' όπου παίρνουμε

$$\alpha'(0) = (0, 0), \quad \alpha'(\pi) = (2r, 0), \quad \alpha'(2\pi) = (0, 0).$$

Άρα, για $\theta = 0$ και $\theta = 2\pi$, η εφαπτομένη δεν ορίζεται, ενώ για $\theta = \pi$ είναι

$$\begin{aligned}\varepsilon_\pi(s) &= \alpha(\pi) + s\alpha'(\pi) \\&= (r(\pi - \sin \pi), r(1 - \cos \pi)) + s(r(1 - \cos \pi), r \sin \pi) \\&= (r\pi, 2r) + s(2r, 0) = (r\pi + 2rs, 2r).\end{aligned}$$

(iii) Χρησιμοποιώντας τους γνωστούς τριγωνομετρικούς τύπους του διπλασίου τόξου, βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned}\|\alpha'(\theta)\|^2 &= r^2(1 + \cos^2 \theta - 2 \cos \theta + \sin^2 \theta) \\&= 2r^2(1 - \cos \theta) = 2r^2\left(1 - \cos^2 \frac{\theta}{2} + \sin^2 \frac{\theta}{2}\right) \\&= 4r^2 \sin^2 \frac{\theta}{2},\end{aligned}$$

οπότε

$$\|\alpha'(\theta)\| = 2r \left| \sin \frac{\theta}{2} \right| = 2r \sin \frac{\theta}{2}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

Επομένως,

$$\begin{aligned}L(\alpha) &= \int_0^{2\pi} \|\alpha'(\theta)\| d\theta = 2r \int_0^{2\pi} \sin \frac{\theta}{2} d\theta \\&= 2r \int_0^\pi 2 \sin \phi d\phi = 4r (-\cos \phi)|_0^\pi \\&= 4r(-\cos \pi + \cos 0) = 8r.\end{aligned}$$

Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι ανάλογα συμπεράσματα ισχύουν για όλα τα διαστήματα της μορφής $(2k\pi, 2(k+1)\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$. Η καμπύλη είναι κανονική μόνο σε αυτά.

Άσκηση 15 Έστω $\beta(s)$ καμπύλη μοναδιαίας ταχύτητας. (i) Να αποδειχθεί ότι υπάρχει διάνυσμα ω (: **διάνυσμα Darboux**) τέτοιο ώστε: $T' = \omega \times T$, $N' = \omega \times N$ και $B' = \omega \times B$. (ii) Να αποδειχθεί η σχέση $T' \times T'' = k^2\omega$. [Στις παραπάνω σχέσεις, για ευκολία, έχουμε παραλείψει την μεταβλητή s].

Λύση. (i) Θέτουμε $\omega = xT + yN + zB$, και θα προσδιορίσουμε τους συντελεστές x, y, z . Τότε

$$\begin{aligned}\omega \times T &= xT \times T + yN \times T + zB \times T \\ &= x0 - yB + zN = -yB + zN\end{aligned}$$

οπότε, βάσει της υπόθεσης $T' = \omega \times T$,

$$-yB + zN = T' = kN,$$

απ' την οποίαν προκύπτει ότι $y = 0$ και $z = k$. Αναλόγως,

$$\begin{aligned}\omega \times N &= xT \times N + yN \times N + zB \times N \\ &= xB + y0 - zT = xB - zT\end{aligned}$$

άρα, λόγω της υπόθεσης $N' = \omega \times N$,

$$xB - zT = N' = -kT + \tau B$$

οπότε $x = \tau$ και $z = k$. Δηλαδή, αν υπάρχει τέτοιο διάνυσμα, θα είναι το

$$\omega = \tau T + kB.$$

Αποδεικνύουμε ότι το ω ικανοποιεί και την τρίτη ισότητα:

$$\omega \times B = (\tau T + kB) \times B = (\tau T \times B) + kB \times B = -\tau N + 0 = B'.$$

Άρα αποδείχθηκε η ύπαρξη (και το μονοσήμαντο) του ω .

(ii) Από την σχέση $T' = kN$ παίρνουμε ότι

$$T'' = k'N + kN' = k'N + k(-kT + \tau B) = -k^2T + k'N + \tau kB.$$

Επομένως,

$$\begin{aligned}T' \times T'' &= kN \times (-k^2T + k'N + \tau kB) \\ &= -k^3(N \times T) + kk'(N \times N) + \tau k^2(N \times B) \\ &= k^3B + 0 + \tau k^2T = k^2(kB + \tau T) = k^2\omega.\end{aligned}$$

Άσκηση 16. Έστω $\beta: J \rightarrow \mathbb{R}^3$ καμπύλη μοναδιαίας ταχύτητας με την ιδιότητα: η εφαπτομένη σε κάθε σημείο $\beta(s)$ περνά από ένα σταθερό σημείο P . Να αποδειχθεί ότι η β είναι ευθεία.

Λύση. Η εξίσωση της εφαπτομένης της β στο $\beta(s)$ είναι $\varepsilon_s(t) = \beta(s) + t\beta'(s)$, $t \in \mathbb{R}$. Λόγω της υπόθεσης, θα υπάρχει $t_s \in \mathbb{R}$, έτσι ώστε $\varepsilon_s(t_s) = p$, όπου $p \in \mathbb{R}^3$ είναι το διάνυσμα θέσης του P , δηλαδή

$$\beta(s) + t_s\beta'(s) = p.$$

Αν πάρουμε ένα άλλο σημείο της καμπύλης, π.χ. $\beta(\underline{s})$, τότε, για την εφαπτομένη $\varepsilon_{\underline{s}}(t) = \beta(\underline{s}) + t\beta'(\underline{s})$ θα υπάρχει $t_{\underline{s}}$, έτσι ώστε

$$\beta(\underline{s}) + t_{\underline{s}}\beta'(\underline{s}) = p,$$

και παρόμοια και για τα άλλα $s \in J$. Επομένως, για κάθε $s \in J$, υπάρχει $\lambda(s) \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε

$$(*) \quad \beta(s) + \lambda(s)\beta'(s) = p,$$

που εκφράζει ακριβώς την συνθήκη της εκφώνησης.

Η απεικόνιση $s \mapsto \lambda(s)$ είναι διαφορίσιμη, αφού

$$\begin{aligned} (*) &\Rightarrow \lambda(s)\beta'(s) = p - \beta(s) \\ &\Rightarrow \langle \lambda(s)\beta'(s), \beta'(s) \rangle = \langle p - \beta(s), \beta'(s) \rangle \\ &\Rightarrow \lambda(s) \langle T(s), T(s) \rangle = \langle p - \beta(s), \beta'(s) \rangle \\ &\Rightarrow \lambda(s) = \langle p - \beta(s), \beta'(s) \rangle. \end{aligned}$$

Παραγωγίζοντας την $(*)$ έχουμε, για κάθε $s \in J$:

$$\begin{aligned} (*) &\Rightarrow \beta'(s) + \lambda'(s)\beta'(s) + \lambda(s)\beta''(s) = 0 \\ &\Rightarrow (1 + \lambda'(s))T(s) + \lambda(s)k(s)N(s) = 0 \\ &\Rightarrow 1 + \lambda'(s) = \lambda(s)k(s) = 0 \\ &\Rightarrow \lambda'(s) = -1 \quad \text{και} \quad \lambda(s)k(s) = 0 \\ &\Rightarrow \lambda(s) = c - s \quad \text{και} \quad (c - s)k(s) = 0 \\ &\Rightarrow k(s) = 0, \end{aligned}$$

που ισοδυναμεί με το ότι η β είναι ευθεία. Προφανώς $c - s \neq 0$, διαφορετικά θα είχαμε ότι $\lambda'(s) = 0$ (άτοπο). Άλλωστε, και η $\lambda(s) = 0$ συνεπάγεται ότι $\beta(s) = p$, $\forall s \in J$, δηλαδή η β θα εκφυλιζόταν σε σημείο (επίσης άτοπο).

Άσκηση 17. Έστω $\alpha: J \rightarrow \mathbb{R}^3$ καμπύλη μοναδιαίας ταχύτητας. Να δείξετε ότι η α είναι τμήμα κύκλου εάν και μόνον εάν όλες οι **πρώτες κάθετες** της α περνούν από σταθερό σημείο P .

Λύση. Η πρώτη κάθετη της α στο $\alpha(s)$ είναι η

$$\varepsilon_s(t) = \alpha(s) + tN(s); \quad t \in \mathbb{R},$$

[δηλαδή είναι η ευθεία που διέρχεται από το $\alpha(s)$ και είναι παράλληλη προς το πρώτο κάθετο διάνυσμα $N(s)$]. Ακολουθώντας το σκεπτικό της προηγούμενης άσκησης, η υπόθεση συνεπάγεται ότι, για κάθε $s \in J$, υπάρχει $\lambda(s) \in \mathbb{R}$ με την ιδιότητα

$$(*) \quad \alpha(s) + \lambda(s)N(s) = p,$$

(: p το διάνυσμα θέσης του P). Η λ είναι διαφορίσιμη συνάρτηση: από την (*) προκύπτει ότι

$$\lambda(s) = \langle \lambda(s)N(s), N(s) \rangle = \langle p - \alpha(s), N(s) \rangle.$$

Παραγωγίζοντας τώρα την (*) έχουμε:

$$\begin{aligned} (*) &\Rightarrow \alpha'(s) + \lambda'(s)N(s) + \lambda(s)N'(s) = 0 \\ &\Rightarrow T(s) + \lambda'(s)N(s) + \lambda(s)(-k(s)T(s) + \tau(s)B(s)) = 0 \\ &\Rightarrow (1 - \lambda(s)k(s))T(s) + \lambda'(s)N(s) + \lambda(s)\tau(s)B(s) = 0 \\ &\Rightarrow 1 - \lambda(s)k(s) = \lambda'(s) = \lambda(s)\tau(s) = 0 \\ &\Rightarrow \lambda = c \text{ (σταθερά)}, \quad \lambda k(s) = 1 \text{ και } \lambda\tau(s) = 0. \end{aligned}$$

Η δεύτερη ισότητα δίνει $\lambda \neq 0$, η τελευταία δίνει $\tau = 0$, δηλαδή η α είναι επίπεδη καμπύλη, και από την $k(s) = 1/\lambda = \text{σταθερά}$ έχουμε ότι η α είναι τμήμα κύκλου.

Το αντίστροφο είναι άμεσο: το P είναι το κέντρο του κύκλου.

Άσκηση 18. Αν $a: J \rightarrow \mathbb{R}^3$ είναι καμπύλη μοναδιαίας ταχύτητας, τότε οι **δεύτερες κάθετες** της a δεν μπορούν να περνούν από σταθερό σημείο.

Λύση. Η δεύτερη κάθετη της a στο $\alpha(s)$ είναι η (παράλληλη προς το δεύτερο κάθετο διάνυσμα $B(s)$) ευθεία

$$\beta_s(t) = \alpha(s) + tB(s), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Με τους συλλογισμούς των δύο προηγούμενων ασκήσεων, ας υποθέσουμε ότι, για κάθε $s \in J$, υπάρχει $\lambda(s) \in \mathbb{R}$ με

$$(*) \quad \alpha(s) + \lambda(s)B(s) = p.$$

Η λ είναι διαφορίσιμη επειδή

$$\lambda(s) = \langle \lambda(s)B(s), B(s) \rangle = \langle p - \alpha(s), B(s) \rangle,$$

άρα, παραγωγίζοντας την (*), έχουμε ότι

$$\alpha'(s) + \lambda(s)B'(s) + \lambda'(s)B(s) = 0,$$

ή, ισοδύναμα,

$$T(s) - \lambda(s)\tau(s)N(s) + \lambda'(s)B(s) = 0,$$

η οποία ισχύει μόνο όταν

$$1 = -\lambda(s)\tau(s) = \lambda'(s) = 0,$$

που είναι άτοπο.

Άσκηση 19. Έστω $\alpha: J \rightarrow \mathbb{R}^3$ καμπύλη μοναδιαίας ταχύτητας. Να δείξετε ότι η ταχύτητα της α είναι συνεχώς παράλληλη με ένα σταθερό διάνυσμα $0 \neq u \in \mathbb{R}^3$ εάν και μόνον εάν η α είναι ευθεία.

Λύση. (\Leftarrow): Προφανές.

(\Rightarrow): Από την υπόθεση, για κάθε $s \in J$, υπάρχει $\lambda(s) \in \mathbb{R}$ ώστε

$$(*) \quad \lambda(s)T(s) = u = \text{σταθ.}$$

Παρατηρούμε ότι

$$\lambda(s) = \langle \lambda(s)T(s), T(s) \rangle = \langle u, T(s) \rangle,$$

δηλαδή η $\lambda(s)$ είναι διαφορίσιμη συνάρτηση. Παραγωγίζοντας την (*) έχουμε:

$$\begin{aligned} (*) &\Rightarrow \lambda'(s)T(s) + \lambda(s)T'(s) = 0 \\ &\Rightarrow \lambda'(s)T(s) + \lambda(s)k(s)N(s) = 0 \\ &\Rightarrow \lambda'(s) = \lambda(s)k(s) = 0. \end{aligned}$$

Από την ισότητα $\lambda'(s) = 0$ προκύπτει ότι $\lambda(s) = c$. Αν $c = 0$, τότε $u = cT = 0$, που είναι άτοπο. Άρα $c \neq 0$, και η ισότητα $c k(s) = 0$ δίνει ότι $k = 0$, που ισοδυναμεί με το ότι η α είναι ευθεία.

Άσκηση 20. Μια καμπύλη $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ λέγεται **γενικευμένη** ή **κυλινδρική έλικα** (general or cylindrical helix) αν τα εφαπτόμενα διανύσματα της α σχηματίζουν σταθερή γωνία $\theta \neq 0$ με ένα μη μηδενικό διάνυσμα (**άξονας της έλικας**) $u \in \mathbb{R}^3$. Να δείξετε ότι, για μια καμπύλη α με $k > 0$, ισχύει η ισοδυναμία:

$$\alpha \text{ γενικευμένη έλικα} \Leftrightarrow \tau/k = \text{σταθ.}$$

Λύση. Έστω ότι η α είναι γενικευμένη έλικα *μοναδιαίας* ταχύτητας. Υποθέτουμε ακόμη ότι, χωρίς βλάβη της γενικότητας, $\|u\| = 1$. Επειδή $\langle T(s), u \rangle$

$= \cos \theta$ (σταθ.), για κάθε $s \in I$, η παραγώγιση της $\langle T, u \rangle = \cos \theta$ συνεπάγεται ότι

$$\begin{aligned} \langle T, u \rangle' (s) = 0 &\Rightarrow \langle T'(s), u \rangle + \langle T(s), u' \rangle = 0 \\ &\Rightarrow \langle T'(s), u \rangle = 0 \\ &\Rightarrow k(s) \langle N(s), u \rangle = 0 \\ &\Rightarrow \langle N(s), u \rangle = 0 \\ &\Rightarrow u \perp N(s), \end{aligned}$$

επομένως, το u ανήκει στο (ευθειοποιούν) επίπεδο των $T(s), B(s)$, οπότε

$$(*) \quad u = \lambda T(s) + \mu B(s),$$

για κάποια $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. "Πολλαπλασιάζοντας εσωτερικά" την τελευταία σχέση διαδοχικά με $T(s)$ και $B(s)$ (βλ. την παρόμοια διαδικασία στην απόδειξη του Θεωρήματος 1.3.4) βρίσκουμε ότι

$$\lambda = \langle u, T(s) \rangle = \cos \theta \quad \text{και} \quad \mu = \langle u, B(s) \rangle = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) = \sin \theta.$$

Άρα η (*) παίρνει την μορφή

$$u = \cos \theta T(s) + \sin \theta B(s),$$

η παραγώγιση της οποίας δίνει ότι

$$\begin{aligned} 0 &= \cos \theta T'(s) + \sin \theta B'(s) \\ &= \cos \theta k(s)N(s) - \sin \theta \tau(s)N(s) \\ &= (\cos \theta k(s) - \sin \theta \tau(s))N(s), \end{aligned}$$

απ' όπου $\cos \theta k(s) - \sin \theta \tau(s) = 0$ και

$$(**) \quad \frac{\tau(s)}{k(s)} = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \cot \theta = c \text{ (σταθερά).}$$

Αντιστρόφως, έστω $\frac{\tau(s)}{k(s)} = c$. Εφ' όσον η συνάρτηση \cot παίρνει τιμές στο $(\infty, +\infty)$, μπορούμε να βρούμε θ ώστε $c = \cot \theta$. Επομένως, αντιστρέφοντας την διαδικασία που μας οδήγησε στη (**), έχουμε:

$$\begin{aligned} k(s) \cos \theta &= \tau(s) \sin \theta \Rightarrow \\ k(s) \cos \theta N(s) - \tau(s) \sin \theta N(s) &= 0 \Rightarrow \\ \cos \theta T'(s) + \sin \theta B'(s) &= 0 \Rightarrow \\ \cos \theta T(s) + \sin \theta B(s) &= u = \text{σταθ.} \in \mathbb{R}^3 \Rightarrow \\ \cos \theta \langle T(s), T(s) \rangle + \sin \theta \langle B(s), T(s) \rangle &= \langle u, T(s) \rangle \Rightarrow \\ \cos \theta &= \langle u, T(s) \rangle = \text{σταθ.} \end{aligned}$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ: 1) Αν η καμπύλη δεν είναι μοναδιαίας ταχύτητας, ακολουθούμε ακριβώς την ίδια πορεία, χρησιμοποιώντας τους τύπους του Θεωρήματος 1.5.2. Η ταχύτητα v δεν θα παίζει ιδιαίτερο ρόλο.

2) Αν το u δεν είναι μοναδιαίο, τότε μπορούμε να πάρουμε το διάνυσμα $v = u/\|u\|$, που είναι μοναδιαίο και σχηματίζει την ίδια γωνία με το $T(s)$.

3) Από το ερώτημα (iii) της Άσκησης 7 προκύπτει ότι η κυκλική έλικα είναι ειδική περίπτωση της κυλινδρικής έλικας.

Άσκηση 21. Έστω α καμπύλη μοναδιαίας ταχύτητας. Να αποδειχθεί ότι η α είναι επίπεδη καμπύλη εάν και μόνον εάν όλα τα εγγύτατα επίπεδα περνούν από σταθερό σημείο P .

Λύση. Αφού υπάρχουν εγγύτατα επίπεδα η καμπύλη δεν είναι ευθεία, δηλ. $k > 0$. Θα αποδείξουμε ότι $\tau = 0$.

Τα σημεία του εγγύτατου επιπέδου στο σημείο $\alpha(s)$ έχουν την μορφή

$$\alpha(s) + t_1 T(s) + t_2 N(s), \quad t_1, t_2 \in \mathbb{R}.$$

Επειδή όλα τα εγγύτατα επίπεδα περιέχουν το σημείο P , για κάθε $s \in J$, υπάρχουν $\lambda(s), \mu(s) \in \mathbb{R}$, τέτοια ώστε

$$(*) \quad \alpha(s) + \lambda(s)T(s) + \mu(s)N(s) = p$$

(: p το διάνυσμα θέσης του P).

Οι απεικονίσεις $\lambda, \mu: J \rightarrow \mathbb{R}$ είναι διαφορίσιμες. Πράγματι, από την (*) έχουμε ότι

$$\lambda(s)T(s) + \mu(s)N(s) = p - \alpha(s),$$

απ' όπου παίρνουμε τις σχέσεις

$$\begin{aligned} \lambda(s) &= \langle \lambda(s)T(s), T(s) \rangle + \langle \mu(s)N(s), T(s) \rangle = \langle p - \alpha(s), T(s) \rangle, \\ \mu(s) &= \langle \lambda(s)T(s), N(s) \rangle + \langle \mu(s)N(s), N(s) \rangle = \langle p - \alpha(s), N(s) \rangle, \end{aligned}$$

με τις οποίες αποδεικνύεται η διαφορισιμότητα των λ, μ . Παραγωγίζοντας την (*) έχουμε:

$$\begin{aligned} \alpha'(s) + \lambda'(s)T(s) + \lambda(s)T'(s) + \mu'(s)N(s) + \mu(s)N'(s) &= 0 \Rightarrow \\ T(s) + \lambda'(s)T(s) + \lambda(s)k(s)N(s) + \mu'(s)N(s) - & \\ \mu(s)k(s)T(s) + \mu(s)\tau(s)B(s) &= 0 \Rightarrow \\ (1 + \lambda'(s) - \mu(s)k(s))T(s) + (\lambda(s)k(s) + \mu'(s))N(s) + \mu(s)\tau(s)B(s) &= 0, \end{aligned}$$

από την οποίαν προκύπτουν οι

$$\begin{aligned} 1 + \lambda'(s) - \mu(s)k(s) &= 0, \\ \lambda(s)k(s) + \mu'(s) &= 0, \\ \mu(s)\tau(s) &= 0. \end{aligned}$$

Από την τελευταία σχέση είναι $\tau = 0$, ή $\mu = 0$. Αν $\mu = 0$, τότε από τις άλλες δύο προηγούμενες σχέσεις παίρνουμε

$$1 + \lambda'(s) = 0 \text{ και } \lambda(s)k(s) = 0,$$

άρα

$$\lambda(s) = c - s \text{ και } (c - s)k(s) = 0, \quad \forall s \in J,$$

δηλαδή $k = 0$, άτοπο. Επομένως, αναγκαστικά $\tau = 0$, που αποδεικνύει τον ισχυρισμό. [Φυσικά, $c - s \neq 0$, διαφορετικά, από την (*), θα είχαμε ότι $\alpha(s) = p$, $\forall s$ (άτοπο).]

Το αντίστροφο είναι προφανές.

Άσκηση 22. Να βρεθεί η εξίσωση του κάθετου επιπέδου σε ένα δεδομένο σημείο μια κανονικής καμπύλης.

Λύση. (i) Έστω ότι έχουμε καμπύλη $\beta(s)$ μοναδιαίας ταχύτητας. Ένα $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ είναι σημείο του κάθετου επιπέδου στο σημείο $\beta(s_0)$ εάν και μόνο εάν η διαφορά $(x, y, z) - \beta(s_0)$ ανήκει στον υπόχωρο που παράγουν τα $N(s_0)$ και $B(s_0)$, δηλαδή είναι κάθετη στο $T(s_0) = \beta'(s_0)$. Άρα τα σημεία (x, y, z) του κάθετου επιπέδου στο $\beta(s_0)$ ικανοποιούν την σχέση

$$(*) \quad \langle (x, y, z) - \beta(s_0), T(s_0) \rangle = 0,$$

ή, ισοδύναμα,

$$\langle (x, y, z) - \beta(s_0), \beta'(s_0) \rangle = 0.$$

(ii) Έστω τώρα ότι έχουμε μια κανονική καμπύλη $\alpha(t)$, όχι κατ' ανάγκη μοναδιαίας ταχύτητας. Τα σημεία (x, y, z) του κάθετου επιπέδου στο $\alpha(t_0)$ ικανοποιούν την αντίστοιχη της (*)

$$\langle (x, y, z) - \alpha(t_0), T(t_0) \rangle = 0.$$

Μέσω της (1.5.1), η προηγούμενη μετασχηματίζεται στην

$$\langle (x, y, z) - \alpha(t_0), \frac{\alpha'(t_0)}{\|\alpha'(t_0)\|} \rangle = 0,$$

ή, ισοδύναμα,

$$\langle (x, y, z) - \alpha(t_0), \alpha'(t_0) \rangle = 0.$$

Εφαρμογή. Να δείξετε ότι όλα τα κάθετα επίπεδα της καμπύλης

$$\beta(t) = (a \sin^2 t, a \sin t \cos t, a \cos t)$$

διέρχονται από το σημείο $(0, 0, 0)$.

Λύση. Σύμφωνα με αυτά που είπαμε προηγουμένως, το σημείο $(0, 0, 0)$ ανήκει στο κάθετο επίπεδο σε κάθε σημείο $\beta(t)$, αν

$$\langle (0, 0, 0) - \beta(t), \beta'(t) \rangle = \langle \beta(t), \beta'(t) \rangle = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Παρατηρούμε ότι

$$\beta'(t) = (2a \sin t \cos t, a(\cos^2 t - \sin^2 t), -a \sin t).$$

Συνεπώς,

$$\begin{aligned} & \langle \beta(t), \beta'(t) \rangle = \\ & \langle (a \sin^2 t, a \sin t \cos t, a \cos t), (2a \sin t \cos t, a(\cos^2 t - \sin^2 t), -a \sin t) \rangle = \\ & 2a^2 \sin^3 t \cos t + a^2 \sin t \cos^3 t - a^2 \sin^3 t \cos t - a^2 \sin t \cos t = \\ & a^2 \sin^3 t \cos t + a^2 \sin t \cos^3 t - a^2 \sin t \cos t = \\ & a^2 \sin t \cos t (\sin^2 t + \cos^2 t) - a^2 \sin t \cos t = 0. \end{aligned}$$

Άσκηση 23. Να βρεθεί η εξίσωση του εγγύτατου επιπέδου σε ένα δεδομένο σημείο μια κανονικής καμπύλης.

Λύση. (i) Έστω ότι έχουμε καμπύλη $\beta(s)$ μοναδιαίας ταχύτητας. Ένα $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ είναι σημείο του εγγύτατου επιπέδου στο σημείο $\beta(s_0)$ εάν και μόνο εάν η διαφορά $(x, y, z) - \beta(s_0)$ ανήκει στον υπόχωρο που παράγουν τα $T(s_0)$ και $N(s_0)$, δηλαδή είναι κάθετη στο $B(s_0)$. Άρα τα σημεία (x, y, z) του εγγύτατου επιπέδου στο $\beta(s_0)$ ικανοποιούν την σχέση

$$(*) \quad \langle (x, y, z) - \beta(s_0), B(s_0) \rangle = 0.$$

Επειδή

$$B(s_0) = T(s_0) \times N(s_0) = \beta'(s_0) \times \frac{T'(s_0)}{k(s_0)} = \beta'(s_0) \times \frac{\beta''(s_0)}{k(s_0)},$$

η (*) ισοδυναμεί με την

$$\langle (x, y, z) - \beta(s_0), \beta'(s_0) \times \beta''(s_0) \rangle = 0.$$

(ii) Έστω τώρα ότι έχουμε μια κανονική καμπύλη $\alpha(t)$, όχι κατ' ανάγκη μοναδιαίας ταχύτητας. Τα σημεία (x, y, z) του εγγυτάτου επιπέδου στο $\alpha(t_0)$ ικανοποιούν την αντίστοιχη της (*)

$$\langle (x, y, z) - \alpha(t_0), B(t_0) \rangle = 0.$$

Χρησιμοποιώντας την ισότητα [βλ. (1.5.3)]

$$B(t_0) = \frac{\alpha'(t_0) \times \alpha''(t_0)}{\|\alpha'(t_0) \times \alpha''(t_0)\|}$$

παίρνουμε την συνθήκη

$$\langle (x, y, z) - \alpha(t_0), \frac{\alpha'(t_0) \times \alpha''(t_0)}{\|\alpha'(t_0) \times \alpha''(t_0)\|} \rangle = 0,$$

και, ισοδύναμα,

$$\langle (x, y, z) - \alpha(t_0), \alpha'(t_0) \times \alpha''(t_0) \rangle = 0.$$

Εφαρμογή. Δίνεται η καμπύλη $\alpha(t) = (\cos t, \sin t, t)$, $t \in \mathbb{R}$. Να βρεθεί η (καρτεσιανή) εξίσωση του εγγύτατου επιπέδου της $\alpha(t)$ στο σημείο $\alpha(t_0)$, όπου $t_0 = \frac{\pi}{2}$.

Λύση. Τα σημεία του ζητούμενου εγγύτατου επιπέδου ικανοποιούν την συνθήκη

$$\langle (x, y, z) - \alpha\left(\frac{\pi}{2}\right), \alpha'\left(\frac{\pi}{2}\right) \times \alpha''\left(\frac{\pi}{2}\right) \rangle = 0.$$

Υπολογίζουμε:

$$\alpha\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left(\cos \frac{\pi}{2}, \sin \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = \left(0, 1, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\alpha'(t) = (-\sin t, \cos t, 1)$$

$$\alpha'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left(-\sin \frac{\pi}{2}, \cos \frac{\pi}{2}, 1\right) = (-1, 0, 1)$$

$$\alpha''(t) = (-\cos t, -\sin t, 0)$$

$$\alpha''\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left(-\cos \frac{\pi}{2}, -\sin \frac{\pi}{2}, 0\right) = (0, -1, 0)$$

Άρα η εξίσωση του εγγύτατου επιπέδου γίνεται

$$\langle (x, y, z) - \left(0, 1, \frac{\pi}{2}\right), (-1, 0, 1) \times (0, -1, 0) \rangle = 0 \Leftrightarrow$$

$$\langle (x, y - 1, z - \frac{\pi}{2}), (-1, 0, 1) \times (0, -1, 0) \rangle = 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{vmatrix} x & y - 1 & z - \frac{\pi}{2} \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$x + z = \frac{\pi}{2}.$$

Άσκηση 24. Να βρεθεί η εξίσωση του ευθειοποιούντος επιπέδου σε ένα δεδομένο σημείο μια κανονικής καμπύλης.

Λύση. (i) Έστω ότι έχουμε καμπύλη $\beta(s)$ μοναδιαίας ταχύτητας. Ένα $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ είναι σημείο του ευθειοποιούντος επιπέδου στο σημείο $\beta(s_0)$ εάν και μόνο εάν η διαφορά $(x, y, z) - \beta(s_0)$ ανήκει στον υπόχωρο που παράγουν τα $T(s_0)$ και $B(s_0)$, δηλαδή είναι κάθετη στο $N(s_0)$. Άρα τα σημεία (x, y, z) του ευθειοποιούντος επιπέδου στο $\beta(s_0)$ ικανοποιούν την συνθήκη

$$(*) \quad \langle (x, y, z) - \beta(s_0), N(s_0) \rangle = 0.$$

Επειδή

$$N(s_0) = \frac{T'(s_0)}{k(s_0)} = \frac{\beta''(s_0)}{k(s_0)},$$

η (*) μετασχηματίζεται στην

$$\langle (x, y, z) - \beta(s_0), \frac{\beta''(s_0)}{k(s_0)} \rangle = 0,$$

ή, ισοδύναμα, στην

$$\langle (x, y, z) - \beta(s_0), \beta''(s_0) \rangle = 0.$$

(ii) Έστω τώρα ότι έχουμε μια κανονική καμπύλη $\alpha(t)$, όχι κατ' ανάγκη μοναδιαίας ταχύτητας. Τα σημεία (x, y, z) του ευθειοποιούντος επιπέδου στο $\alpha(t_0)$ ικανοποιούν την αντίστοιχη της (*)

$$\langle (x, y, z) - \alpha(t_0), N(t_0) \rangle = 0.$$

Λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι [βλ. (1.5.2)]

$$N(t_0) = \frac{(\alpha'(t_0) \times \alpha''(t_0)) \times \alpha'(t_0)}{\|\alpha'(t_0) \times \alpha''(t_0)\| \cdot \|\alpha'(t_0)\|},$$

βρίσκουμε ότι

$$\langle (x, y, z) - \alpha(t_0), \frac{(\alpha'(t_0) \times \alpha''(t_0)) \times \alpha'(t_0)}{\|\alpha'(t_0) \times \alpha''(t_0)\| \cdot \|\alpha'(t_0)\|} \rangle = 0,$$

και, ισοδύναμα,

$$(**) \quad \langle (x, y, z) - \alpha(t_0), (\alpha'(t_0) \times \alpha''(t_0)) \times \alpha'(t_0) \rangle = 0.$$

Εφαρμογή. Δίνεται η καμπύλη $\alpha(t) = \left(t, \frac{t^2}{2}, \frac{t^3}{3}\right)$, $t \in \mathbb{R}$. Να βρεθεί η εξίσωση του ευθειοποιούντος επιπέδου της $\alpha(t)$ στο σημείο που αντιστοιχεί στο $t_0 = 1$.

Λύση. Σύμφωνα με την (**), τα σημεία του ζητούμενου ευθειοποιούντος επιπέδου ικανοποιούν την συνθήκη

$$\langle (x, y, z) - \alpha(1), (\alpha'(1) \times \alpha''(1)) \times \alpha'(1) \rangle = 0.$$

Υπολογίζουμε:

$$\alpha(1) = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$$

$$(x, y, z) - \alpha(1) = \left(x - 1, y - \frac{1}{2}, z - \frac{1}{3}\right)$$

$$\alpha'(t) = (1, t, t^2)$$

$$\alpha'(1) = (1, 1, 1)$$

$$\alpha''(t) = (0, 1, 2t)$$

$$\alpha''(1) = (0, 1, 2)$$

$$\alpha'(1) \times \alpha''(1) = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (1, -2, 1)$$

Άρα η ζητούμενη συνθήκη είναι

$$\langle (x - 1, y - 1/2, z - 1/3), (1, -2, 1) \times (1, 1, 1) \rangle = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

που ισοδυναμεί με την

$$x - z = \frac{2}{3}.$$

Άσκηση 25. Έστω $\alpha: J \rightarrow \mathbb{R}^3$ καμπύλη μοναδιαίας ταχύτητας, της οποίας η εικόνα βρίσκεται πάνω σε μία σφαίρα κέντρου p και ακτίνας R , δηλαδή η α είναι μία **σφαιρική καμπύλη**. Αν k είναι καμπυλότητα και $\tau \neq 0$ η στρέψη της α , να αποδειχθούν οι επόμενες σχέσεις:

$$(I) \quad \alpha - p = -\frac{1}{k} N - \left(\frac{1}{k}\right)' \cdot \frac{1}{\tau} B,$$

$$(II) \quad R^2 = \left(\frac{1}{k}\right)^2 + \left(\left(\frac{1}{k}\right)' \cdot \frac{1}{\tau}\right)^2,$$

$$(III) \quad \frac{\tau}{k} = -\left(\left(\frac{1}{k}\right)' \cdot \frac{1}{\tau}\right)'.$$

Λύση. Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} \|\alpha - p\| = R &\Rightarrow \langle \alpha - p, \alpha - p \rangle = R^2 \\ &\Rightarrow \langle \alpha - p, \alpha - p \rangle' (s) = 0 \\ &\Rightarrow 2 \langle \alpha', \alpha - p \rangle (s) = 0 \\ &\Rightarrow \langle T, \alpha - p \rangle (s) = 0 \\ &\Rightarrow (\alpha(s) - p) \perp T(s). \end{aligned}$$

Άρα, για κάθε $s \in J$, το $\alpha(s) - p$ ανήκει στο επίπεδο των $N(s), B(s)$ (: κάθετο επίπεδο), οπότε υπάρχουν διαφορίσιμες απεικονίσεις $\lambda, \mu: J \rightarrow \mathbb{R}$, με

$$(\diamond) \quad \alpha(s) - p = \lambda(s)N(s) + \mu(s)B(s).$$

Παραγωγίζοντας τώρα την ισότητα $\langle T, \alpha - p \rangle = 0$, παίρνουμε:

$$\begin{aligned} \langle T, \alpha - p \rangle' (s) = 0 &\Rightarrow \\ \Rightarrow \langle T'(s), \alpha(s) - p \rangle + \langle T(s), \alpha'(s) \rangle &= 0 \\ \Rightarrow \langle k(s)N(s), \alpha(s) - p \rangle = - \langle T(s), T(s) \rangle &= -1 \\ \Rightarrow \langle k(s)N(s), \lambda(s)N(s) + \mu(s)B(s) \rangle &= -1 \\ \Rightarrow k(s)\lambda(s) \langle N(s), N(s) \rangle + k(s)\mu(s) \langle N(s), B(s) \rangle &= -1 \\ \Rightarrow k(s)\lambda(s) = -1 \\ \Rightarrow \lambda(s) = -\frac{1}{k(s)}. \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας το $\lambda(s)$ στην (\diamond) και παραγωγίζοντας (αφού θέλουμε να καταλήξουμε σε έκφραση που περιέχει την παράγωγο της καμπυλότητας) έχουμε:

$$\begin{aligned} (\diamond) \Rightarrow \alpha(s) - p &= -\frac{1}{k(s)}N(s) + \mu(s)B(s) \\ \Rightarrow \alpha'(s) &= -\left(\frac{1}{k(s)}\right)'N(s) - \frac{1}{k(s)}N'(s) + \mu'(s)B(s) + \mu(s)B'(s) \\ \Rightarrow T(s) &= -\left(\frac{1}{k(s)}\right)'N(s) - \frac{1}{k(s)}(-k(s)T(s) + \tau(s)B(s)) \\ &\quad + \mu'(s)B(s) - \mu(s)\tau N(s) \\ \Rightarrow T(s) &= T(s) + \left(-\left(\frac{1}{k(s)}\right)' - \mu(s)\tau(s)\right)N(s) + \left(\mu'(s) - \frac{\tau(s)}{k(s)}\right)B(s) \\ \Rightarrow \left(-\left(\frac{1}{k(s)}\right)' - \mu(s)\tau(s)\right)N(s) &+ \left(\mu'(s) - \frac{\tau(s)}{k(s)}\right)B(s) = 0 \\ \Rightarrow \mu(s)\tau(s) = -\left(\frac{1}{k(s)}\right)' &\quad \text{και} \quad \mu'(s) = \frac{\tau(s)}{k(s)}. \end{aligned}$$

Από την πρώτη των δύο τελευταίων ισοτήτων παίρνουμε ότι (αφού $k \neq 0$, επειδή η καμπύλη είναι σφαιρική)

$$\mu(s) = -\left(\frac{1}{k(s)}\right)' \cdot \frac{1}{\tau(s)}.$$

Αντικαθιστώντας στην (\diamond) τις τιμές των $\lambda(s)$ και $\mu(s)$, που βρήκαμε παραπάνω, καταλήγουμε στην (I).

Για την απόδειξη της (II) παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} R^2 &= \langle \alpha - p, \alpha - p \rangle \\ &= \left\langle -\frac{1}{k}N - \left(\frac{1}{k}\right)' \frac{1}{\tau}B, -\frac{1}{k}N - \left(\frac{1}{k}\right)' \frac{1}{\tau}B \right\rangle \\ &= \frac{1}{k^2} \langle N, N \rangle + 2\frac{1}{k} \left(\frac{1}{k}\right)' \frac{1}{\tau} \langle N, B \rangle + \left(\left(\frac{1}{k}\right)'\right)^2 \frac{1}{\tau^2} \langle B, B \rangle \\ &= \frac{1}{k^2} + \left(\left(\frac{1}{k}\right)'\right)^2 \frac{1}{\tau^2}, \end{aligned}$$

από την οποία καταλήγουμε στη (II).

Παραγωγίζοντας την (II) έχουμε διαδοχικά :

$$\begin{aligned} \text{(II)} &\Rightarrow 2\frac{1}{k} \left(\frac{1}{k}\right)' + 2\left(\frac{1}{k}\right)' \left(\frac{1}{\tau}\right) \cdot \left(\left(\frac{1}{k}\right)' \cdot \left(\frac{1}{\tau}\right)\right)' = 0 \\ &\Rightarrow \frac{1}{k} = -\frac{1}{\tau} \left(\left(\frac{1}{k}\right)' \cdot \left(\frac{1}{\tau}\right)\right)', \end{aligned}$$

απ' όπου προκύπτει η (III).

Άσκηση 26. Έστω α καμπύλη μοναδιαίας ταχύτητας με $k, \tau \neq 0$. Αν

$$\left(\frac{1}{k}\right)' \neq 0 \quad \text{και} \quad \left(\frac{1}{k}\right)^2 + \left(\left(\frac{1}{k}\right)' \cdot \frac{1}{\tau}\right)^2 = \text{σταθερό},$$

τότε η καμπύλη α είναι σφαιρική.

Λύση. Αν θέσουμε $\left(\frac{1}{k}\right)^2 + \left(\left(\frac{1}{k}\right)' \cdot \frac{1}{\tau}\right)^2 = c^2$, έχουμε ακριβώς τη (II) της Άσκησης 25. Επομένως, ακολουθώντας την διαδικασία (II) \Rightarrow (III) της ίδιας άσκησης, έχουμε ότι

$$\frac{\tau}{k} + \left(\left(\frac{1}{k}\right)' \cdot \frac{1}{\tau}\right)' = 0.$$

Έχοντας ως κίνητρο την (I) της προηγούμενης άσκησης, θέτουμε

$$p := \alpha + \frac{1}{k}N + \left(\frac{1}{k}\right)' \cdot \frac{1}{\tau}B,$$

όπου φαινομενικά το p είναι συνάρτηση του s . Το διάνυσμα $\frac{1}{k}N + \left(\frac{1}{k}\right)' \cdot \frac{1}{\tau}B$ έχει σταθερό μήκος ίσο με

$$\left(\left(\frac{1}{k}\right)^2 + \left(\left(\frac{1}{k}\right)' \cdot \frac{1}{\tau} \right)^2 \right)^{1/2} = c.$$

Θα δείξουμε ότι $p' = 0$, οπότε το p είναι σταθερό σημείο, και η α απέχει από το p σταθερή απόσταση c . Πράγματι,

$$\begin{aligned} p' &= \alpha' + \left(\frac{1}{k}\right)'N + \left(\frac{1}{k}\right)N' + \left(\left(\frac{1}{k}\right)' \cdot \frac{1}{\tau} \right)'B + \left(\frac{1}{k}\right)' \cdot \frac{1}{\tau}B' \\ &= T + \left(\frac{1}{k}\right)'N + \frac{1}{k}(-kT + \tau B) + \left(\left(\frac{1}{k}\right)' \cdot \frac{1}{\tau} \right)'B + \left(\frac{1}{k}\right)' \cdot \frac{1}{\tau}(-\tau N) \\ &= T + \left(\frac{1}{k}\right)'N - T + \frac{\tau}{k}B + \left(\left(\frac{1}{k}\right)' \cdot \frac{1}{\tau} \right)'B - \left(\frac{1}{k}\right)'N \\ &= T + \left(\frac{1}{k}\right)'N - T + \frac{\tau}{k}B + \left(\left(\frac{1}{k}\right)' \cdot \frac{1}{\tau} \right)'B - \left(\frac{1}{k}\right)'N \\ &= 0T + 0N + \left(\frac{\tau}{k} + \left(\left(\frac{1}{k}\right)' \cdot \frac{1}{\tau} \right)' \right)B = 0 \end{aligned}$$

και η απόδειξη ολοκληρώθηκε.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ. Από τις δύο προηγούμενες ασκήσεις, προκύπτει ότι μία μη επίπεδη καμπύλη του χώρου βρίσκεται πάνω σε μία σφαίρα (δηλ. είναι σφαιρική) τότε και μόνον τότε αν η καμπυλότητα και η στρέψη της ικανοποιούν την συνθήκη

$$\left(\frac{1}{k}\right)^2 + \left(\left(\frac{1}{k}\right)' \cdot \frac{1}{\tau} \right)^2 = c.$$

Άσκηση 27. Δίνεται μία καμπύλη $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ μοναδιαίας ταχύτητας, με καμπυλότητα $k(s) > 0$ για κάθε $s \in I$, και στρέψη $\tau(s)$. Θέτουμε $\beta(s) := T'(s)$, όπου $T(s)$ το εφαπτόμενο διάνυσμα της α . (i) Να αποδειχθεί ότι η β είναι κανονική καμπύλη. (ii) Αν σ είναι η συνάρτηση μήκους τόξου της β (με αρχή το s_0), να αποδειχθεί ότι $\sigma'(s) = k(s)$, για κάθε $s \in I$. (iii) Να υπολογιστεί καμπυλότητα \bar{k} και η στρέψη $\bar{\tau}$ της β .

Λύση. (i) Παρατηρούμε ότι $\beta'(s) = T'(s) = k(s)N(s)$. Επομένως, $\|\beta'(s)\| = k(s) \neq 0$, δηλαδή η β είναι κανονική καμπύλη.

(ii) Εφ' όσον η συνάρτηση μήκους τόξου δίνεται από την σχέση

$$\sigma(s) = \int_{s_0}^s \|\beta'(u)\| du,$$

έχουμε ότι

$$\sigma'(s) = \|\beta'(s)\| = \|T'(s)\| = \|k(s)N(s)\| = k(s).$$

(iii) Επειδή η β δεν είναι απαραίτητα μοναδιαίας ταχύτητας (κάτι τέτοιο θα συνέβαινε αν $k = 1$, πράγμα που δεν δηλώνεται εδώ), θα χρησιμοποιήσουμε τους τύπους της καμπυλότητας και στρέψης που δίνονται από τα Θεωρήματα 1.4.2 και 1.4.3 αντιστοίχως.

Για το σκοπό αυτό βρίσκουμε (παραλείποντας τη μεταβλητή s):

$$\begin{aligned}\beta' &= T' = kN, \\ \beta'' &= k'N + kN' \\ &= k'N + k(-kT + \tau B) \\ &= -k^2T + k'N + k\tau B,\end{aligned}$$

οπότε

$$\begin{aligned}\beta' \times \beta'' &= kN \times (-k^2T + k'N + k\tau B) \\ &= -k^3N \times T + kk'N \times N + k^2\tau N \times B \\ &= k^2\tau T + 0 + k^3B = k^2\tau T + 0N + k^3B,\end{aligned}$$

και

$$\|\beta' \times \beta''\|^2 = k^6 + k^4\tau^2 = k^4(k^2 + \tau^2).$$

Επομένως,

$$\bar{k} = \frac{\|\beta' \times \beta''\|}{\|\beta'\|^3} = \frac{k^2(k^2 + \tau^2)^{1/2}}{k^3} = \frac{(k^2 + \tau^2)^{1/2}}{k}.$$

Για τον προσδιορισμό της στρέψης χρειαζόμαστε και την β''' . Παραγωγίζοντας την β'' , που βρήκαμε πιο πάνω, έχουμε:

$$\begin{aligned}\beta''' &= -2kk'T - k^2T' + k''N + k'N' + k'\tau B + k\tau'B + k\tau B' \\ &= -2kk'T - k^3N + k''N + k'(-kT + \tau B) + (k'\tau + k\tau')B + k\tau(-\tau N) \\ &= -3kk'T + (-k^3 + k'' - k\tau^2)N + (2k'\tau + k\tau')B.\end{aligned}$$

Επομένως,

$$\bar{\tau} = \frac{\langle \beta' \times \beta'', \beta''' \rangle}{\|\beta' \times \beta''\|^2} = \frac{k^3(k\tau' - k'\tau)}{k^4(k^2 + \tau^2)} = \frac{k\tau' - k'\tau}{k(k^2 + \tau^2)}.$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ. Η καμπύλη β καλείται **σφαιρική δείκτρια** (spherical indicatrix) της (συνάρτησης) T . Ανάλογα ορίζονται και οι σφαιρικές δείκτριες των

N και B . Η ορολογία οφείλεται στο γεγονός ότι οι δείκτριες παίρνουν τιμές στη μοναδιαία σφαίρα του \mathbb{R}^3 με κέντρο το 0.

Άσκηση 28. Δίνεται η καμπύλη

$$\alpha(t) = (e^{-t} \cos t, e^{-t} \sin t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

(i) Να αποδειχθεί ότι $\lim_{t \rightarrow +\infty} \alpha(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \alpha'(t) = (0, 0)$. (ii) Να υπολογιστεί το $\int_{t_0}^{\infty} \|\alpha'(u)\| du$. (iii) Να υπολογιστεί η καμπυλότητα της α .

Λύση. Η καμπύλη είναι ειδική περίπτωση λογαριθμικής σπείρας (βλ. Άσκηση 13, με $a = 1$ και $b = -1$). Επομένως το (i) αποδεικνύεται αναλόγως. Για το (ii) έχουμε διαδοχικά:

$$\begin{aligned} \alpha'(t) &= (-e^{-t} \cos t - e^{-t} \sin t, -e^{-t} \sin t + e^{-t} \cos t), \\ \|\alpha'(t)\| &= ((-e^{-t} \cos t - e^{-t} \sin t)^2 + (-e^{-t} \sin t + e^{-t} \cos t)^2)^{1/2} = \sqrt{2}e^{-t}, \\ \int_{t_0}^t \|\alpha'(u)\| du &= \sqrt{2} \int_{t_0}^t e^{-u} du = \sqrt{2} (-e^{-u}) \Big|_{t_0}^t = \sqrt{2} (e^{-t_0} - e^{-t}). \end{aligned}$$

Επομένως,

$$\int_{t_0}^{\infty} \|\alpha'(u)\| du = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_{t_0}^t \|\alpha'(u)\| du = \sqrt{2} e^{-t_0}.$$

(iii) Θέτοντας

$$\alpha_1(t) := e^{-t} \cos t, \quad \alpha_2(t) := e^{-t} \sin t,$$

έχουμε:

$$\begin{aligned} \alpha_1'(t) &= -e^{-t} \cos t - e^{-t} \sin t, \\ \alpha_2'(t) &= -e^{-t} \sin t + e^{-t} \cos t, \\ \alpha_1''(t) &= 2e^{-t} \sin t, \\ \alpha_2''(t) &= -2e^{-t} \cos t, \\ \alpha_1'(t)\alpha_2''(t) - \alpha_1''(t)\alpha_2'(t) &= 2e^{-2t}, \\ \|\alpha'(t)\|^2 &= \alpha_1'(t)^2 + \alpha_2'(t)^2 = 2e^{-2t}, \end{aligned}$$

οπότε

$$k(t) = |k_*(t)| = \frac{|\alpha_1'(t)\alpha_2''(t) - \alpha_1''(t)\alpha_2'(t)|}{\|\alpha'(t)\|^3} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^t.$$

[Προφανώς, η παραπάνω τιμή της καμπυλότητας συμφωνεί με αυτήν που προκύπτει από τον (γενικό) τύπο καμπυλότητας της Άσκησης 13, αν θέσουμε $a = 1$ και $b = -1$.]

Άσκηση 29. Δίνονται δύο πραγματικοί αριθμοί λ και μ . Να βρεθεί πότε αυτοί ορίζουν (μη επίπεδη) καμπύλη α με καμπυλότητα $k^\alpha = \lambda$ και στρέψη $\tau^\alpha = \mu$. Ποιό είδος καμπύλης είναι αυτό;

Λύση. Για να ορίζεται καμπύλη α στο χώρο με την αναφερόμενη ιδιότητα πρέπει $\lambda > 0$ και $\mu \neq 0$. Επειδή η καμπυλότητα και η στρέψη της α είναι και οι δύο σταθερές, πράγμα που συμβαίνει και σε κάθε κυκλική έλικα, υποπτευόμαστε ότι η α είναι κάποια κυκλική έλικα.

Θεωρούμε την κυκλική έλικα της Άσκησης 7 και την αναπαραμέτρησή της μέσω μήκους τόξου

$$\beta(s) = \left(r \cos \frac{s}{c}, r \sin \frac{s}{c}, \frac{b}{c}s \right),$$

όπου $c^2 = r^2 + b^2$. Αν θέλουμε οι α και β να έχουν ίδια καμπυλότητα και στρέψη (οπότε διαφέρουν μόνον κατά την θέση τους στο χώρο), θέτουμε

$$\frac{r}{r^2 + b^2} = \lambda \quad \text{και} \quad \frac{b}{r^2 + b^2},$$

οπότε επιλύοντας στοιχειωδώς το προηγούμενο σύστημα ως προς r και b βρίσκουμε ότι

$$r = \frac{\lambda}{\lambda^2 + \mu^2} \quad \text{και} \quad b = \frac{\mu}{\lambda^2 + \mu^2}.$$

Επομένως, αν θεωρήσουμε την καμπύλη

$$\gamma(s) = \left(\frac{\lambda}{\lambda^2 + \mu^2} \cos \left(s\sqrt{\lambda^2 + \mu^2} \right), \frac{\lambda}{\lambda^2 + \mu^2} \sin \left(s\sqrt{\lambda^2 + \mu^2} \right), \frac{\mu\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}}{\lambda^2 + \mu^2} s \right),$$

παρατηρούμε ότι είναι μία κυκλική έλικα μοναδιαίας ταχύτητας με καμπυλότητα $k^\gamma = \lambda$ και στρέψη $\tau^\gamma = \mu$ (αρκεί στους τύπους που δίνουν την καμπυλότητα και στρέψη της β να κάνουμε την προηγούμενη αντικατάσταση των r και b). Επομένως, κατά το Θεμελιώδες Θεώρημα των Καμπυλών, οι α και γ συμπίπτουν μέσω στερεάς κίνησης, άρα α η παριστά πραγματικά μία κυκλική έλικα.

Άσκηση 30. Έστω $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ επίπεδη καμπύλη μοναδιαίας ταχύτητας με καμπυλότητα $k(s) < 1$, $\forall s \in I$. Θεωρούμε την καμπύλη

$$\beta(s) := \alpha(s) + N(s), \quad s \in I.$$

(παράλληλη της α), όπου $N(s)$ το πρώτο κάθετο διάνυσμα της α . Να αποδειχθεί ότι η β είναι κανονική και ότι η καμπυλότητά της k_β δίνεται από την σχέση

$$k_\beta = \frac{k}{1 - k}.$$

Λύση. (α) Η β είναι κανονική:

$$\beta'(s) = \alpha'(s) + N'(s) = T(s) - k(s) \cdot T(s) = (1 - k(s)) \cdot T(s) \neq 0.$$

(β) Η β δεν είναι καμπύλη μοναδιαίας ταχύτητας, άρα υπολογίζουμε την καμπυλότητά της από τον τύπο του θεωρήματος 1.4.2. Παραλείποντας την μεταβλητή s , έχουμε

$$\|\beta'\| = \|(1 - k)T\| = |1 - k| = 1 - k$$

$$\beta'' = (1 - k)'T + (1 - k)T' = (1 - k)'T + (1 - k)kN$$

$$\begin{aligned} \beta' \times \beta'' &= (1 - k)T \times ((1 - k)'T + (1 - k)kN) \\ &= (1 - k)(1 - k)'T \times T + (1 - k)^2 kT \times N \\ &= k(1 - k)B \end{aligned}$$

$$\|\beta' \times \beta''\| = k(1 - k)^2$$

$$k_\beta = \frac{k(1 - k)^2}{(1 - k)^3} = \frac{k}{1 - k}.$$

Άσκηση 31. Εστω $\alpha(s)$ καμπύλη μοναδιαίας ταχύτητας με στρέψη $\tau(s) \neq 0$. Να εκφραστεί η καμπυλότητα k της α συναρτήσει της τ και των δευτέρων κάθετων διανυσμάτων $B(s)$.

Λύση. Από τον τύπο των Frenet-Serret για την παράγωγο του B , παίρνουμε ότι

$$N(s) = -\frac{B'(s)}{\tau(s)},$$

οπότε από τον ορισμό της καμπυλότητας έχουμε διαδοχικά:

$$\begin{aligned} k(s) &= \|T'(s)\| = \|(N(s) \times B(s))'\| \\ &= \left\| \left(-\frac{B'(s)}{\tau(s)} \times B(s) \right)'\right\| \\ &= \left\| \left(-\frac{B'(s)}{\tau(s)} \right)' \times B(s) + \left(-\frac{B'(s)}{\tau(s)} \right) \times B'(s) \right\| \\ &= \left\| \frac{-B''(s)\tau(s) + B'(s)\tau'(s)}{\tau(s)^2} \times B(s) + 0 \right\| \\ &= \frac{1}{\tau(s)^2} \|(\tau'(s)B'(s) - \tau(s)B''(s)) \times B(s)\|. \end{aligned}$$

Άσκηση 32. Αν γ είναι κανονική καμπύλη με την ιδιότητα οι διχοτόμοι της γωνίας που σχηματίζουν τα πρώτα κάθετα διανύσματα με τα αντίστοιχα δεύτερα να διέρχονται από σταθερό σημείο, τότε η γ είναι κύκλος.

Λύση. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η γ είναι μοναδιαίας ταχύτητας. Ακολουθώντας την μεθοδολογία των Ασκήσεων 16-19 και 21, μπορούμε να γράψουμε την συνθήκη της άσκησης με την μορφή

$$(*) \quad p = \gamma(s) + \lambda(s)(N(s) + B(s)),$$

όπου p το διάνυσμα θέσης του δοσμένου σταθερού σημείου και $\lambda(s)$ διαφορίσιμη συνάρτηση. Παραγωγίζουμε την (*) και, παραλείποντας το s , βρίσκουμε

$$T + \lambda'(N + B) + \lambda(-kT + \tau B - \tau N) = 0,$$

ή, ισοδύναμα,

$$(1 - \lambda k)T + (\lambda' - \lambda \tau)N + (\lambda' + \lambda \tau)B = 0,$$

οπότε

$$1 - \lambda k = 0, \quad \lambda' - \lambda \tau = 0, \quad \lambda' + \lambda \tau = 0.$$

Αθροίζοντας τις δύο τελευταίες βρίσκουμε $\lambda' = 0$, άρα $\lambda = c = \text{σταθερό}$ και το σύστημα των παραπάνω ισοτήτων γίνεται

$$1 - ck = 0, \quad c\tau = 0.$$

Από την πρώτη προκύπτει $c \neq 0$ και $k = 1/c$ σταθερό, και από την δεύτερη $\tau = 0$. Άρα η γ είναι κύκλος ακτίνας c .

Άσκηση 33. Εστω $\beta(s)$, $s \in J$, καμπύλη μοναδιαίας ταχύτητας, της οποίας γνωρίζουμε τα δεύτερα κάθετα διανύσματα $B(s)$, για κάθε $s \in J$. Να βρεθεί η καμπύλη, αν $\tau > 0$.

Λύση. Από την σχέση $B' = -\tau N$, βρίσκουμε τη στρέψη και τα πρώτα κάθετα διανύσματα:

$$\tau = |-\tau| \cdot \|N\| = \|-\tau N\| = \|B'\|,$$

$$N = -\frac{B'}{\tau}.$$

Κατόπιν υπολογίζουμε τα εφαπτόμενα διανύσματα

$$\beta' = T = N \times B$$

και τελικά την ζητούμενη β , ολοκληρώνοντας τα T :

$$\beta = \int T + c.$$

Κεφάλαιο 2

Κανονικές Επιφάνειες

2.0 Εισαγωγή

Οι επιφάνειες είναι αντικείμενα του χώρου \mathbb{R}^3 (όπως η σφαίρα, ο κύλινδρος κ.α.), τα οποία τοπικά "μοιάζουν" με το \mathbb{R}^2 , όπως θα ορίσουμε αυστηρά πιο κάτω. Οι επιφάνειες είχαν απασχολήσει και τους αρχαίους μαθηματικούς. Κατά τον Ευκλείδη «*επιφάνεια [δέ] είναι ό,τι έχει μόνον μήκος και πλάτος*», πράγμα που υποδηλώνει τον διδιάστατο χαρακτήρα αυτών των αντικειμένων.

Ένα βασικό γεωμετρικό πρόβλημα είναι η απεικόνιση της σφαίρας επί ενός επιπέδου. Η πρώτη απάντηση δόθηκε από τον Ίππαρχο μέσω της στερεογραφικής προβολής. Την μέθοδο αυτή ακολούθησε και ο Πτολεμαίος για να κατασκευάσει χάρτες του ουρανού θόλου. Σε πολύ νεώτερους χρόνους, οι μεγάλες εξερευνήσεις και οι συνακόλουθες ανάγκες της ναυσιπλοΐας έκαναν επιτακτική την κατασκευή (ακριβών) χαρτών, οπότε χρησιμοποιήθηκαν κι άλλες προβολές, όπως αυτές του Mercator, του Lambert, η αζιμουθιακή κ.α. Προφανώς, η κατασκευή χαρτών ανάγεται στο γενικότερο πρόβλημα της απεικόνισης μιας επιφάνειας σε μίαν άλλη. Για περισσότερες λεπτομέρειες, σχετικές με τα μαθηματικά προβλήματα της χαρτογραφίας (και των απεικονίσεων μεταξύ επιφανειών) παραπέμπουμε στα βιβλία [8, σελ. 116–130] και [9, σελ. 124–159]. Στο τελευταίο (βλ. σελ. 536–542) περιέχονται και αρκετά ιστορικά στοιχεία, αναφερόμενα στην εξέλιξη της Θεωρίας των Επιφανειών.

Με τον όρο Θεωρία των Επιφανειών εννοούμε εδώ την μελέτη των επιφανειών με την βοήθεια του Διαφορικού Λογισμού (όπως έγινε στο Κεφάλαιο 1 για τις καμπύλες). Στη διαμόρφωση και ανάπτυξη του σημαντικότητας αυτού κλάδου της γεωμετρίας συνέβαλαν αποφασιστικά ο L. Euler, ο G. Monge, και

ιδιαίτερα ο C. F. Gauss. Ο τελευταίος, το 1827 παρουσίασε στη Βασιλική Επιστημονική Εταιρεία του Göttingen το θεμελιώδες έργο του *Disquisitiones Generales circa Superficies Curvas* ("Γενικές Έρευνες επί των Καμπυλωμένων Επιφανειών"), στην οποία η μελέτη των επιφανειών παίρνει την μορφή που γνωρίζουμε σήμερα. Μεταξύ των πολλών άλλων γεωμετρών, που επίσης συνέβαλαν στην ανάπτυξη της Θεωρίας Επιφανειών, αναφέρουμε κυρίως τους O. Bonnet, E. B. Christoffel, D. Codazzi, G. Darboux, Ch. Dupin, T. Levi-Civita, J. B. Meusnier, F. Mindig, A. F. Möbius, J. Plücker, O. Rodrigues, H. Poincaré, J. Weingarten.

Παρά το γεγονός ότι, όπως και ο Gauss, ξεκινάμε την μελέτη των επιφανειών χρησιμοποιώντας συστηματικά την υπόθεση ότι αυτές είναι διδιάστατα αντικείμενα εμβαπτισμένα στον τριδιάστατο χώρο, το περίφημο Θεώρημα Egregium ("Έξοχο Θεώρημα") του ίδιου έδειξε ότι οι επιφάνειες διαθέτουν μια "εσωτερική γεωμετρία", ανεξάρτητη από τον περιβάλλοντα χώρο \mathbb{R}^3 . Αυτό σημαίνει ότι αν στη γήινη σφαίρα κατοικούσαν διδιάστατα ευφυή όντα με ανεπτυγμένες μαθηματικές γνώσεις, θα μπορούσαν να αντιληφθούν τη γεωμετρία της σφαίρας χωρίς να έχουν την αίσθηση της τρίτης διάστασης (του ύψους). Η προηγούμενη ανακάλυψη οδήγησε τον B. Riemann στη θεώρηση της αντίστοιχης μη ευκλείδειας γεωμετρίας που φέρει το όνομά του, και στην έννοια της διαφορικής πολλαπλότητας (η οποία μελετάται σε άλλο εξάμηνο σπουδών).

2.1 Βασικοί Ορισμοί

2.1.1 Ορισμός. Μια **παραμέτρηση επιφανείας** (surface parametrization) ή **2-διάστατο σύστημα συντεταγμένων** (coordinate system) ή **2-διάστατος χάρτης** (chart or patch), ή και **παραμετρημένη επιφάνεια** (parametrized surface) είναι μια τριάδα (U, r, W) , όπου $U \subseteq \mathbb{R}^2$ ανοιχτό, $r: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ διαφορίσιμη απεικόνιση και $W = r(U)$, με τις ιδιότητες:

- (1) Η $r: U \rightarrow W = r(U)$ είναι ομοιομορφισμός:
- (2) Για κάθε $q = (u, v) \in U$, το διαφορικό $Dr(q): \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ είναι 1-1.

Στην επόμενη σελίδα παραθέτουμε το σχετικό Σχήμα 2.1.

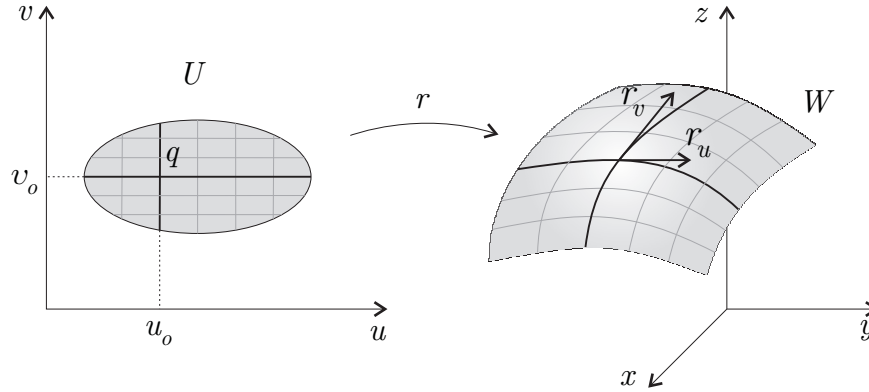
2.1.2 Παρατηρήσεις. 1) Στην συνθήκη (1), το W θεωρείται εφοδιασμένο με την σχετική τοπολογία που έχει ως υποσύνολο του \mathbb{R}^3 .

2) Επειδή $r: U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, μπορούμε να γράψουμε ότι

$$r = (x, y, z)$$

όπου $x := pr_1 \circ r$, $y := pr_2 \circ r$, $z := pr_3 \circ r: U \rightarrow \mathbb{R}$ είναι οι *συντεταγμένες* της r . Άρα

$$r(u, v) = ((x(u, v), y(u, v), z(u, v))), \quad \forall (u, v) \in U.$$



Σχήμα 2.1

Εφ' όσον η r είναι διαφορίσιμη, υπάρχουν όλες οι μερικές παράγωγοι, όλων των τάξεων. Επομένως, για κάθε $q = (u_0, v_0) \in U$, ορίζεται ο αντίστοιχος πίνακας Jacobi (βλ. Παράρτημα, §Α'.15)

$$(2.1.1) \quad J_q r = \begin{pmatrix} \left. \frac{\partial x}{\partial u} \right|_q & \left. \frac{\partial x}{\partial v} \right|_q \\ \left. \frac{\partial y}{\partial u} \right|_q & \left. \frac{\partial y}{\partial v} \right|_q \\ \left. \frac{\partial z}{\partial u} \right|_q & \left. \frac{\partial z}{\partial v} \right|_q \end{pmatrix}.$$

Συνεπώς, η συνθήκη (2) του Ορισμού 2.1.1 ισοδυναμεί με το ότι η τάξη του $J_q r$ είναι 2, που με την σειρά του ισοδυναμεί με το ότι μία από τις υποορίζουσες

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \Big|_q := \det \begin{pmatrix} \left. \frac{\partial x}{\partial u} \right|_q & \left. \frac{\partial x}{\partial v} \right|_q \\ \left. \frac{\partial y}{\partial u} \right|_q & \left. \frac{\partial y}{\partial v} \right|_q \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial(x, z)}{\partial(u, v)} \Big|_q := \det \begin{pmatrix} \left. \frac{\partial x}{\partial u} \right|_q & \left. \frac{\partial x}{\partial v} \right|_q \\ \left. \frac{\partial z}{\partial u} \right|_q & \left. \frac{\partial z}{\partial v} \right|_q \end{pmatrix},$$

$$\frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} \Big|_q := \det \begin{pmatrix} \left. \frac{\partial y}{\partial u} \right|_q & \left. \frac{\partial y}{\partial v} \right|_q \\ \left. \frac{\partial z}{\partial u} \right|_q & \left. \frac{\partial z}{\partial v} \right|_q \end{pmatrix},$$

δεν μηδενίζεται, ή ισοδύναμα,

$$(2.1.2) \quad \left(\left. \frac{\partial x}{\partial u} \right|_q, \left. \frac{\partial y}{\partial u} \right|_q, \left. \frac{\partial z}{\partial u} \right|_q \right) \times \left(\left. \frac{\partial x}{\partial v} \right|_q, \left. \frac{\partial y}{\partial v} \right|_q, \left. \frac{\partial z}{\partial v} \right|_q \right) \neq 0.$$

3) Ας παρατηρήσουμε ακόμη ότι η τελευταία σχέση σημαίνει ότι τα διανύσματα

$$(2.1.3) \quad r_u(q) := \frac{\partial r}{\partial u} \Big|_q = \left(\frac{\partial x}{\partial u} \Big|_q, \frac{\partial y}{\partial u} \Big|_q, \frac{\partial z}{\partial u} \Big|_q \right)$$

και

$$(2.1.4) \quad r_v(q) := \frac{\partial r}{\partial v} \Big|_q = \left(\frac{\partial x}{\partial v} \Big|_q, \frac{\partial y}{\partial v} \Big|_q, \frac{\partial z}{\partial v} \Big|_q \right)$$

είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, άρα ορίζουν ένα διδιάστατο υπόχωρο (επίπεδο) μέσα στο \mathbb{R}^3 , που αν μεταφερθεί κατά $r(q)$ ορίζει το εφαπτόμενο επίπεδο του χώρου $r(U)$ στο $r(q)$. Θα μελετήσουμε το εφαπτόμενο επίπεδο λεπτομερέστερα στην Παράγραφο 2.6.

4) Με τους συμβολισμούς της προηγούμενης παρατήρησης, η (2.1.2) ισοδυναμεί με την συνθήκη

$$(2.1.2') \quad \|r_u(q) \times r_v(q)\| \neq 0.$$

Πολλές φορές, ο έλεγχος της τελευταίας είναι πρακτικά πίο εύκολος απ' αυτόν των άλλων ισοδύναμων συνθηκών.

5) Συχνά, λέμε και γράφουμε απλά «**η παραμέτρηση r** », παραλείποντας το πεδίο ορισμού U και το πεδίο τιμών W του χάρτη. Στη συνέχεια θα χρησιμοποιούμε αδιακρίτως τους όρους παραμέτρηση (επιφανείας), σύστημα συντεταγμένων, χάρτης, και παραμετρημένη επιφάνεια.

2.1.3 Πρόταση. Έστω (U, r, W) μια παραμέτρηση επιφανείας. Τότε ισχύουν τα επόμενα συμπεράσματα:

(1) Η r δεν είναι σταθερά.

(2) Η r δεν είναι ανεξάρτητη του u ή του v .

Επομένως, η εικόνα $r(U)$ μιας παραμέτρησης επιφανείας δεν είναι ούτε σημείο, ούτε καμπύλη.

Απόδειξη. (1) Αν $r = c$, τότε $Dr(q) = 0$, για κάθε $q \in U$, άτοπο.

(2) Αν η r είναι ανεξάρτητη του u , τότε $r_u(q) = 0$, οπότε και $r_u(q) \times r_v(q) = 0$, επίσης άτοπο. Ανάλογα για το v . \square

Ας πάρουμε και πάλι μια παραμέτρηση επιφανείας (U, r, W) . Θα ερμηνεύσουμε γεωμετρικά τα διανύσματα $r_u(q)$ και $r_v(q)$, για τυχόν $q \in U$.

Θεωρούμε ένα σημείο $q_o = (u_o, v_o) \in U$ και την απεικόνιση

$$(2.1.5) \quad \alpha: u \longrightarrow \alpha(u) := r(u, v_o) = (x(u, v_o), y(u, v_o), z(u, v_o)).$$

Η α είναι μια διαφορίσιμη καμπύλη με τιμές στο $W = r(U)$, για την οποία

$$(2.1.6) \quad \alpha'(u_o) = \left. \frac{\partial r}{\partial u} \right|_{q_o} = r_u(q_o).$$

Δηλαδή

Το $r_u(q_o) = \left. \frac{\partial r}{\partial u} \right|_{q_o}$ είναι το εφαπτόμενο διάνυσμα, στο σημείο u_o , της διαφορίσιμης καμπύλης $u \mapsto \alpha(u) := r(u, v_o)$. Ανάλογα, το $r_v(q_o) = \left. \frac{\partial r}{\partial v} \right|_{q_o}$ είναι το εφαπτόμενο διάνυσμα, στο σημείο v_o , της διαφορίσιμης καμπύλης $v \mapsto \beta(v) := r(u_o, v)$.

Επαναλαμβάνοντας την ίδια διαδικασία για όλα τα $q = (u, v) \in U$, βλέπουμε ότι η εικόνα $W = r(U)$ σαρώνεται από καμπύλες της μορφής

$$\alpha: u \longrightarrow r(u, v) \quad \text{και} \quad \beta: v \longrightarrow r(u, v),$$

των οποίων τα αντίστοιχα εφαπτόμενα διανύσματα είναι τα

$$r_u(q) = \left. \frac{\partial r}{\partial u} \right|_q \quad \text{και} \quad r_v(q) = \left. \frac{\partial r}{\partial v} \right|_q,$$

για κάθε $q = (u, v) \in U$ (βλ. επίσης και το Σχήμα 2.1).

Οι καμπύλες α και β , που ορίστηκαν προηγουμένως (μέσω της παραμετρησης) καλούνται **καμπύλες συντεταγμένων** (coordinate curves) ή **παραμετρικές καμπύλες** (parameter curves) της (U, r, W) .

2.1.4 Ορισμός. Μια **κανονική επιφάνεια** (regular surface) είναι ένα υποσύνολο S του \mathbb{R}^3 για το οποίο υπάρχει μια οικογένεια $\{(U_i, r_i, W_i)\}_{i \in I}$ 2-διάστατων χαρτών (παραμετρήσεων), έτσι ώστε $W_i \subseteq S$ ανοιχτό (στο S με την σχετική τοπολογία) και

$$S = \bigcup_{i \in I} W_i.$$

Ισοδύναμα, για κάθε $p \in S$, υπάρχει 2-διάστατος χάρτης (U_p, r_p, W_p) , με $p \in W_p$ και $W_p \subseteq S$ ανοιχτό. Το σύνολο των 2-διάστατων χαρτών του S λέμε ότι αποτελεί έναν (2-διάστατο) **άτλαντα**.

Υπενθυμίζουμε εδώ ότι (σύμφωνα με την σχετική τοπολογία του S , ως υποχώρου του \mathbb{R}^3) ένα $W \subseteq S$ είναι ανοιχτό στο S , εάν $W = A \cap S$, όπου $A \subseteq \mathbb{R}^3$ ανοιχτό.

Από τον προηγούμενο ορισμό προκύπτει ότι αν (U, r, W) είναι παραμέτρηση επιφάνειας, τότε το $S = W$ είναι μία κανονική επιφάνεια, που καλύπτεται ολόκληρη από τον δοσμένο χάρτη. Προφανώς το W είναι ανοιχτό στον εαυτό του, αφού $W = W \cap \mathbb{R}^3$.

2.2 Παραδείγματα

Παράδειγμα 1. Τα ανοιχτά υποσύνολα του \mathbb{R}^2 .

Έστω $U \subseteq \mathbb{R}^2$ ανοιχτό. Παρατηρούμε ότι η κανονική εμφύτευση

$$i: U \longrightarrow S = U \times \{0\} \subseteq \mathbb{R}^3: (u, v) \mapsto (u, v, 0)$$

είναι απεικόνιση 1-1 και επί, συνεχής με συνεχή αντίστροφη την

$$i^{-1}: U \times \{0\} \longrightarrow U: (u, v, 0) \mapsto (u, v)$$

(άρα ομοιομορφισμός) και ο πίνακας

$$J_q i = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

είναι τάξης 2, σε κάθε $q = (u, v) \in U$. Επομένως η τριάδα $(U, i, U \times \{0\})$ είναι 2-διάστατη παραμέτρηση και το $S = U \times \{0\}$ κανονική επιφάνεια, που καλύπτεται όλη από μία παραμέτρηση. Ταυτίζοντας τώρα το U με το $U \times \{0\}$ (μέσω της i) μπορούμε να θεωρήσουμε και το U κανονική επιφάνεια.

Παράδειγμα 2. Τα επίπεδα του \mathbb{R}^3 .

Ας θεωρήσουμε ένα επίπεδο

$$\Pi := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : Ax + By + Cz + D = 0\}.$$

Το Π είναι εικόνα ενός 2-διάστατου χάρτη: Επειδή για να ορίζεται επίπεδο πρέπει να είναι $(A, B, C) \neq (0, 0, 0)$, μπορούμε χωρίς βλάβη της γενικότητας να υποθέσουμε ότι $C \neq 0$, και να θεωρήσουμε την απεικόνιση

$$r: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3: (u, v) \mapsto \left(u, v, \frac{-D - Au - Bv}{C} \right).$$

Προφανώς η r είναι 1-1, επί του Π και συνεχής. Επομένως υπάρχει η αντίστροφη

$$r^{-1}: \Pi \longrightarrow \mathbb{R}^2: (x, y, z) \mapsto (x, y).$$

Η r^{-1} είναι συνεχής, ως περιορισμός της συνεχούς απεικόνισης

$$\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2: (x, y, z) \mapsto (x, y)$$

στο Π , άρα η $r: \mathbb{R}^2 \rightarrow \Pi$ είναι ομοιομορφισμός. Επιπλέον, η r είναι διαφορίσιμη και μπορεί να γραφτεί με την μορφή

$$r = (x, y, z),$$

όπου

$$\begin{aligned}x(u, v) &= pr_1(u, v) = u, \\y(u, v) &= pr_2(u, v) = v, \\z(u, v) &= \frac{-D - Au - Bv}{C},\end{aligned}$$

οπότε

$$J_{(u,v)}r = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -\frac{A}{C} & -\frac{B}{C} \end{pmatrix}$$

που είναι πίνακας τάξης 2. Άρα ισχύουν οι συνθήκες του Ορισμού 2.1.1. Επιπλέον, το Π είναι κανονική επιφάνεια που καλύπτεται από μία παραμέτρηση.

Παράδειγμα 3. Η σφαίρα S^2 .

Ας παρατηρήσουμε πρώτα ότι η σφαίρα

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

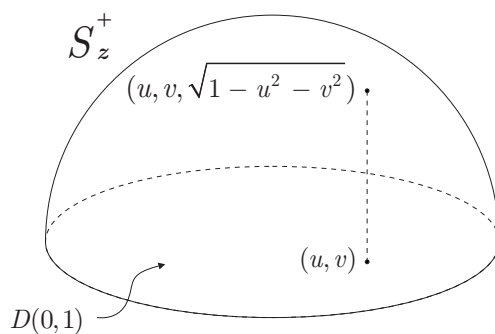
είναι συμπαγές υποσύνολο του \mathbb{R}^3 και δεν μπορεί να είναι ομοιομορφική με κανένα ανοιχτό $U \subseteq \mathbb{R}^2$. Ομως, αν αφαιρεθεί ένα σημείο, το υποσύνολο που μένει είναι ομοιομορφικό με το επίπεδο, όπως θα αποδείξουμε αργότερα.

Προς το παρόν, θα θεωρήσουμε μικρότερα μέρη της σφαίρας, τα ημισφαίρια, που είναι ομοιομορφικά με ανοιχτά υποσύνολα του επιπέδου. Έτσι ορίζουμε την απεικόνιση

$$r_z^+ : D(0, 1) \longrightarrow \mathbb{R}^3 : (u, v) \mapsto (u, v, \sqrt{1 - u^2 - v^2}),$$

όπου

$$D(0, 1) := \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + v^2 < 1\}.$$



Σχήμα 2.2

Η r_z^+ είναι 1-1 και επί του συνόλου

$$S_z^+ := \{(x, y, z) \in S^2 : z > 0\},$$

που είναι ανοιχτό υποσύνολο του S^2 , αφού $S_z^+ = S^2 \cap (\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times (0, +\infty))$. Η αντίστροφη της r_z^+ είναι η απεικόνιση

$$(r_z^+)^{-1} : S_z^+ \longrightarrow D(0, 1) : (x, y, z) \mapsto (x, y).$$

Οι r_z^+ και $(r_z^+)^{-1}$ είναι συνεχείς, άρα ομοιομορφισμοί, και η r_z^+ είναι διαφορίσιμη. Για κάθε $(u, v) \in D(0, 1)$ έχουμε

$$J_{(u,v)r_z^+} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -\frac{u}{\sqrt{1-u^2-v^2}} & -\frac{v}{\sqrt{1-u^2-v^2}} \end{pmatrix},$$

δηλαδή το διαφορικό της r_z^+ είναι (μέγιστης) τάξης 2 (με την έννοια ότι ο αντίστοιχος πίνακας Jacobi έχει τάξη 2), για κάθε $(u, v) \in D(0, 1)$.

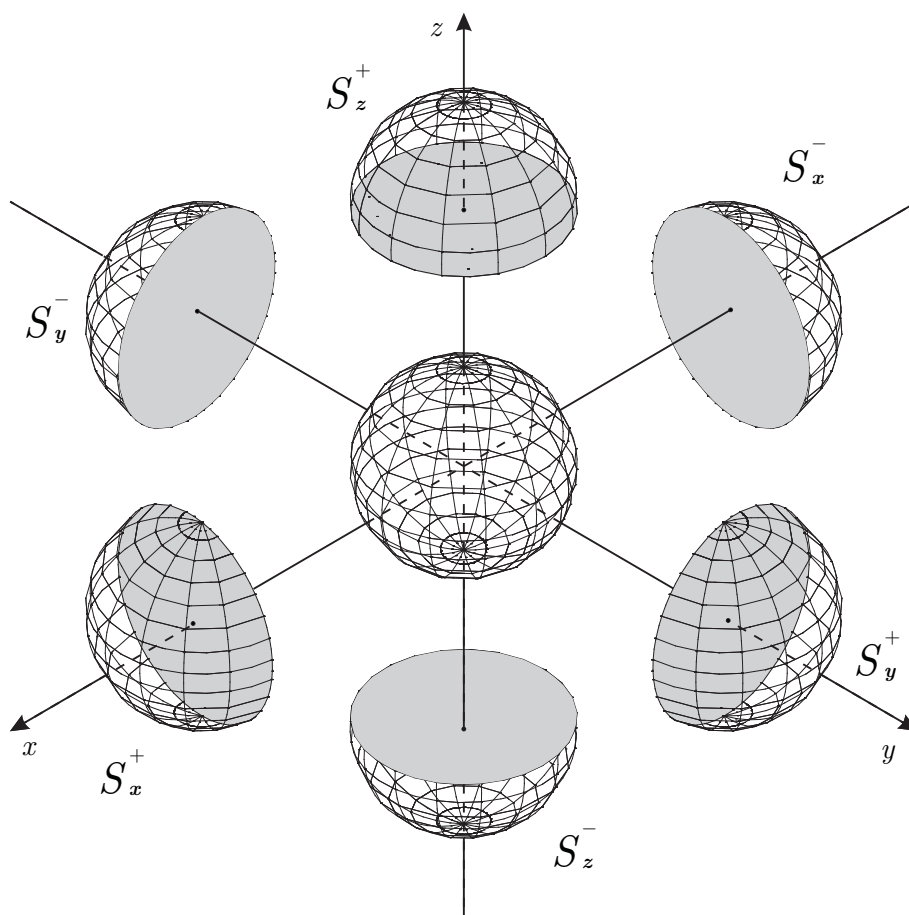
Ανάλογα, ορίζουμε τα υποσύνολα του S^2

$$\begin{aligned} S_z^- &:= \{(x, y, z) \in S^2 : z < 0\}, \\ S_x^+ &:= \{(x, y, z) \in S^2 : x > 0\}, \\ S_x^- &:= \{(x, y, z) \in S^2 : x < 0\}, \\ S_y^+ &:= \{(x, y, z) \in S^2 : y > 0\}, \\ S_y^- &:= \{(x, y, z) \in S^2 : y < 0\}, \end{aligned}$$

και τις παραμετρήσεις

$$\begin{aligned} r_x^+ &: D(0, 1) \longrightarrow S_x^+ &: (u, v) \mapsto (\sqrt{1-u^2-v^2}, u, v), \\ r_x^- &: D(0, 1) \longrightarrow S_x^- &: (u, v) \mapsto (-\sqrt{1-u^2-v^2}, u, v), \\ r_y^+ &: D(0, 1) \longrightarrow S_y^+ &: (u, v) \mapsto (u, \sqrt{1-u^2-v^2}, v), \\ r_y^- &: D(0, 1) \longrightarrow S_y^- &: (u, v) \mapsto (u, -\sqrt{1-u^2-v^2}, v), \\ r_z^- &: D(0, 1) \longrightarrow S_z^- &: (u, v) \mapsto (u, v, -\sqrt{1-u^2-v^2}). \end{aligned}$$

Η οικογένεια των 6 προηγούμενων παραμετρήσεων καλύπτει όλη την σφαίρα, η οποία έτσι γίνεται κανονική επιφάνεια. Μια συνολική εικόνα των σχετικών ημισφαιρίων παρέχει το Σχήμα 2.3.



Σχήμα 2.3

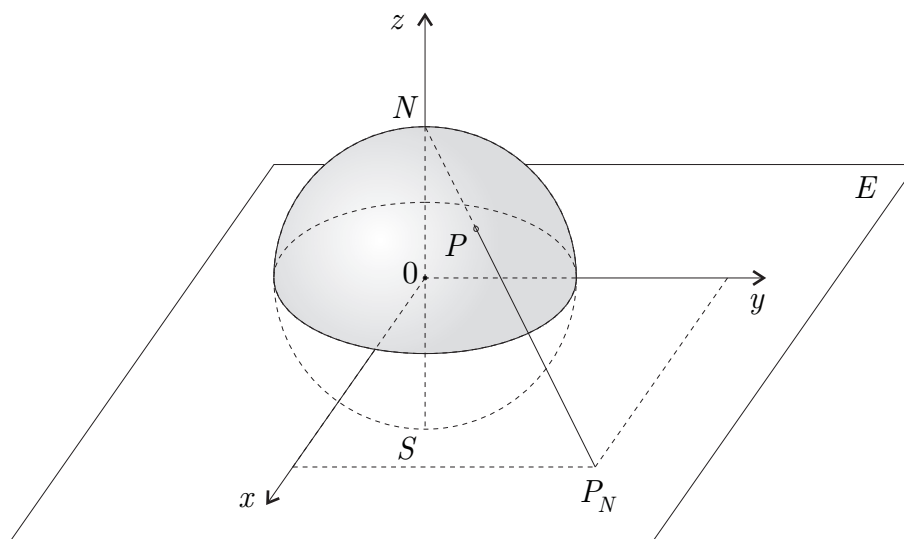
Περιγράψουμε τώρα δύο ακόμη παραμετρήσεις της S^2 , των οποίων οι εικόνες είναι τα μεγαλύτερα δυνατά υποσύνολα της, δηλαδή ολόκληρη η σφαίρα πλην ενός μόνον σημείου. Η πλήρης απόδειξη των ισχυρισμών δίνεται στις ασκήσεις του κεφαλαίου.

Θεωρούμε τον βόρειο πόλο N της σφαίρας και το επίπεδο E του ισημερινού (βλ. Σχήμα 2.4). Αν P είναι τυχόν σημείο της σφαίρας, διαφορετικό του N , φέρουμε την ευθεία NP και συμβολίζουμε με P_N την τομή της τελευταίας με το επίπεδο E . Με την διαδικασία αυτή όλα τα σημεία της σφαίρας, εκτός του N , απεικονίζονται στο επίπεδο του ισημερινού και αντιστρόφως, οπότε ορίζεται μία 1-1 και επί απεικόνιση

$$r_N^{-1}: S^2 \setminus \{N\} \longrightarrow \mathbb{R}^2: (x, y, z) \mapsto \left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z} \right),$$

η οποία καλείται **στερεογραφική προβολή από τον βόρειο πόλο**. Διαπιστώνεται ότι η αντίστροφη της r_N^{-1} είναι η απεικόνιση

$$r_N: \mathbb{R}^2 \longrightarrow S^2 \setminus \{N\}: (u, v) \mapsto \left(\frac{2u}{1+u^2+v^2}, \frac{2v}{1+u^2+v^2}, \frac{-1+u^2+v^2}{1+u^2+v^2} \right).$$



Σχήμα 2.4

Παρατηρούμε ότι η r_N είναι συνεχής όπως και η αντίστροφή της, δηλαδή η $r_N: \mathbb{R}^2 \rightarrow S^2 \setminus \{N\}$ είναι ομοιομορφισμός. Επίσης η r_N είναι διαφορίσιμη και σε κάθε $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ είναι

$$J_{(u,v)}r_N = \frac{2}{(1+u^2+v^2)^2} \begin{pmatrix} 1-u^2+v^2 & -2uv \\ -2uv & 1+u^2-v^2 \\ 2u & 2v \end{pmatrix},$$

που είναι πίνακας (μέγιστης) τάξης 2, άρα η τριάδα $(\mathbb{R}^2, r_N, S^2 \setminus \{N\})$ αποτελεί 2-διάστατο χάρτη (παραμέτρηση) της S^2 .

(Απο τα προηγούμενα γίνεται κατανοητό γιατί συμβολίζουμε την στερεογραφική προβολή με r_N^{-1} , ώστε να χρησιμοποιήσουμε την r_N ως παραμέτρηση, η οποία -όπως συνηθίζουμε- έχει πεδίο ορισμού στο \mathbb{R}^2 .)

Σημείωση. Όπως αναφέρουμε και στην Παρατήρηση 2.1.2(4), για να δείξουμε ότι ο $J_{(u,v)}r_N$ είναι πίνακας μέγιστης τάξης αρκεί να δείξουμε ότι το μήκος του διανύσματος $(r_N)_u(q) \times (r_N)_v(q)$ είναι μη μηδενικό: πράγματι,

$$(*) \quad \|(r_N)_u(q) \times (r_N)_v(q)\| = \frac{4}{(1+u^2+v^2)^2} \neq 0,$$

για κάθε $q = (u, v) \in \mathbb{R}^2$. Οποιοσδήποτε άλλος τρόπος είναι πολυπλοκότερος.

Παρόμοια, η απεικόνιση

$$r_S: \mathbb{R}^2 \longrightarrow S^2 \setminus \{S\}: (u, v) \mapsto \left(\frac{2u}{1+u^2+v^2}, \frac{2v}{1+u^2+v^2}, \frac{1-u^2-v^2}{1+u^2+v^2} \right)$$

ορίζει τον 2-διάστατο χάρτη $(\mathbb{R}^2, r_S, S^2 \setminus \{S\})$, όπου $S := (0, 0, -1)$ είναι ο νότιος πόλος της S^2 . Η αντίστροφη της r_S είναι η απεικόνιση

$$r_S^{-1}: S^2 \setminus \{S\} \longrightarrow \mathbb{R}^2: (x, y, z) \mapsto \left(\frac{x}{1+z}, \frac{y}{1+z} \right),$$

και καλείται **στερεογραφική προβολή (από τον νότιο πόλο)**.

Με τους δύο προηγούμενους χάρτες η S^2 γίνεται κανονική επιφάνεια. Πράγματι, οι δύο εικόνες $S^2 \setminus \{N\}$ και $S^2 \setminus \{S\}$ καλύπτουν το S^2 και είναι ανοιχτά υποσύνολά του (με την σχετική τοπολογία), αφού

$$S^2 \setminus \{N\} = S^2 \cap (\mathbb{R}^3 \setminus \{N\}), \quad S^2 \setminus \{S\} = S^2 \cap (\mathbb{R}^3 \setminus \{S\}).$$



Μία άλλη παραμέτρηση της σφαίρας, που είναι αρκετά πιό εύχρηστη σε διάφορους υπολογισμούς, είναι αυτή με τις **γεωγραφικές συντεταγμένες** (geographical coordinates), που αναφέρεται λεπτομερώς στην Άσκηση 7 του Κεφαλαίου 3.

Παράδειγμα 4. Το γράφημα μιας C^∞ -συνάρτησης $f: U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

Εστω $U \subseteq \mathbb{R}^2$ ανοιχτό και διαφορίσιμη συνάρτηση $f: U \rightarrow \mathbb{R}$. Κατά τα γνωστά, το γράφημά της f είναι το σύνολο

$$\Gamma_f := \{(u, v, f(u, v)) : (u, v) \in U\}.$$

Ορίζουμε την απεικόνιση

$$r: U \longrightarrow \Gamma_f: (u, v) \mapsto r(u, v) := (u, v, f(u, v)).$$

Παρατηρούμε ότι η r είναι διαφορίσιμη αφού οι συντεταγμένες της είναι διαφορίσιμες: $x = pr_1$, $y = pr_2$, $z = f$. Επιπλέον η r είναι 1-1 και επί (του Γ_f) με αντίστροφη την

$$\pi := r^{-1}: \Gamma_f \longrightarrow U: (u, v, f(u, v)) \mapsto (u, v),$$

που είναι επίσης συνεχής, ως προβολή. Άρα η r είναι ομοιομορφισμός. Τέλος,

$$J_{(u,v)}r = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{\partial f}{\partial u} \Big|_{(u,v)} & \frac{\partial f}{\partial v} \Big|_{(u,v)} \end{pmatrix},$$

δηλαδή ο πίνακας Jacobi της r έχει παντού τάξη 2. Επομένως, η τριάδα (U, r, Γ_f) είναι ένα σύστημα συντεταγμένων του Γ_f , που καλύπτει όλο το γράφημα, καθιστώντας το κανονική επιφάνεια.

Στο τελευταίο παράδειγμα είδαμε ότι η παραμέτρηση r έχει την απλή μορφή $r(u, v) = (u, v, f(u, v))$. Τυπικά, το σύνολο $\{(u, v, f(u, v))\}$ είναι γράφημα της $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x, y) = z$. Ανάλογα, το γράφημα μιας $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(x, z) = y$ είναι το σύνολο $\{(u, g(u, v), v)\}$, με παραμέτρηση $r(u, v) = (u, g(u, v), v)$, ενώ το γράφημα μιας $h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με $h(y, z) = x$ είναι το σύνολο $\{(h(u, v), u, v)\}$, με παραμέτρηση $r(u, v) = (h(u, v), u, v)$.

Παραμετρήσεις αυτής της μορφής καλούνται (τύπου) **Monge**. Παρατηρούμε ότι οι παραμετρήσεις της σφαίρας μέσω των ημισφαιρίων είναι γραφήματα συναρτήσεων (για κατάλληλες κάθε φορά συναρτήσεις f). Το ίδιο συμβαίνει και με την παραμέτρηση του επιπέδου. Στην επόμενη παράγραφο θα δούμε ότι κάθε κανονική επιφάνεια διαθέτει τοπικά παραμετρήσεις αυτού του τύπου.

Το επόμενο αποτέλεσμα επιτρέπει την κατασκευή ενός μεγάλου πλήθους κανονικών επιφανειών. Πριν από αυτό εισάγουμε τον εξής συμβολισμό: Για μία διαφορίσιμη απεικόνιση $f: V \rightarrow \mathbb{R}$ ($V \subseteq \mathbb{R}^3$ ανοιχτό), θέτουμε

$$(2.2.1) \quad f_x(p) := \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_p, \quad f_y(p) := \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_p, \quad f_z(p) := \left. \frac{\partial f}{\partial z} \right|_p,$$

για κάθε $p \in V$.

2.2.1 Θεώρημα. Έστω $V \subseteq \mathbb{R}^3$ ανοιχτό, $f: V \rightarrow \mathbb{R}$ διαφορίσιμη απεικόνιση και σημείο $c \in f(V)$ με την ιδιότητα: για κάθε $p \in f^{-1}(c) \equiv f^{-1}(\{c\})$, το διαφορικό $Df(p): \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ είναι απεικόνιση επί. Τότε η $S := f^{-1}(c)$ είναι κανονική επιφάνεια.

Πριν την απόδειξη θα εκφράσουμε με έναν άλλο, ισοδύναμο τρόπο, το επί της $Df(p)$. Αν θέσουμε $p = (x, y, z)$, τότε, σύμφωνα με την (2.2.1), ο πίνακας Jacobi της f στο p είναι ο

$$J_p f = (f_x(p), f_y(p), f_z(p)).$$

Ας υποθέσουμε πρώτα ότι η $Df(p)$ είναι απεικόνιση επί. Αν $t \in \mathbb{R}$ είναι τυχόν στοιχείο με $t \neq 0$, θα υπάρχει $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, τέτοιο ώστε

$$(2.2.2) \quad Df(p)(a, b, c) = af_x(p) + bf_y(p) + cf_z(p) = t \neq 0.$$

Επειδή το σημειούμενο άθροισμα δεν μηδενίζεται, τουλάχιστον μία από τις μερικές παραγώγους είναι μη μηδενική.

Αντιστρόφως, ας υποθέσουμε, για παράδειγμα, ότι $f_z(p) \neq 0$. Τότε, για τυχόν $t \in \mathbb{R}$, έχουμε ότι το διάνυσμα $(0, 0, t \cdot f_z(p)^{-1}) \in \mathbb{R}^3$ έχει εικόνα

$$Df(p)(0, 0, t \cdot f_z(p)^{-1}) = 0 \cdot f_x(p) + 0 \cdot f_y(p) + t \cdot f_z(p)^{-1} \cdot f_z(p) = t.$$

Χρησιμοποιώντας την ίδια διαδικασία, μέσω της σχέσης του διαφορικού και του αντίστοιχου πίνακα Jacobi, διαπιστώνουμε ότι οι δύο προηγούμενες συνθήκες είναι επίσης ισοδύναμες και με την $Df(p) \neq 0$. Επομένως,

$$Df(p) \text{ είναι επί} \Leftrightarrow Df(p) \neq 0 \Leftrightarrow (f_x(p), f_y(p), f_z(p)) \neq 0.$$

Συνεπώς το θεώρημα θα μπορούσε να διατυπωθεί χρησιμοποιώντας και μια από τις άλλες ισοδύναμες συνθήκες.

Απόδειξη. Έστω τυχόν $p_o = (x_o, y_o, z_o) \in S$. Λόγω της υπόθεσης θα είναι

$$(f_x(p_o), f_y(p_o), f_z(p_o)) \neq 0.$$

Ας υποθέσουμε (χωρίς βλάβη της γενικότητας) ότι $f_z(p_o) \neq 0$. Βλέποντας τώρα την f ως συνάρτηση της μορφής $f: V \subseteq \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, το Θεώρημα της Πεπλεγμένης Συνάρτησης συνεπάγεται ότι υπάρχουν ανοιχτές περιοχές $U_o \subseteq \mathbb{R}^2$ και $A_o \subseteq \mathbb{R}$ των (x_o, y_o) και z_o αντιστοίχως, με $U_o \times A_o \subseteq V$, καθώς και μία μοναδική διαφορίσιμη απεικόνιση $g: U_o \rightarrow A_o$, τέτοια ώστε $g(x_o, y_o) = z_o$ και $f(x, y, g(x, y)) = c$, για κάθε $(x, y) \in U_o$. Βάσει των προηγούμενων, ελέγχουμε στοιχειωδώς ότι ισχύει η ισοδυναμία:

$$\left\{ \begin{array}{l} (x, y) \in U_o \\ z = g(x, y) \in A_o \end{array} \right\} \Leftrightarrow (x, y, z) \in (U_o \times A_o) \cap f^{-1}(c).$$

Θεωρούμε τώρα την απεικόνιση

$$r_o: U_o \longrightarrow \mathbb{R}^3: (u, v) \mapsto (u, v, g(u, v)).$$

Από την παραπάνω ισοδυναμία προκύπτει αμέσως ότι

$$W_o := r_o(U_o) = (U_o \times A_o) \cap f^{-1}(c) = (U_o \times A_o) \cap S,$$

το οποίον είναι ανοιχτό υποσύνολο του S (βλ. την σχετική υπενθύμιση μετά τον Ορισμό 2.1.4). Επίσης, το W_o είναι το γράφημα της g , δηλαδή $W_o = \Gamma_g$. Επομένως η τριάδα (U_o, r_o, W_o) αποτελεί μία παραμέτρηση Monge της S με $p_o \in W_o$. Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία για όλα τα σημεία $p \in S$, καλύπτουμε την S με παραμετρήσεις της προηγούμενης μορφής (τύπου Monge), άρα η S είναι κανονική επιφάνεια (αφού, επιπλέον, όλα τα αντίστοιχα W είναι ανοιχτά υποσύνολα της). \square

Παραδείγματα 5 (Εφαρμογή του Θεωρήματος 2.2.1).

(i) Η σφαίρα S^2 :

Θεωρούμε την απεικόνιση

$$f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}: (x, y, z) \mapsto x^2 + y^2 + z^2.$$

Είναι $S^2 = f^{-1}(1)$. Εστω $p_o = (x_o, y_o, z_o) \in f^{-1}(1)$. Τότε

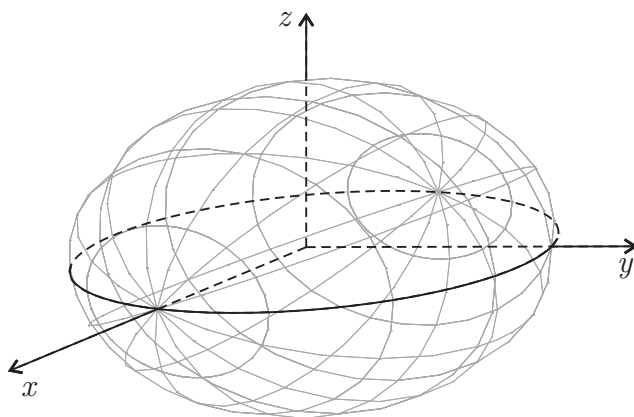
$$J_{p_o} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{p_o}, \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{p_o}, \frac{\partial f}{\partial z} \Big|_{p_o} \right) = 2(x_o, y_o, z_o) \neq (0, 0, 0),$$

δηλαδή ισχύουν οι υποθέσεις του Θεωρήματος 2.2.1, άρα η S^2 είναι κανονική επιφάνεια.

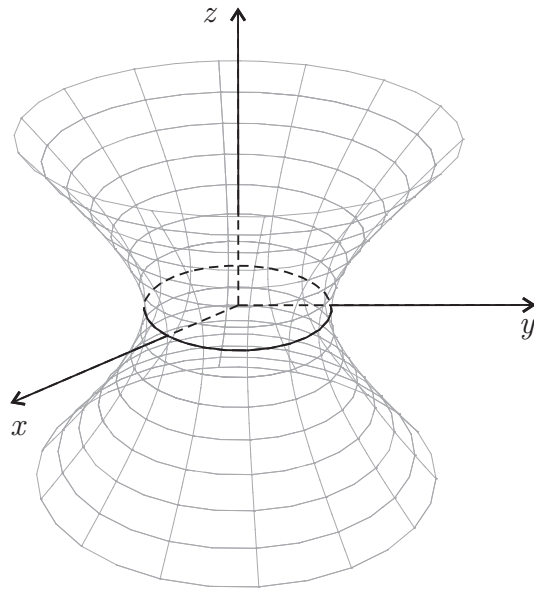
(ii) Με την ίδια μέθοδο, αποδεικνύουμε ότι και οι επόμενες εξισώσεις ορίζουν κανονικές επιφάνειες [για $abc \neq 0$]:

- (α) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ (ελλειψοειδές)
- (β) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ (μονόχωνο υπερβολοειδές)
- (γ) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ (δίχωνο υπερβολοειδές)
- (δ) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - z = 0$ (ελλειπτικό παραβολοειδές)
- (ε) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - z = 0$ (υπερβολικό παραβολοειδές)
- (στ) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0, (x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ (τετραγωνικός κώνος)

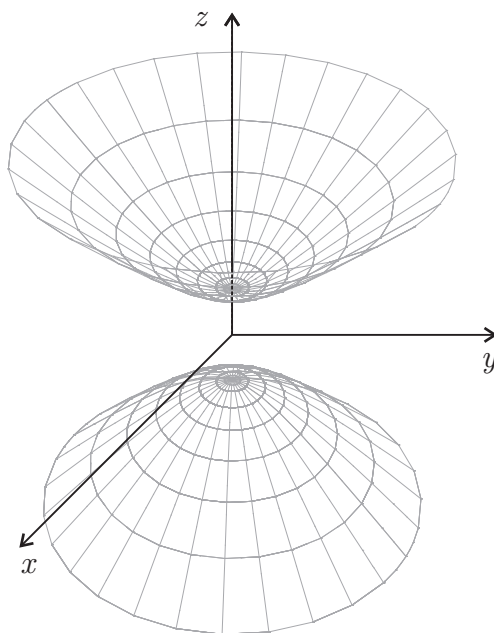
Οι παραπάνω επιφάνειες απεικονίζονται στα Σχήματα 2.5(α)-2.5(στ) στη συνέχεια. Οι αντίστοιχες ονομασίες τους στην αγγλική ορολογία είναι: ellipsoid, hyperboloid (of one sheet), hyperboloid (of two sheets), elliptic paraboloid, hyperbolic paraboloid, quadratic cone.



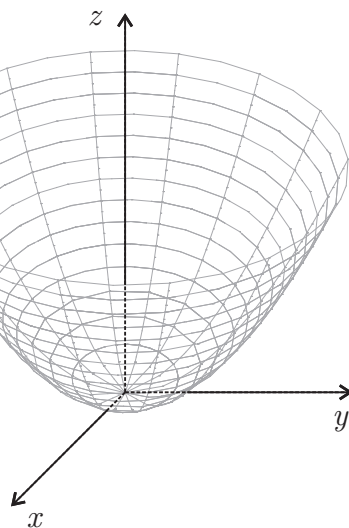
Σχήμα 2.5(α)



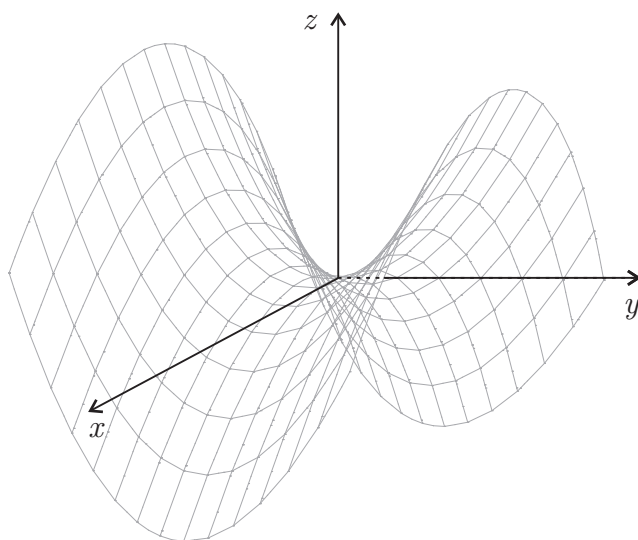
Σχήμα 2.5(β)



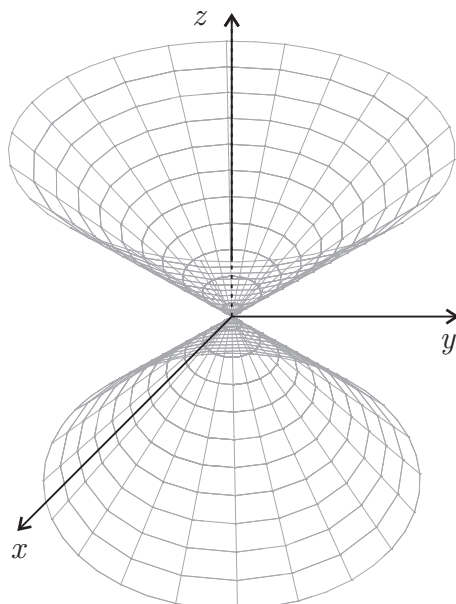
Σχήμα 2.5(γ)



Σχήμα 2.5(δ)



Σχήμα 2.5(ε)



Σχήμα 2.5(στ)

2.3 Βασικές ιδιότητες

Θα αποδείξουμε την τοπική ύπαρξη παραμετρήσεων (τύπου) Monge σε μια κανονική επιφάνεια. Ακριβέστερα έχουμε την

2.3.1 Πρόταση. Έστω S κανονική επιφάνεια. Τότε για τυχόν $p_o \in S$ υπάρχει ανοιχτή περιοχή W_o του p_o στην S , έτσι ώστε το W_o να είναι το γράφημα κατάλληλης διαφορίσιμης συνάρτησης $f: V_o \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Επομένως, για κάθε σημείο μιας κανονικής επιφάνειας, υπάρχει παραμέτρηση (τύπου) Monge που περιέχει το σημείο.

Απόδειξη. Επειδή η S είναι κανονική επιφάνεια, υπάρχει παραμέτρηση $(U, r, r(U))$ με $p_o \in r(U)$ και $r(U) \subseteq S$ ανοιχτό. Για την παραμέτρηση αυτή, σύμφωνα με τις Παρατηρήσεις 2.1.2, τουλάχιστον μία από τις οριζουσες

$$\left. \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right|_q, \quad \left. \frac{\partial(x, z)}{\partial(u, v)} \right|_q, \quad \left. \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} \right|_q$$

είναι μη μηδενική, για κάθε $q \in U$. Θέτουμε $p_o = (x_o, y_o, z_o)$, $q_o := r^{-1}(p_o)$ και υποθέτουμε ότι, χωρίς βλαβη της γενικότητας,

$$\left. \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right|_{q_o} \neq 0.$$

Θεωρούμε τώρα την απεικόνιση (προβολή στον 1ο και 2ο παράγοντα)

$$\pi: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2: (a, b, c) \mapsto (a, b)$$

και την σύνθεση $\pi \circ r$, που έχει την μορφή

$$\pi \circ r: U \longrightarrow \mathbb{R}^2: (u, v) \mapsto (x(u, v), y(u, v)).$$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 \supseteq U & \xrightarrow{r} & S \subseteq \mathbb{R}^3 \\ & \searrow \pi \circ r & \downarrow \pi \\ & & \mathbb{R}^2 \end{array}$$

Διάγραμμα 2.1

Ο πίνακας Jacobi της $\pi \circ r$ στο q_o έχει οριζούσα

$$\det(J_{q_o}(\pi \circ r)) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} \Big|_{q_o} & \frac{\partial x}{\partial v} \Big|_{q_o} \\ \frac{\partial y}{\partial u} \Big|_{q_o} & \frac{\partial y}{\partial v} \Big|_{q_o} \end{vmatrix} = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \Big|_{q_o} \neq 0,$$

(που σημαίνει ότι, ισοδύναμα, το διαφορικό $D(\pi \circ r)(q_o)$ είναι γραμμικός ισομορφισμός). Επομένως, από το Θεώρημα της Αντίστροφης Απεικόνισης, η $\pi \circ r$ είναι τοπική αμφιδιαφόριση στο q_o , δηλαδή υπάρχουν ανοιχτές περιοχές $U_o \subseteq U$ του q_o και $V_o \subseteq (\pi \circ r)(U) \subseteq \mathbb{R}^2$ του $(\pi \circ r)(q_o) = (x_o, y_o)$, έτσι ώστε η

$$\pi \circ r|_{U_o}: U_o \longrightarrow V_o$$

να είναι αμφιδιαφόριση. Θέτουμε $W_o := r(U_o)$. Το W_o είναι ανοιχτό υποσύνολο του S , αφού η r είναι ομοιομορφισμός και U_o ανοιχτό.

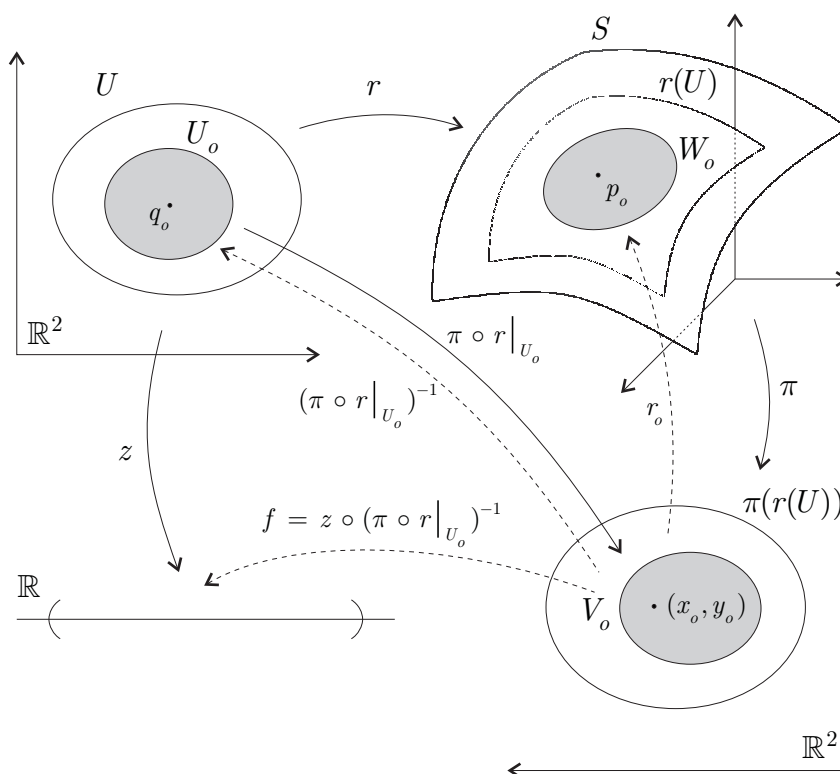
Θα δείξουμε ότι $W_o = \Gamma_f$, για κατάλληλη f . Για τον σκοπό αυτό θεωρούμε την απεικόνιση (βλ. και Σχήμα 2.6)

$$f := z \circ (\pi \circ r|_{U_o})^{-1}: V_o \longrightarrow \mathbb{R}$$

(θυμίζουμε ότι $z = pr_3 \circ r$). Ισχυριζόμαστε ότι $W_o = \Gamma_f$. Πράγματι,

$$p \in W_o = r(U_o) \Leftrightarrow p = r(u, v), \text{ για κάποιο } (u, v) \in U_o.$$

Επειδή σε κάθε $(u, v) \in U_o$ αντιστοιχεί ακριβώς ένα $(a, b) \in V_o$ τέτοιο ώστε $(a, b) = (\pi \circ r|_{U_o})(u, v) = (\pi \circ r)(u, v)$, έχουμε ότι



Σχήμα 2.6

$$\begin{aligned} W_o \ni p &= r(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \\ &= ((\pi \circ r)(u, v), z(u, v)) = (a, b, z \circ (\pi \circ r|_{U_o})^{-1}(a, b)) \\ &= (a, b, f(a, b)) \in \Gamma_f. \end{aligned}$$

Επομένως (βλ. Παράδειγμα 4 της Παραγράφου 2.2), η τριάδα (V_o, r_o, W_o) , όπου $r_o(a, b) = (a, b, f(a, b))$, $\forall (a, b) \in V_o$, ορίζει μία παραμέτρηση Monge με $p_o \in W_o$. Σημειώνουμε ότι η αντίστροφη της r_o είναι η $r_o^{-1} = \pi|_{W_o}$. \square

2.3.2 Πρόταση. Έστω S κανονική επιφάνεια. Υποθέτουμε ότι $U \subseteq \mathbb{R}^2$ ανοιχτό και $r: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ είναι μία 1-1 διαφορίσιμη απεικόνιση, τέτοια ώστε $r(U) \subseteq S$ ανοιχτό και $Dr(q)$ 1-1, για κάθε $q \in U$. Τότε η $r^{-1}: r(U) \rightarrow U$ είναι επίσης συνεχής, άρα η r είναι ομοιομορφισμός και η τριάδα $(U, r, r(U))$ αποτελεί ένα σύστημα συντεταγμένων της S .

Απόδειξη. Έστω τυχόν $q_o \in U$ και $p_o = r(q_o) \in r(U)$. Υποθέτουμε ότι, χωρίς βλάβη της γενικότητας, $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \Big|_{q_o} \neq 0$. Ακολουθώντας τα βήματα της προηγούμενης απόδειξης, κατασκευάζουμε την απεικόνιση $\pi \circ r|_{U_o}: U_o \rightarrow V_o$.

η οποία, ως αμφιδιαφόριση, είναι ομοιομορφισμός. Θυμίζουμε ότι $q_o \in U_o$, $U_o \subseteq U$ ανοιχτό και $W_o = r(U_o)$, ενώ από την κατασκευή της παραμέτρησης Monge (V_o, r_o, W_o) έχουμε ότι $\pi|_{W_o} = r_o^{-1}$ (όπου, φυσικά, η r_o είναι ομοιομορφισμός). Επειδή

$$r|_{U_o} = (r_o \circ \pi|_{W_o}) \circ r|_{U_o} = r_o \circ (\pi \circ r|_{U_o}),$$

συνάγεται ότι η $r|_{U_o}$ είναι ομοιομορφισμός ως σύνθεση ομοιομορφισμών. Επομένως δείξαμε ότι η r είναι ομοιομορφισμός σε μια περιοχή του q_o , δηλαδή τοπικός ομοιομορφισμός στο q_o . Παρόμοια, δείχνουμε ότι η r είναι τοπικός ομοιομορφισμός παντού, άρα και ομοιομορφισμός, οπότε έχουμε το συμπέρασμα. \square

Σύμφωνα με την προηγούμενη πρόταση,

αν είναι γνωστόν ότι S είναι κανονική επιφάνεια, για να διαπιστωθεί ότι το (U, r, W) είναι σύστημα συντεταγμένων της S , δεν χρειάζεται να ελεγχθεί αν η r είναι ομοιομορφισμός· αρκεί μόνον ο έλεγχος της συνεχείας της.

2.3.3 Θεώρημα. Έστω S μια κανονική επιφάνεια και $(U_i, r_i, r_i(U_i))$, $i = 1, 2$, δύο συστήματα συντεταγμένων της S . Αν $W := r_1(U_1) \cap r_2(U_2) \neq \emptyset$, τότε η **απεικόνιση αλλαγής συντεταγμένων** (change of coordinates) ή **απεικόνιση μεταφοράς (χαρτών)** (transition map)

$$U_1 \supseteq r_1^{-1}(W) \xrightarrow{h := r_2^{-1} \circ r_1} r_2^{-1}(W) \subseteq U_2$$

είναι αμφιδιαφόριση (βλ. και Σχήμα 2.7).

Απόδειξη. Θεωρούμε τυχόν $q_1 \in r_1^{-1}(W)$ και θέτουμε $q_2 := h(q_1) \in r_2^{-1}(W)$. Θα δείξουμε ότι η h είναι διαφορίσιμη στο q_1 .

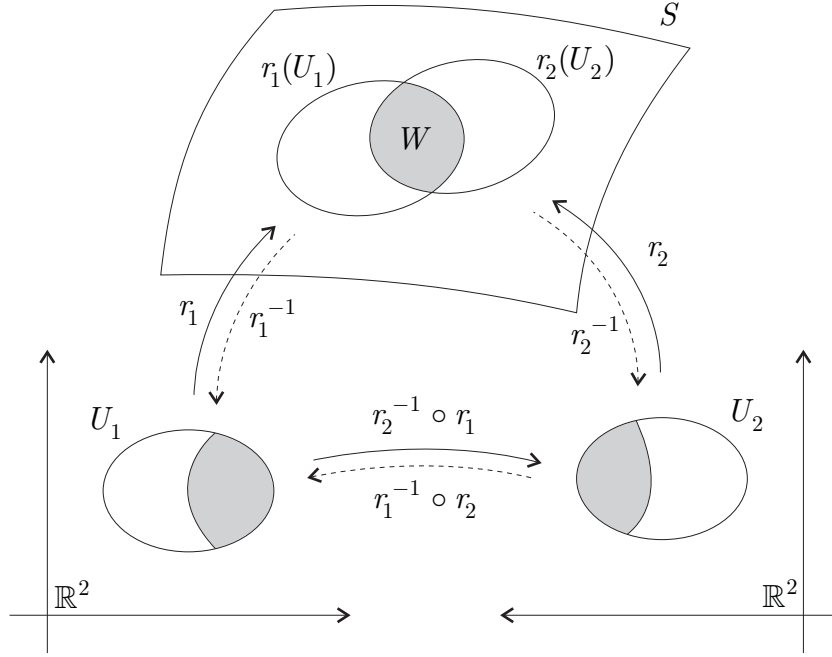
Επειδή $(U_2, r_2, r_2(U_2))$ είναι σύστημα συντεταγμένων, μπορούμε να υποθέσουμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι $\frac{\partial(x_2, y_2)}{\partial(u, v)} \Big|_{q_2} \neq 0$. Θεωρούμε την παραμέτρηση Monge (V_o, r_o, W_o) που κατασκευάζεται στην Απόδειξη της Πρότασης 2.3.1 με $r_1(q_1) \in W_o$. Τότε $W_o = \Gamma_f$, για μια διαφορίσιμη $f: V_o \rightarrow R$ και

$$r_o^{-1} = \pi|_{W_o}: W_o \longrightarrow V_o: (x, y, z) \longmapsto (x, y).$$

Επίσης, για κάποιο ανοιχτό $U_o \subseteq U_2$ με $q_2 \in U_o$ η απεικόνιση

$$\pi \circ r_2|_{U_o}: U_o \longrightarrow V_o$$

είναι αμφιδιαφόριση.



Σχήμα 2.7

Τώρα περιορίζοντας την απεικόνιση $r_2^{-1} \circ r_1$ στο σύνολο $r_1^{-1}(W \cap W_o)$, έχουμε

$$\begin{aligned} (r_2^{-1} \circ r_1)|_{r_1^{-1}(W \cap W_o)} &= r_2^{-1} \circ r_o \circ r_o^{-1} \circ r_1|_{r_1^{-1}(W \cap W_o)} \\ &= r_2^{-1} \circ (\pi|_{\Gamma_f})^{-1} \circ \pi|_{\Gamma_f} \circ r_1|_{r_1^{-1}(W \cap W_o)} \\ &= (\pi \circ r_2|_{U_o})^{-1} \circ \pi \circ r_1|_{r_1^{-1}(W \cap W_o)} \end{aligned}$$

που είναι σύνθεση διαφορίσιμων. \square

Το επόμενο αποτέλεσμα είναι προφανές.

2.3.4 Λήμμα. Έστω $(U, r, r(U))$ ένας 2-διάστατος χάρτης και $A \subseteq U$ ανοιχτό. Τότε η τριάδα $(A, r|_A, r(A))$ είναι 2-διάστατος χάρτης. \square

2.3.5 Πρόταση. Κάθε ανοιχτό υποσύνολο μιας κανονικής επιφάνειας είναι επίσης κανονική επιφάνεια.

Απόδειξη. Έστω A ανοιχτό υποσύνολο της κανονικής επιφάνειας S και $p \in A$ τυχόν σημείο. Υπάρχει μια παραμέτρηση $(U, r, W = r(U))$ της S με $p \in W$. Τότε, βάσει του προηγούμενου λήμματος, η τριάδα $(\bar{U}, \bar{r}, \bar{W})$, με

$$\bar{W} := W \cap A, \quad \bar{U} := r^{-1}(\bar{W}), \quad \bar{r} := r|_{\bar{U}},$$

είναι παραμέτρηση του A στο p . Ανάλογα και για κάθε άλλο σημείο. Επειδή οι παραμετρήσεις αυτής της μορφής καλύπτουν το A και οι εικόνες τους είναι ανοιχτά υποσύνολα του A , καταλήγουμε στο συμπέρασμα. \square

2.4 Επιφάνειες εκ περιστροφής

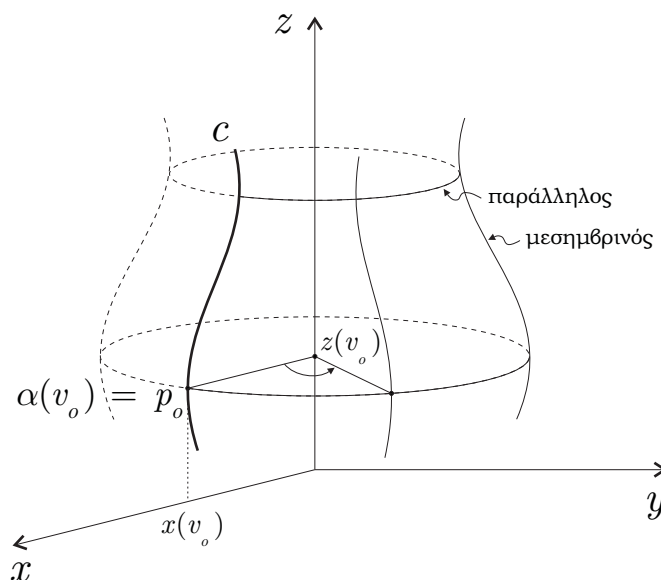
Δίνεται ένα επίπεδο $\Pi \subset \mathbb{R}^3$ και μία παραμετρημένη επίπεδη απλή καμπύλη $\alpha: I \rightarrow \Pi$ ($I \subseteq \mathbb{R}$ ανοιχτό), της οποίας η εικόνα $C = \alpha(I)$ περιέχεται στο επίπεδο Π . Υποθέτουμε ακόμη ότι δίνεται και μία ευθεία ε του Π , η οποία δεν τέμνει την C .

Αν περιστρέψουμε το Π περί την ε , τότε η καμπύλη C παράγει ένα υποσύνολο S του \mathbb{R}^3 που καλείται **επιφάνεια εκ περιστροφής** (surface of revolution). Η C καλείται **καμπύλη κατατομής** (profile curve) ή **γενέτειρα** (generating curve) και η ευθεία ε **άξονας περιστροφής** (axis) της S .

Τα σημεία της C , κατά την περιστροφή της, διαγράφουν κύκλους, τους οποίους καλούμε **παράλληλους** της S (parallels of S), ενώ η C και οι νέες θέσεις της (κατά την ίδια περιστροφή) αποτελούν τους **μεσημβρινούς** (meridians) της S .

Για ευκολία θα θεωρήσουμε ότι Π είναι το επίπεδο xOz και ε ο άξονας $z'Oz$. Επίσης, αφού η C δεν τέμνει τον $z'Oz$, υποθέτουμε ότι βρίσκεται όλη σε ένα από τα δύο ημιεπίπεδα, π.χ. σε αυτό με $x > 0$. Θέτουμε $\alpha(v) = (x(v), z(v))$, $v \in I$. Σχετικώς παραθέτουμε το παρακάτω Σχήμα 2.8.

Έστω $v_0 \in I$ και $p_0 = \alpha(v_0) = (x(v_0), z(v_0)) \equiv (x(v_0), 0, z(v_0))$. Όπως αναφέραμε παραπάνω, καθώς το επίπεδο xOz περιστρέφεται περί τον άξονα των z , το p_0 διαγράφει ένα κύκλο ακτίνας $x(v_0)$ που βρίσκεται σε ένα επίπεδο παράλληλο με το επίπεδο xOy , σε ύψος $z(v_0)$. Τα σημεία αυτού του κύκλου είναι οι τριάδες $(x(v_0) \cos u, x(v_0) \sin u, z(v_0))$, όπου $u \in [0, 2\pi]$.



Σχήμα 2.8

Άρα η επιφάνεια εκ περιστροφής S είναι το σημειοσύνολο

$$S = \{(x(v) \cos u, x(v) \sin u, z(v)) : (u, v) \in [0, 2\pi) \times I\}.$$

Θα κατασκευάσουμε κατάλληλες παραμετρήσεις από τέτοιες τριάδες. Πριν απ' αυτό χρειαζόμαστε το εξής βοηθητικό συμπέρασμα [που ισχύει για κάθε κανονική (απλή) καμπύλη αλλά, για την οικονομία της έκθεσης, θα περιοριστούμε στην δοσμένη α]:

Για κάθε v_o υπάρχει ανοιχτό $I_o \subseteq I$, έτσι ώστε $v_o \in I_o$ και η $\alpha(I_o)$ να είναι γράφημα κατάλληλης συνάρτησης $g: I_o \rightarrow \mathbb{R}$, δηλαδή $\alpha(I_o) = \Gamma_g$.

Πράγματι, εφ' όσον η α είναι κανονική, $\alpha'(v_o) = (x'(v_o), z'(v_o)) \neq 0$, οπότε τουλάχιστον μία από τις δύο συντεταγμένες δεν μηδενίζεται. Ας υποθέσουμε ότι $x'(v_o) \neq 0$. Τότε, κατά το Θεώρημα της Αντίστροφης Συνάρτησης, υπάρχει ανοιχτό $I_o \subseteq I$ και ανοιχτό $J_o \subseteq \mathbb{R}$, έτσι ώστε $v_o \in I_o$ και η $x|_{I_o}: I_o \rightarrow J_o$ να είναι αμφιδιαφόριση. Ορίζουμε την απεικόνιση

$$g := z \circ (x|_{I_o})^{-1}: J_o \rightarrow \mathbb{R}.$$

Αν τώρα $p = (x(v), z(v))$ είναι τυχόν σημείο της $\alpha(I_o)$, οπότε $v \in I_o$, θα υπάρχει μοναδικό $t \in J_o$ με $x(v) = t$. Επομένως,

$$\alpha(I_o) \ni p = (x(v), z(v)) = (t, (z \circ x|_{I_o})(t) = (t, gt)) \in \Gamma_g$$

με την οποίαν αποδεικνύεται ο ισχυρισμός μας.

Σύμφωνα με το προηγούμενο συμπέρασμα, τοπικά θα είναι

$$z(v) = g(t) = g(x(v)), \quad \text{δηλ.} \quad z = g(x).$$

Τότε όμως

$$z = g(x) \Leftrightarrow f(x, z) = c \text{ (σταθερά) με } Df(x, z) \neq 0.$$

Πράγματι, αν $z = g(x)$ και θέσουμε $f(x, z) := g(x) - z$, θα έχουμε ότι $f(x, z) = 0$ και $Df(x, z) \equiv J_{(x,z)}f = (g'(x), 1) \neq 0$ (βλ. και τη σχετική συζήτηση πριν την απόδειξη του Θεωρήματος 2.2.1). Και αντιστρόφως: Αν υποθέσουμε ότι $f(x, z) = c$ με $Df(x, z) \neq 0$, τότε $(f_x, f_z) \neq 0$. Αν, για παράδειγμα, $f_z \neq 0$, τότε, κατά το Θεώρημα της Πεπλεγμένης Συνάρτησης, $z = g(x)$ κατά τρόπο μοναδικό.

Για διευκόλυνση, στη συνέχεια θα υποθέσουμε (όπως συμβαίνει στα περισσότερα παραδείγματα) ότι η καμπύλη C δίνεται από την ισότητα $f(x, z) = c$, με $Df(x, z) \neq 0$, για κάθε $(x, z) \in C$. Αυτό δεν αποτελεί ιδιαίτερο περιορισμό της γενικότητας γιατί, όπως θα δούμε στη συνέχεια, οι παραμετρήσεις κατασκευάζονται με τον ίδιο τρόπο, απλώς αντί το v να μεταβάλλεται στο I , θα

μεταβάλλεται σε μικρότερα διαστήματα, όπως το I_0 , και οι παραμετρήσεις θα καλύπτουν μικρότερα τμήματα της επιφάνειας. Έτσι,

$$\begin{aligned}(x, y, z) \in S &\Leftrightarrow x^2 + y^2 = x(v)^2 \text{ και } z = z(v), \forall v \in I \\ &\Leftrightarrow f(\sqrt{x^2 + y^2}, z) = c.\end{aligned}$$

Θεωρούμε την διαφορίσιμη απεικόνιση

$$h: \mathbb{R}_* \times \mathbb{R}_* \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: (x, y, z) \mapsto f(\sqrt{x^2 + y^2}, z).$$

Είναι προφανές ότι

$$S = g^{-1}(c).$$

Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 2.2.1, θα δείξουμε ότι η S είναι κανονική επιφάνεια: Για κάθε $p = (x, y, z) \in h^{-1}(c)$, το διαφορικό $Dh(p)$ είναι επί (ισοδύναμα $Dh(p) \neq 0$), αφού $Df(x, z) \neq 0$.

Πράγματι, μπορούμε να γράψουμε ότι $h = f \circ \phi$, όπου $\phi(x, y, z) = (\sqrt{x^2 + y^2}, z)$. Επομένως, θέτοντας $(a, b) = \phi(p)$, έχουμε για τους αντίστοιχους πίνακες Jacobi,

$$\begin{aligned}Dh(p) &\equiv J_p h = (J_{(a,b)} f) \cdot (J_p \phi) \\ &= (g'(a), 1) \cdot \begin{pmatrix} x(x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}} & y(x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \left(g'(a)x(x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}}, g'(a)y(x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}}, 1 \right) \neq 0.\end{aligned}$$

Αφού εξασφαλίσαμε ότι η S είναι κανονική επιφάνεια, ας κατασκευάσουμε μερικές εύχρηστες παραμετρήσεις. Για το σκοπό αυτό θεωρούμε την τριάδα (U, r, W) , όπου $U = (0, 2\pi) \times I$, r είναι η απεικόνιση

$$r: U \rightarrow \mathbb{R}^3: (u, v) \mapsto (x(v) \cos u, x(v) \sin u, z(v))$$

και $W = r(U)$. Προφανώς το U είναι ανοιχτό υποσύνολο του \mathbb{R}^2 και η r είναι διαφορίσιμη (άρα και συνεχής).

Η r είναι και 1-1: αν $r(u_1, v_1) = r(u_2, v_2)$, τότε προκύπτει αμέσως ότι $z(v_1) = z(v_2)$ και $x(v_1)^2 = x(v_2)^2$. Λόγω της υπόθεσης ότι $x > 0$, είναι $x(v_1) = x(v_2)$, άρα

$$\alpha(v_1) = (x(v_1), z(v_1)) = (x(v_2), z(v_2)) = \alpha(v_2).$$

Επειδή η C είναι απλή, δηλαδή η α είναι 1-1, παίρνουμε $v_1 = v_2 = v$, οπότε, από την ισότητα $r(u_1, v) = r(u_2, v)$, προκύπτει ότι τα τόξα $u_1, u_2 \in (0, 2\pi)$ έχουν ίσα \sin και \cos , άρα $u_1 = u_2$.

Επίσης το $Dr(q)$ είναι 1-1, για κάθε $q = (u, v) \in U$. Πράγματι,

$$\begin{aligned} r_u(q) &= (-x(v) \sin u, x(v) \cos u, 0), \\ r_v(q) &= (x'(v) \cos u, x'(v) \sin u, z'(v)), \end{aligned}$$

άρα

$$\begin{aligned} r_u(q) \times r_v(q) &= \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -x(v) \sin u & x(v) \cos u & 0 \\ x'(v) \cos u & x'(v) \sin u & z'(v) \end{pmatrix} \\ &= (x(v)z'(v) \cos u, x(v)z'(v) \sin u, -x(v)x'(v)) \\ &= x(v)(z'(v) \cos u, z'(v) \sin u, -x'(v)), \end{aligned}$$

απ' όπου προκύπτει ότι

$$\|r_u(q) \times r_v(q)\| = x(v) \cdot (x'(v)^2 + z'(v)^2)^{1/2}.$$

Επειδή από την υπόθεση $x(v) > 0$, η ισότητα $\|r_u(q) \times r_v(q)\| = 0$ δίνει $\|\alpha'(v)\| = (x'(v)^2 + z'(v)^2)^{1/2} = 0$, για κάθε v , πράγμα που είναι άτοπο, γιατί τότε η α θα ήταν σταθερή και η εικόνα C ένα σημείο. Άρα $\|r_u(q) \times r_v(q)\| \neq 0$ και $Dr(q)$ 1-1.

Παρατηρούμε ακόμη ότι η εικόνα $W = r(U)$ είναι ανοιχτό υποσύνολο του S , αφού το W καλύπτει όλο το S πλὴν των σημείων της αρχικής καμπύλης. Άρα η τριάδα (U, r, W) ικανοποιεί τις υποθέσεις της Πρότασης 2.3.2, οπότε είναι παραμέτρηση της S . Σημειώνουμε ότι για u σταθερά, οι αντίστοιχες παραμετρικές καμπύλες αποτελούν τους μεσημβρινούς, ενώ για v σταθερά παίρνουμε τους παράλληλους (κύκλους).

Με αλλαγή του διαστήματος που περιέχει το τόξο u , π.χ. παίρνοντας $\bar{U} = (-\pi, \pi) \times I$ και $\bar{r}(u, v) = (x(v) \cos u, x(v) \sin u, z(v))$, κατασκευάζουμε μια δεύτερη παραμέτρηση της S , έτσι ώστε οι δύο παραμετρήσεις να καλύπτουν όλη την S .

Κλείνοντας θα πρέπει να παρατηρήσουμε ότι υπάρχουν επιφάνειες, οι οποίες προκύπτουν από την περιστροφή κλειστής καμπύλης (όπως η σπείρα στο επόμενο παράδειγμα), ή από καμπύλες που έχουν κοινά σημεία με τον άξονα των z (όπως η σφαίρα, η οποία προκύπτει από περιστροφή ενός ημικυκλίου με διάμετρο τον ίδιο τον άξονα περιστροφής), καθώς επίσης και από καμπύλες συμμετρικές ως προς τον άξονα. Τέτοιες επιφάνειες, επειδή δεν εμπίπτουν στον αρχικό ορισμό της επιφάνειας εκ περιστροφής, καλούνται *γενικευμένες επιφάνειες εκ περιστροφής*. Η μελέτη αυτών των επιφανειών γίνεται με παρόμοιες μεθόδους, αν και υπάρχουν συχνά κάποια λεπτά προβλήματα. Δεν θα προχωρήσουμε περισσότερο στην κατεύθυνση αυτή και θα περιοριστούμε σε μερικά παραδείγματα, εδώ και στις ασκήσεις.

Παράδειγμα: Η σπείρα-τόρος* (σαμπρέλα - torus) T .

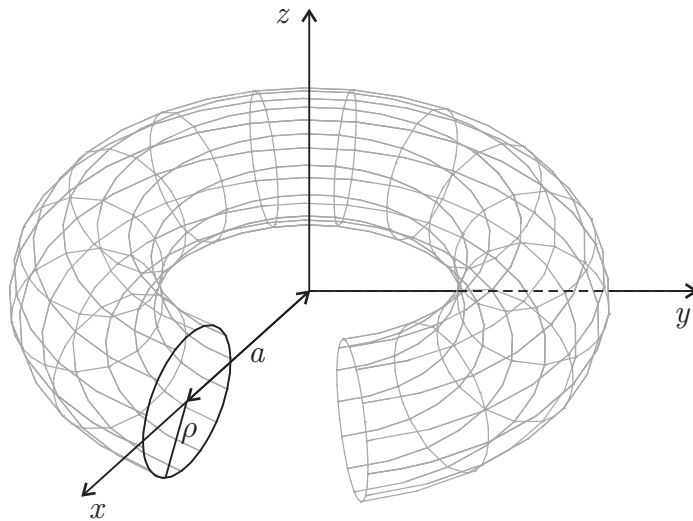
Είναι η επιφάνεια εκ περιστροφής που προκύπτει εάν περιστρέψουμε περί τον άξονα των z έναν κύκλο (που βρίσκεται στο επίπεδο xOz) με κέντρο $(a, 0, 0)$ και ακτίνα ρ , με $0 < \rho < a$.

Η καμπύλη που περιγράφει τον κύκλο είναι η

$$\alpha(v) = (x(v), z(v)) = (a + \rho \cos v, \rho \sin v) \equiv (a + \rho \cos v, 0, \rho \sin v).$$

Άρα η σπείρα είναι το σημειοσύνολο

$$T = \{((a + \rho \cos v) \cos u, (a + \rho \cos v) \sin u, \rho \sin v) \mid (u, v) \in [0, 2\pi) \times [0, 2\pi)\}.$$



Σχήμα 2.9

Μια παραμέτρηση δίνεται από την απεικόνιση

$$r(u, v) = ((a + \rho \cos v) \cos u, (a + \rho \cos v) \sin u, \rho \sin v), \\ (u, v) \in (0, 2\pi) \times (0, 2\pi),$$

η οποία βέβαια δεν καλύπτει όλο το T , αλλά αφήνει έξω ένα "κατακόρυφο" κύκλο (μεσημβρινό) και ένα "οριζόντιο" (παράλληλο). Για να καλυφθεί το T πλήρως, αρκεί να πάρουμε παρόμοιες παραμετρήσεις αλλάζοντας τα άκρα των διαστημάτων, για παράδειγμα, σε $(-\pi, \pi) \times (-\pi, \pi)$.

*Τόρος = αντικείμενο με οπή, εκ του αρχαιοελληνικού ρήματος τωρέω - τωρεύω, που σημαίνει διαπερνώ, διατρύπώ.

2.5 Η έννοια της διαφορισιμότητας σε επιφάνειες

Ο ορισμός της διαφορισιμότητας απεικονίσεων μεταξύ ευκλειδείων χώρων επιβάλλει το πεδίο ορισμού της απεικόνισης να είναι ανοιχτό. Οι χώροι που μας ενδιαφέρουν εδώ, δηλαδή οι εικόνες 2-διάστατων χαρτών (παραμετρήσεων), ποτέ δεν είναι ανοιχτοί στο \mathbb{R}^3 . Η ύπαρξη όμως των χαρτών μας επιτρέπει να επεκτείνουμε την έννοια της διαφορισιμότητας σε απεικονίσεις που ορίζονται σε κανονικές επιφάνειες.

2.5.1 Ορισμός. Έστω S κανονική επιφάνεια και μία απεικόνιση $f: S \rightarrow \mathbb{R}^m$. Η f καλείται **διαφορίσιμη στο** $p \in S$ (differentiable at p), αν υπάρχει παραμέτρηση (U, r, W) της S , τέτοια ώστε $p \in W$ και η σύνθεση

$$(2.5.1) \quad F := f \circ r: U \rightarrow \mathbb{R}^m$$

$$\begin{array}{ccc} S \supseteq W & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^m \\ \uparrow r & \nearrow F & \\ \mathbb{R}^2 \supseteq U & & \end{array}$$

Διάγραμμα 2.2

να είναι διαφορίσιμη στο $r^{-1}(p)$. Η f θα λέγεται **διαφορίσιμη** (differentiable), αν είναι διαφορίσιμη σε κάθε $p \in S$.

2.5.2 Πρόταση. Η διαφορισιμότητα της $f: S \rightarrow \mathbb{R}^m$ στο $p \in S$ είναι ανεξάρτητη του θεωρούμενου χάρτη.

Απόδειξη. Έστω ότι (U, r, W) παραμέτρηση της S , τέτοια ώστε $p \in W$ και η $F = f \circ r: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ να είναι διαφορίσιμη στο $r^{-1}(p)$. Αν $(\bar{U}, \bar{r}, \bar{W})$ είναι οποιαδήποτε άλλη παραμέτρηση της S με $p \in \bar{W}$, θα δείξουμε ότι και η $\bar{F} := f \circ \bar{r}$ είναι διαφορίσιμη στο $\bar{r}^{-1}(p)$. Πράγματι, παρατηρούμε ότι το σύνολο $W_o := W \cap \bar{W}$ είναι ανοιχτό στο S ως τομή ανοιχτών (άρα και στο \bar{W}), επομένως το

$$U_o := \bar{r}^{-1}(W_o) \subseteq \bar{U}$$

είναι ανοιχτό ως αντίστροφη εικόνα ανοιχτού συνόλου μέσω συνεχούς απεικόνισης. Αν περιορίσουμε την \bar{F} στο U_o έχουμε ότι

$$\bar{F}|_{U_o} = f \circ \bar{r}|_{U_o} = (f \circ r) \circ (r^{-1} \circ \bar{r}).$$

Η προηγούμενη απεικόνιση είναι διαφορίσιμη στο $\bar{r}^{-1}(p)$, αφού είναι σύνθεση της αμφιδιαφόρισης $r^{-1} \circ \bar{r}$ (: απεικόνιση αλλαγής συντεταγμένων) και της διαφορίσιμης στο $r^{-1}(p)$ απεικόνισης $F = f \circ r$ (από την υπόθεση). \square

Από το προηγούμενο συμπέρασμα προκύπτει ότι, για τον έλεγχο της διαφορισιμότητας, αρκεί να επιλέξουμε τα πιό εύχρηστα συστήματα συντεταγμένων, από αυτά που διαθέτει μία επιφάνεια.

2.5.3 Πρόταση. *Αν η $f: S \rightarrow \mathbb{R}^m$ είναι διαφορίσιμη στο $p \in S$, τότε είναι συνεχής στο p .*

Απόδειξη. Από την $F = f \circ r$ προκύπτει ότι $f|_W = F \circ r^{-1}$. Εφ' όσον η r είναι ομοιομορφισμός και η F συνεχής στο $r^{-1}(p)$ (ως διαφορίσιμη με την συνήθη έννοια μεταξύ ευκλειδείων χώρων), θα είναι και η $f|_W$ συνεχής στο p , οπότε έχουμε το συμπέρασμα. \square

Ήδη, από τον ορισμό μιας παραμέτρησης, έχουμε ότι η απεικόνιση r είναι διαφορίσιμη. Μετά την επέκταση της έννοιας της διαφορισιμότητας και σε επιφάνειες, αποδεικνύεται και η διαφορισιμότητα της r^{-1} , δηλαδή έχουμε την

2.5.4 Πρόταση. *Για κάθε παραμέτρηση (U, r, W) , η $r^{-1}: W \rightarrow U \subseteq \mathbb{R}^2$ είναι διαφορίσιμη απεικόνιση.*

Απόδειξη. Το W είναι κανονική επιφάνεια με ολική παραμέτρηση την (U, r, W) . Επομένως, μέσω της τελευταίας, ο ορισμός της διαφορισιμότητας συνεπάγεται ότι

$$r^{-1} \circ r = id_U: U \rightarrow U,$$

που είναι διαφορίσιμη σε όλο το πεδίο ορισμού της. \square

Η επόμενη πρόταση μας δίνει έναν εύκολο τρόπο για να ελέγξουμε, σε μερικές περιπτώσεις, αν μία απεικόνιση ορισμένη σε επιφάνεια είναι διαφορίσιμη.

2.5.5 Πρόταση. *Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^3$ ανοιχτό, $F: A \rightarrow \mathbb{R}^m$ διαφορίσιμη απεικόνιση και S κανονική επιφάνεια με $S \subseteq A$. Τότε και ο περιορισμός $f := F|_S: S \rightarrow \mathbb{R}^m$ είναι διαφορίσιμη απεικόνιση.*

Απόδειξη. Έστω τυχόν $p \in S$. Για οποιαδήποτε παραμέτρηση (U, r, W) της S με $p \in W$, είναι $f \circ r = F \circ r: U \rightarrow \mathbb{R}^m$. Επειδή η $F \circ r$ είναι διαφορίσιμη (ως σύνθεση διαφορίσιμων απεικονίσεων) θα είναι και η $f \circ r$ διαφορίσιμη σε ολόκληρο το U , άρα και στο $r^{-1}(p)$. Επομένως η f είναι διαφορίσιμη στο p , και ανάλογα σ' ολόκληρη την S . \square

Παραφράζοντας την προηγούμενη πρόταση παίρνουμε το

2.5.6 Πρόταση. *Μία απεικόνιση $f: S \rightarrow \mathbb{R}^m$ είναι διαφορίσιμη αν επεκτείνεται σε μία διαφορίσιμη απεικόνιση $F: A \rightarrow \mathbb{R}^m$, όπου $A \subseteq \mathbb{R}^3$ ανοιχτό με $S \subseteq A$.*

Ας υποθέσουμε ότι S_1, S_2 είναι κανονικές επιφάνειες και $f: S_1 \rightarrow S_2$. Θεωρώντας την f ως απεικόνιση με τιμές στον \mathbb{R}^3 , μπορούμε να εξετάσουμε αν είναι διαφορίσιμη ή όχι. Σε μια τέτοια περίπτωση είναι χρήσιμο να μπορούμε να εκφράσουμε την διαφορισιμότητα της f και με έναν άλλο (ισοδύναμο) τρόπο, ο οποίος να περιέχει και παραμετρήσεις της S_2 . Αυτό είναι απαραίτητο, για παράδειγμα, όταν θέλουμε να ελέγξουμε την διαφορισιμότητα της σύνθεσης διαφορισίμων απεικονίσεων μεταξύ επιφανειών, πράγμα που αποτελεί το πρώτο βήμα για την απόδειξη του κανόνα της αλυσίδας (βλ Θεώρημα 2.5.9 στη συνέχεια). Επίσης, αυτό θα χρησιμοποιηθεί στη μελέτη του διαφορικού, που θα γίνει σε επόμενη παράγραφο.

2.5.7 Θεώρημα. Δίνονται δύο κανονικές επιφάνειες S_1, S_2 , και μία απεικόνιση $f: S_1 \rightarrow S_2$. Η f είναι διαφορίσιμη στο $p \in S_1$ (κατά τον Ορισμό 2.5.1, ως απεικόνιση της μορφής $f: S \rightarrow \mathbb{R}^3$) εάν και μόνον εάν υπάρχουν παραμετρήσεις (U_i, r_i, W_i) ($i = 1, 2$) των S_i αντιστοίχως, τέτοιες ώστε: $p \in W_1$, $f(W_1) \subseteq W_2$ και η σύνθεση

$$(2.5.2) \quad F := r_2^{-1} \circ f \circ r_1: U_1 \longrightarrow U_2$$

να είναι διαφορίσιμη στο $r_1^{-1}(p)$.

Πριν την απόδειξη σημειώνουμε ότι η απεικόνιση F ονομάζεται **τοπική παράσταση** (local representation) της f μέσω των χαρτών (U_i, r_i, W_i) , $i = 1, 2$. Επιπλέον η (2.5.2) σημαίνει ότι το επόμενο διάγραμμα είναι μεταθετικό.

$$\begin{array}{ccc} W_1 & \xrightarrow{f} & W_2 \\ r_1 \uparrow & & \downarrow r_2^{-1} \\ \mathbb{R}^2 \supseteq U_1 & \xrightarrow{F} & U_2 \subseteq \mathbb{R}^2 \end{array}$$

Διάγραμμα 2.3

Απόδειξη. Υποθέτουμε πρώτα ότι η $f: S_1 \rightarrow S_2$ είναι διαφορίσιμη στο $p \in S_1$ ως απεικόνιση της μορφής $f: S \rightarrow \mathbb{R}^3$. Θεωρούμε μία παραμέτρηση Monge (U_2, r_2, W_2) της S_2 με $f(p) \in W_2$. Επειδή η $f: S_1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ είναι συνεχής στο p , θα είναι συνεχής (στο ίδιο σημείο) και η $f: S_1 \rightarrow S_2$ (θεωρώντας την S_2 εφοδιασμένη με την σχετική τοπολογία). Επομένως, για το ανοιχτό $W_2 \subseteq S_2$, υπάρχει ανοιχτή περιοχή A του p στην S_1 με $f(A) \subseteq W_2$. Επίσης υπάρχει παραμέτρηση (U, r, W) της S_1 με $p \in W$. Σύμφωνα με το Λήμμα 2.3.4, η τριάδα

$$(U_1 := r^{-1}(W \cap A), r_1 := r|_{U_1}, W_1 := W \cap A)$$

αποτελεί παραμέτρηση της S_1 στο p . Για τις παραμετρήσεις (U_i, r_i, W_i) ($i = 1, 2$) παρατηρούμε ότι $p \in W_1$ και $f(W_1) \subseteq W_2$, επομένως ορίζεται η αντίστοιχη τοπική παράσταση της f

$$F = r_2^{-1} \circ f \circ r_1: U_1 \longrightarrow U_2.$$

Επειδή (λόγω της παραμέτρησης Monge) $r_2^{-1} = \pi|_{W_2}$, όπου

$$\pi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2: (x, y, z) \longrightarrow (x, y),$$

η παραπάνω τοπική παράσταση παίρνει την μορφή

$$F = \pi|_{W_2} \circ f \circ r_1: U_1 \longrightarrow U_2.$$

Η τελευταία είναι διαφορίσιμη στο $r_1^{-1}(p)$, ως σύνθεση της διαφορίσιμης $\pi|_{W_2}$ (βλ. Πρόταση 2.5.5) με την διαφορίσιμη στο $r_1^{-1}(p)$ απεικόνιση $f \circ r_1$ (λόγω της διαφορισιμότητας της f στο p). Άρα καταλήγουμε στη διαφορισιμότητα της τοπικής παράστασης.

Αντιστρόφως, ας υποθέσουμε ότι η (2.5.2) είναι διαφορίσιμη στο $r_1^{-1}(p)$. Επειδή η r_2 είναι διαφορίσιμη (ως παραμέτρηση), τότε και η

$$r_2 \circ F = f \circ r_1: U_1 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

είναι διαφορίσιμη στο $r_1^{-1}(p)$, δηλ. η $f: S \rightarrow \mathbb{R}^3$ είναι διαφορίσιμη στο p . \square

2.5.8 Παρατηρήσεις. 1) Προφανώς, το Θεώρημα 2.5.7 εισάγει έναν ορισμό διαφορισιμότητας απεικονίσεων μεταξύ επιφανειών. Δηλαδή, μία $f: S_1 \rightarrow S_2$ είναι διαφορίσιμη στο $p \in S_1$ αν υπάρχουν παραμετρήσεις (U_i, r_i, W_i) ($i = 1, 2$) των S_i αντιστοίχως, τέτοιες ώστε: $p \in W_1$, $f(W_1) \subseteq W_2$ και η (2.5.2) να είναι διαφορίσιμη στο $r_1^{-1}(p)$.

2) Εργαζόμενοι όπως στην Πρόταση 2.5.2, αποδεικνύουμε ότι η διαφορισιμότητα της f με την προηγούμενη έννοια είναι ανεξάρτητη των παραμετρήσεων. Δηλαδή, αν $(\bar{U}_i, \bar{r}_i, \bar{W}_i)$ ($i = 1, 2$) είναι παραμετρήσεις των S_i , τέτοιες ώστε: $p \in \bar{W}_1$, $f(\bar{W}_1) \subseteq \bar{W}_2$, τότε και η τοπική παράσταση

$$(2.5.2') \quad \bar{F} := \bar{r}_2^{-1} \circ f \circ \bar{r}_1: \bar{U}_1 \longrightarrow \bar{U}_2$$

είναι διαφορίσιμη στο $\bar{r}_1^{-1}(p)$.

3) Μία απεικόνιση $f: S_1 \rightarrow S_2$ καλείται **αμφιδιαφόριση** (diffeomorphism) αν οι f και f^{-1} είναι διαφορίσιμες. Επομένως, για οποιοδήποτε σύστημα συντεταγμένων (U, r, W) , θεωρώντας το U επιφάνεια [βλ. Παράδειγμα 2.2(1)], η Πρόταση 2.5.4 συνεπάγεται ότι:

Η r είναι αμφιδιαφόριση. Κατά συνέπεια, κάθε κανονική επιφάνεια είναι τοπικά αμφιδιαφορική με το \mathbb{R}^2 .

Το επόμενο αποτέλεσμα αποτελεί το πρώτο βήμα του κανόνα της αλυσίδας στο πλαίσιο των επιφανειών. Θα συμπληρωθεί όταν οριστεί και η έννοια του διαφορικού.

2.5.9 Θεώρημα. Αν S_i , $i = 1, 2, 3$ είναι κανονικές επιφάνειες, $f: S_1 \rightarrow S_2$ διαφορίσιμη απεικόνιση στο $p \in S_1$ και $g: S_2 \rightarrow S_3$ διαφορίσιμη στο $f(p) \in S_2$, τότε και η σύνθεση $g \circ f: S_1 \rightarrow S_3$ είναι διαφορίσιμη απεικόνιση στο p .

Απόδειξη. Αφού η g είναι διαφορίσιμη στο $f(p)$, υπάρχουν χάρτες (U_i, r_i, W_i) των S_i , $i = 2, 3$, τέτοιοι ώστε $f(p) \in W_2$, $g(W_2) \subseteq W_3$ και η

$$G := r_3^{-1} \circ g \circ r_2: U_2 \longrightarrow U_3$$

να είναι διαφορίσιμη στο $r_2^{-1}(f(p))$. Επειδή η f είναι συνεχής στο p (ως διαφορίσιμη στο ίδιο σημείο), υπάρχει ανοιχτή περιοχή A του p στην S_1 , με $f(A) \subseteq W_2$. Επίσης υπάρχει παραμέτρηση (U, r, W) της S_1 με $p \in W$. Θεωρούμε το ανοιχτό σύνολο $W \cap A \subseteq S_1$, που περιέχει το p , και την παραμέτρηση

$$(U_1 := r^{-1}(W \cap A), r_1 := r|_{U_1}, W_1 := W \cap A)$$

της S_1 (βλ. Λήμμα 2.3.4). Για την παραμέτρηση αυτή ισχύει ότι $p \in W_1$ και $f(W_1) \subseteq W_2$, άρα ορίζεται η τοπική παράσταση της f

$$F := r_2^{-1} \circ f \circ r_1: U_1 \longrightarrow U_2,$$

η οποία είναι διαφορίσιμη στο $r_1^{-1}(p)$ [βλ. Θεώρημα 2.5.7 και Παρατήρηση 2.5.8(2)]. Παρατηρούμε ότι $p \in W_1$ και $(g \circ f)(W_1) \subseteq W_3$, δηλαδή οι παραμετρήσεις (U_1, r_1, W_1) και (U_3, r_3, W_3) δίνουν την τοπική παράσταση της σύνθεσης $g \circ f$

$$r_3^{-1} \circ (g \circ f) \circ r_1 = (r_3^{-1} \circ g \circ r_2) \circ (r_2^{-1} \circ f \circ r_1) = G \circ F.$$

Η παράσταση αυτή είναι διαφορίσιμη στο $r_1^{-1}(p)$, ως σύνθεση της διαφορίσιμης απεικόνισης F στο σημείο $r_1^{-1}(p)$, και της διαφορίσιμης απεικόνισης G στο $r_2^{-1}(f(p)) = F(r_1^{-1}(p))$. \square

2.5.10 Πρόταση. Έστω S μια κανονική επιφάνεια, I ανοιχτό διάστημα και $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ μία διαφορίσιμη καμπύλη με $\alpha(I) \subset S$. Έστω $t_o \in I$ και $p_o := \alpha(t_o) \in S$. Τότε, για κάθε παραμέτρηση (U, r, W) της S στο p_o , υπάρχει ανοιχτό διάστημα $J \subseteq I$ με $t_o \in J$, και διαφορίσιμη επίπεδη καμπύλη $\beta: J \rightarrow U \subseteq \mathbb{R}^2$, έτσι ώστε

$$\alpha|_J = r \circ \beta.$$

Η πρόταση περιγράφεται στο παρακάτω Σχήμα 2.10.

Απόδειξη. Ας πάρουμε πρώτα μια παραμέτρηση Monge της S στο p_o (σύμφωνα με την Πρόταση 2.3.1 υπάρχει πάντοτε τέτοια παραμέτρηση). Έστω ότι είναι η (U_o, r_o, W_o) με $r_o(u, v) = (u, v, g(u, v))$. Όπως έχουμε δει πολλές φορές, η απεικόνιση

$$\pi: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2: (x, y, z) \mapsto (x, y)$$

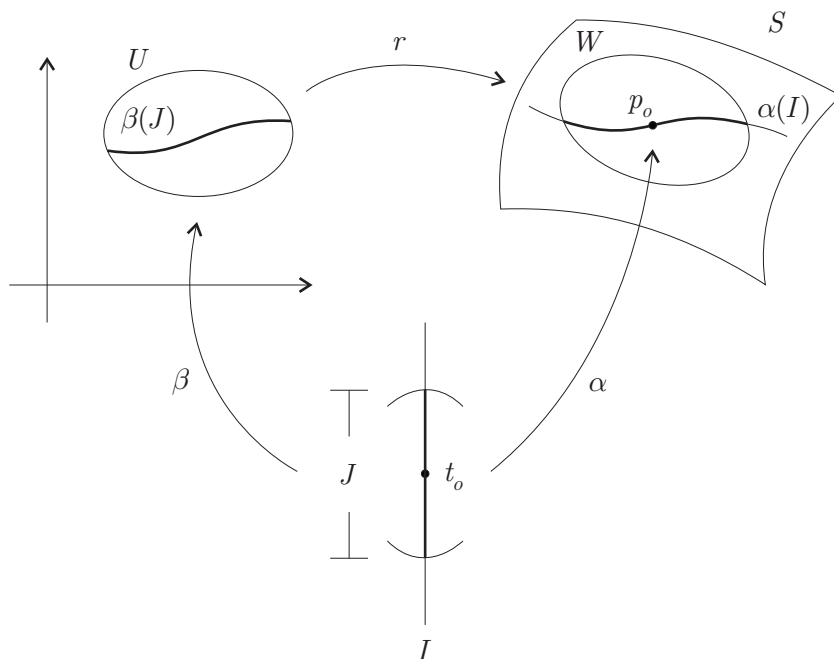
(από την οποίαν άλλωστε κατασκευάζεται η r_o^{-1}) είναι διαφορίσιμη και $\pi|_{W_o} = r_o^{-1}$. Επειδή η $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ είναι συνεχής (ως διαφορίσιμη) θα είναι συνεχής και ως απεικόνιση της μορφής $\alpha: I \rightarrow S$ (με το S εφοδιασμένο με την σχετική τοπολογία), άρα το $J_o := \alpha^{-1}(W_o)$ είναι ανοιχτό διάστημα με $J_o \subseteq I$ και $t_o \in J_o$. Επομένως και η σύνθεση

$$\beta_o := \pi \circ \alpha: J_o \longrightarrow U_o \subseteq \mathbb{R}^2,$$

είναι μια διαφορίσιμη επίπεδη καμπύλη. Ομως $r_o^{-1} = \pi|_{W_o}$, οπότε, από την παραπάνω έκφραση, παίρνουμε ότι $r_o \circ \beta_o = \alpha|_{J_o}$.

Έστω τώρα (U, r, W) μία τυχαία παραμέτρηση της S με $p_o \in W$. Θεωρούμε και μία παραμέτρηση Monge (U_o, r_o, W_o) όπως πριν. Το $W \cap W_o$ είναι ανοιχτό στο S και περιέχει το p_o . Άρα το $J := \alpha^{-1}(W \cap W_o)$ είναι ανοιχτό διάστημα με $J \subseteq J_o \subseteq I$ και $t_o \in J$. Ορίζουμε την επίπεδη καμπύλη

$$\beta := r^{-1} \circ \alpha|_J.$$



Σχήμα 2.10

Αλλά μπορούμε να γράψουμε ότι

$$\beta = r^{-1} \circ \alpha|_J = (r^{-1} \circ r_o) \circ (\pi \circ \alpha)|_J = (r^{-1} \circ r_o) \circ \beta_o|_J,$$

που είναι διαφορίσιμη καμπύλη, αφού η $r^{-1} \circ r_o$ είναι διαφορίσιμη (ως απεικόνιση αλλαγής συντεταγμένων· βλ. Θεώρημα 2.3.3) και η $\beta_o|_J$ είναι επίσης διαφορίσιμη. Επομένως, $r \circ \beta = \alpha|_J$. \square

2.5.11 Παρατήρηση. Όπως φάνηκε στην προηγούμενη απόδειξη, η ζητούμενη καμπύλη β έχει τη γενική μορφή $\beta = r^{-1} \circ \alpha|_J$, για κατάλληλο J . Όμως, από την τελευταία σχέση, δεν προκύπτει ευθέως και η διαφορισιμότητα της β . Τούτο γιατί η α είναι διαφορίσιμη με τη συνήθη έννοια (δηλαδή ως απεικόνιση μεταξύ των ευκλειδείων χώρων \mathbb{R} και \mathbb{R}^3), ενώ η r^{-1} είναι διαφορίσιμη με την έννοια των επιφανειών (βλ. Ορισμό 2.5.1). Επομένως, δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε ούτε τον συνήθη κανόνα της αλυσίδας (για διαφορίσιμες απεικονίσεις μεταξύ ευκλειδείων χώρων), ούτε τον κανόνα της αλυσίδας για διαφορίσιμες απεικονίσεις μεταξύ επιφανειών (βλ. Θεώρημα 2.5.9). Αυτός είναι και ο λόγος της πιο σύνθετης απόδειξης που δώσαμε πριν, αντί μιάς φαινομενικά απλούστερης, που λανθασμένα θα μπορούσε κάποιος να φανταστεί.

2.6 Ο εφαπτόμενος χώρος

Υποθέτουμε ότι S είναι κανονική επιφάνεια, $p \in S$ και (U, r, W) 2-διάστατος χάρτης της S με $p \in W$. Επειδή, για $q := r^{-1}(p) \in U$, τα διανύσματα $r_u(q)$ και $r_v(q)$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα (βλ. Παρατηρήσεις 2.1.2), αυτά ορίζουν ένα 2-διάστατο υπόχωρο του \mathbb{R}^3 , τον οποίον ονομάζουμε **εφαπτόμενο χώρο της S στο p** (tangent space of S at p) και συμβολίζουμε με $T_p S$. Επομένως,

$$T_p S := \{ \lambda r_u(q) + \mu r_v(q) \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R} \}.$$

Προφανώς το ζεύγος $\{r_u(q), r_v(q)\}$ είναι βάση του $T_p S$. Τα στοιχεία του $T_p S$ καλούνται **εφαπτόμενα διανύσματα της S στο p** (tangent vectors of S at p).

2.6.1 Πρόταση. Με τις προηγούμενες υποθέσεις ισχύει ότι

$$(2.6.1) \quad T_p S = [Dr(q)](\mathbb{R}^2).$$

Απόδειξη. Κάθε στοιχείο του $T_p S$ είναι της μορφής $\lambda r_u(q) + \mu r_v(q)$, όπου $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, ενώ κάθε στοιχείο του $Dr(q)(\mathbb{R}^2)$ είναι της μορφής, γενικά, $Dr(q)(a, b)$, όπου $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} Dr(q)(a, b) &= Dr(q)(ae_1 + be_2) = aDr(q)(e_1) + bDr(q)(e_2) \\ &= a \left. \frac{\partial r}{\partial u} \right|_q + b \left. \frac{\partial r}{\partial v} \right|_q = ar_u(q) + br_v(q), \end{aligned}$$

με την οποίαν αποδεικνύεται ο ισχυρισμός. \square

Σημείωση. Μπορούμε να υπολογίσουμε το διαφορικό $Dr(q)$ στο σημείο (a, b) μέσω του πίνακα Jacobi ως εξής:

$$\begin{aligned} Dr(q)(a, b) &= (J_q r) \cdot (a, b)^t = \begin{pmatrix} \left. \frac{\partial x}{\partial u} \right|_q & \left. \frac{\partial x}{\partial v} \right|_q \\ \left. \frac{\partial y}{\partial u} \right|_q & \left. \frac{\partial y}{\partial v} \right|_q \\ \left. \frac{\partial z}{\partial u} \right|_q & \left. \frac{\partial z}{\partial v} \right|_q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \\ &= \left(a \left. \frac{\partial x}{\partial u} \right|_q + b \left. \frac{\partial x}{\partial v} \right|_q, a \left. \frac{\partial y}{\partial u} \right|_q + b \left. \frac{\partial y}{\partial v} \right|_q, a \left. \frac{\partial z}{\partial u} \right|_q + b \left. \frac{\partial z}{\partial v} \right|_q \right) \\ &= a \left(\left. \frac{\partial x}{\partial u} \right|_q, \left. \frac{\partial y}{\partial u} \right|_q, \left. \frac{\partial z}{\partial u} \right|_q \right) + b \left(\left. \frac{\partial x}{\partial v} \right|_q, \left. \frac{\partial y}{\partial v} \right|_q, \left. \frac{\partial z}{\partial v} \right|_q \right) \\ &= ar_u(q) + br_v(q). \end{aligned}$$

2.6.2 Πρόταση. Η απεικόνιση $Dr(q): \mathbb{R}^2 \rightarrow T_p S$ είναι γραμμικός ισομορφισμός

Απόδειξη. Προφανής, αφού η $Dr(q): \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ είναι γραμμική απεικόνιση 1-1 (από τον ορισμό της παραμέτρησης) και $T_p S = [Dr(q)](\mathbb{R}^2)$. \square

Ας θεωρήσουμε τώρα ένα σημείο $p \in S$ και το σύνολο $\mathcal{C}(S, p)$ όλων των διαφορίσιμων καμπυλών

$$\alpha: J_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^3,$$

οι οποίες ικανοποιούν τις επόμενες συνθήκες:

$$0 \in J_\alpha, \quad \alpha(J_\alpha) \subset S, \quad \alpha(0) = p,$$

δηλαδή οι καμπύλες διέρχονται από το p και η εικόνα τους περιέχεται ολόκληρη στην επιφάνεια S . Ορίζουμε και το σύνολο

$$\mathbb{E}_p := \{\alpha'(0) \mid \alpha \in \mathcal{C}(S, p)\}.$$

2.6.3 Θεώρημα. Με τους προηγούμενους συμβολισμούς ισχύει η σχέση

$$(2.6.2) \quad T_p S = \mathbb{E}_p,$$

δηλαδή τα διανύσματα του $T_p S$ υλοποιούνται ως εφαπτόμενα διανύσματα (: ταχύτητες), στο σημείο p , διαφορίσιμων καμπυλών που διέρχονται από το σημείο p και παίρνουν τιμές μέσα στην επιφάνεια S .

Απόδειξη. Έστω τυχόν διάνυσμα $w \in T_p S$. Τότε $w = Dr(q)(h)$, για κάποιο $h \in \mathbb{R}^2$. Θεωρούμε την ευθεία

$$\beta: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2: t \mapsto \beta(t) := th + q.$$

Η β είναι συνεχής με $\beta(0) = q \in U$ και το U είναι ανοιχτό στο \mathbb{R}^2 , άρα υπάρχει $\varepsilon > 0$ με $\beta((-\varepsilon, \varepsilon)) \subseteq U$. Ορίζουμε την καμπύλη

$$\alpha := r \circ \beta|_{(-\varepsilon, \varepsilon)}: (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow \mathbb{R}^3,$$

η οποία είναι διαφορίσιμη, και ικανοποιεί τις συνθήκες $\alpha((-\varepsilon, \varepsilon)) \subseteq S$, $\alpha(0) = r(q) = p$ και

$$\begin{aligned} \alpha'(0) &= (r \circ \beta)'(0) = [D(r \circ \beta)(0)](1) \\ &= [Dr(q) \circ D\beta(0)](1) = [Dr(q)](\beta'(0)) \\ &= [Dr(q)](h) = w. \end{aligned}$$

Επομένως $T_p S \subseteq \mathbb{E}_p$.

Αντιστρόφως, έστω τυχόν $\bar{w} = \alpha'(0) \in \mathbb{E}_p$, όπου $\alpha: J_\alpha \rightarrow S \subseteq \mathbb{R}^3$ διαφορίσιμη καμπύλη με $\alpha(0) = p$. Σύμφωνα με την Πρόταση 2.5.10, μπορούμε να βρούμε μία διαφορίσιμη καμπύλη

$$\beta: (-\varepsilon, \varepsilon) \subseteq J_\alpha \longrightarrow U \subseteq \mathbb{R}^2,$$

τέτοια ώστε $\beta(0) = q$ και $\alpha|_{(-\varepsilon, \varepsilon)} = r \circ \beta$. Τότε

$$\begin{aligned} \bar{w} = \alpha'(0) &= [D\alpha(0)](1) = [D(r \circ \beta)(0)](1) \\ &= [Dr(\beta(0)) \circ D\beta(0)](1) = [Dr(q)](\beta'(0)). \end{aligned}$$

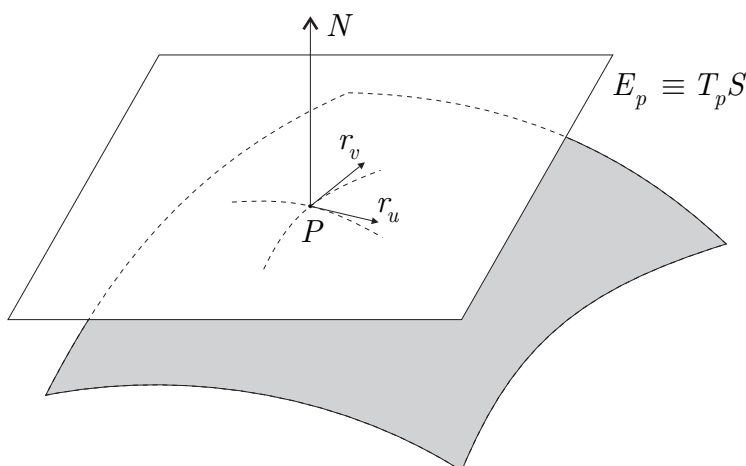
Αφού $\beta'(0) \in \mathbb{R}^2$, προκύπτει ότι $\bar{w} = [Dr(q)](\beta'(0)) \in T_p S$, δηλαδή $\mathbb{E}_p \subseteq T_p S$, οπότε καταλήγουμε στο συμπέρασμα. \square

Άμεση συνέπεια του προηγούμενου θεωρήματος είναι το

2.6.4 Πόρισμα. *Ο εφαπτόμενος χώρος μιας επιφάνειας S σε ένα σημείο $p \in S$ δεν εξαρτάται από την θεωρούμενη παραμέτρηση.*

2.6.5 Ορισμός. Το επίπεδο E_p που διέρχεται από το $p \in S$ και είναι παράλληλο προς το επίπεδο των r_u και r_v λέγεται **εφαπτόμενο επίπεδο της S στο p** (tangent plane). Το επίπεδο αυτό είναι η μεταφορά του $T_p S$ κατά το διάνυσμα θέσης p , και συμβολίζεται με $E_p(S)$ ή, αν δεν υπάρχει κίνδυνος σύγχυσης, με E_p .

Στο επόμενο σχήμα απεικονίζεται το εφαπτόμενο επίπεδο E_p στο σημείο p μιας επιφάνειας S . Για χάρη της εναργέστερης απεικόνισης έχουμε μεταφέρει, κατά το διάνυσμα θέσης του p , τα διανύσματα r_U και r_V ώστε να έχουν αρχή το αναφερόμενο σημείο.



Σχήμα 2.11

2.7 Το διαφορικό διαφορίσιμης απεικόνισης

Αφού επεκτείναμε την έννοια της διαφορισιμότητας σε απεικονίσεις μεταξύ επιφανειών, θα ορίσουμε τώρα διαφορικό μιας τέτοιας απεικόνισης, σε ένα σημείο του πεδίου ορισμού της. Στην κλασική περίπτωση, το σημειακό διαφορικό είναι γραμμική απεικόνιση μεταξύ κατάλληλων γραμμικών χώρων. Τον ρόλο των χώρων αυτών παίζουν τώρα τα εφαπτόμενα επίπεδα.

2.7.1 Λήμμα. Έστω ότι S_1, S_2 είναι κανονικές επιφάνειες και $f: S_1 \rightarrow S_2$ μια διαφορίσιμη απεικόνιση. Αν $\alpha: I \rightarrow S_1$ είναι διαφορίσιμη καμπύλη, τότε και η $f \circ \alpha: I \rightarrow S_2$ είναι επίσης διαφορίσιμη καμπύλη.

Απόδειξη. Θέλουμε να δείξουμε ότι η $f \circ \alpha: I \rightarrow S_2$ είναι διαφορίσιμη σε κάθε $t \in I$. Έστω λοιπόν $t_o \in I$ και $p_o = \alpha(t_o)$. Έστω παραμέτρηση (U, r, W) της S_1 με $p_o \in W$. Θεωρούμε την διαφορίσιμη επίπεδη καμπύλη $\beta: J \rightarrow U$, μέσω της οποίας $\alpha|_J = r \circ \beta$ (βλ. Πρόταση 2.5.8). Τότε

$$f \circ \alpha|_J = f \circ (r \circ \beta) = (f \circ r) \circ \beta,$$

που είναι διαφορίσιμη, ως σύνθεση της τοπικής παράστασης $f \circ r$ της f (βλ. Ορισμό 2.5.1 και Πρόταση 2.5.2) με την διαφορίσιμη καμπύλη β . \square

2.7.2 Ορισμός. Αν S_1, S_2 είναι κανονικές επιφάνειες και $f: S_1 \rightarrow S_2$ διαφορίσιμη απεικόνιση στο $p \in S_1$, καλούμε **(σημειακό) διαφορικό της f στο p** (differential of f at p) την απεικόνιση

$$d_p f \equiv T_p f: T_p S_1 \longrightarrow T_{f(p)} S_2: w \mapsto d_p f(w) := (f \circ \alpha)'(0),$$

όπου $\alpha: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S_1$ διαφορίσιμη καμπύλη με $\alpha(0) = p$ και $\alpha'(0) = w$.

2.7.3 Πρόταση. Το σημειακό διαφορικό είναι μια καλά ορισμένη, γραμμική απεικόνιση.

Απόδειξη. (1) Το $d_p f$ είναι καλά ορισμένο, δηλαδή ανεξάρτητο της καμπύλης που υλοποιεί κάθε εφαπτόμενο διάνυσμα. Πράγματι, ας υποθέσουμε ότι $\alpha: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S_1$ και $\gamma: (-\delta, \delta) \rightarrow S_1$ είναι δύο διαφορίσιμες καμπύλες με $\alpha(0) = \gamma(0) = p$ και $\alpha'(0) = \gamma'(0) = w$. Αν (U, r, W) είναι μία παραμέτρηση Monge της S_1 με $p \in W$, τότε

$$\begin{aligned} (f \circ \gamma)'(0) &= [D(f \circ \gamma)(0)](1) = [D(f \circ r \circ r^{-1} \circ \gamma)(0)](1) \\ &= [D(f \circ r \circ \pi \circ \gamma)(0)](1) = [D(f \circ r \circ \pi)(\gamma(0)) \circ D\gamma(0)](1) \\ &= [D(f \circ r \circ \pi)(\gamma(0))](\gamma'(0)) = [D(f \circ r \circ \pi)(\alpha(0))](\alpha'(0)) \\ &= [D(f \circ r \circ r^{-1} \circ \alpha)(0)](1) = [D(f \circ \alpha)(0)](1) \\ &= (f \circ \alpha)'(0). \end{aligned}$$

(2) Αφού η f είναι διαφορίσιμη στο p , υπάρχουν παραμετρήσεις (U_i, r_i, W_i) των S_i ($i = 1, 2$), με $p \in W_1$, $f(W_1) \subseteq W_2$ και $F := r_2^{-1} \circ f \circ r_1: U_1 \rightarrow U_2$ διαφορίσιμη στο $q = r_1^{-1}(p)$. Ισχυριζόμαστε ότι το διάγραμμα

$$\begin{array}{ccc} T_p S_1 & \xrightarrow{d_p f} & T_{f(p)} S_2 \\ \uparrow Dr_1(q) & & \uparrow Dr_2(\bar{q}) \\ \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{DF(q)} & \mathbb{R}^2 \end{array}$$

Διάγραμμα 2.4

όπου $\bar{q} = r_2^{-1}(f(p))$, είναι μεταθετικό: Εστω τυχόν $h \in \mathbb{R}^2$. Τότε

$$[d_p f \circ Dr_1(q)](h) = d_p f([Dr_1(q)](h)).$$

Το διάνυσμα $[Dr_1(q)](h) \in T_p S_1$ υλοποιείται μέσω μιας διαφορίσιμης καμπύλης $\alpha: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$ με $\alpha(0) = p$ και $\alpha'(0) = [Dr_1(q)](h)$. Όπως είδαμε στην απόδειξη του Θεωρήματος 2.5.2, μπορούμε να πάρουμε

$$\alpha(t) := r_1(th + q) = (r_1 \circ \beta)(t); \quad t \in (-\varepsilon, \varepsilon),$$

όπου β είναι η ευθεία $\beta(t) = th + q$. Επομένως,

$$\begin{aligned} [d_p f \circ Dr_1(q)](h) &= d_p f(\alpha'(0)) = (f \circ \alpha)'(0) = (f \circ r_1 \circ \beta)'(0) \\ &= [D(f \circ r_1 \circ \beta)(0)](1) = [D(f \circ r_1)(\beta(0))](\beta'(0)) \\ &= [D(f \circ r_1)(q)](h) = [D(r_2 \circ F)(q)](h) \\ &= [Dr_2(\bar{q}) \circ D(F)(q)](h). \end{aligned}$$

Αφού $Dr_1(q): \mathbb{R}^2 \rightarrow T_p S_1$ και $Dr_2(\bar{q}): \mathbb{R}^2 \rightarrow T_{f(p)} S_2$ είναι γραμμικοί ισομορφισμοί (βλ. Πρόταση 2.6.2), θα είναι

$$d_p f = Dr_2(\bar{q}) \circ DF(q) \circ (Dr_1(q))^{-1},$$

που αποδεικνύει την πρόταση. \square

Εδώ υπενθυμίζουμε ότι

$$(2.7.1) \quad [Dr(q)](e_1) = \left. \frac{\partial r}{\partial u} \right|_q = r_u(q),$$

$$(2.7.2) \quad [Dr(q)](e_2) = \left. \frac{\partial r}{\partial v} \right|_q = r_v(q).$$

Επομένως:

Ο γραμμικός ισομορφισμός $Dr(q): \mathbb{R}^2 \rightarrow T_p S$ μεταφέρει την κανονική βάση $\{e_1, e_2\}$ του \mathbb{R}^2 στη βάση $\{r_u(q), r_v(q)\}$ του $T_p S$.

Είμαστε τώρα σε θέση να αποδείξουμε το επόμενο

2.7.4 Θεώρημα. *Έστω S_1, S_2 κανονικές επιφάνειες, $f: S_1 \rightarrow S_2$ διαφορίσιμη απεικόνιση, $p \in S_1$ και $(U_1, r_1, W_1), (U_2, r_2, W_2)$ παραμετρήσεις των S_1 και S_2 , αντιστοίχως, με $p \in W_1$ και $f(W_1) \subseteq W_2$. Έστω $q = r_1^{-1}(p)$, $\bar{q} = r_2^{-1}(f(p))$ και $F = r_2^{-1} \circ f \circ r_1: U_1 \rightarrow U_2$ η τοπική παράσταση της f μέσω των ανωτέρω παραμετρήσεων. Τότε ο πίνακας της γραμμικής απεικόνισης $d_p f$, ως προς τις βάσεις $\{r_{1u}(q), r_{1v}(q)\}$ του $T_p S_1$ και $\{r_{2u}(\bar{q}), r_{2v}(\bar{q})\}$ του $T_{f(p)} S_2$, συμπίπτει με τον πίνακα Jacobi της F στο q .*

Απόδειξη. Η μεταθετικότητα του Διαγράμματος 2.4 ισοδυναμεί με την ισότητα

$$d_p f \circ Dr_1(q) = Dr_2(\bar{q}) \circ DF(q).$$

Αν A είναι ο πίνακας της $d_p f$ ως προς τις βάσεις $\{r_{1u}(q), r_{1v}(q)\}$ του $T_p S_1$ και $\{r_{2u}(\bar{q}), r_{2v}(\bar{q})\}$ του $T_{f(p)} S_2$, B_1 είναι ο πίνακας της $Dr_1(q)$ ως προς τις βάσεις $\{e_1, e_2\}$ του \mathbb{R}^2 και $\{r_{1u}(q), r_{1v}(q)\}$ του $T_p S_1$, B_2 είναι ο πίνακας της $Dr_2(\bar{q})$ ως προς τις βάσεις $\{e_1, e_2\}$ του \mathbb{R}^2 και $\{r_{2u}(\bar{q}), r_{2v}(\bar{q})\}$ του $T_{f(p)} S_2$ και $J_q F$

είναι ο πίνακας Jacobi της F στο q , από την ανωτέρω ισότητα των συνθέσεων των γραμμικών απεικονίσεων προκύπτει

$$A \cdot B_1 = B_2 \cdot J_q F.$$

Ομως, προφανώς

$$B_1 = B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

που αποδεικνύει τον ισχυρισμό του θεωρήματος. \square

2.7.5 Παρατήρηση. Το προηγούμενο αποτέλεσμα έχει προφανή πρακτική σημασία: Για να υπολογίσουμε το διαφορικό $d_p f$ μιας διαφορίσιμης απεικόνισης μεταξύ δύο επιφανειών S και \bar{S} , βρίσκουμε τον πίνακα Jacobi στο $q = r_1(p)$ της τοπικής παράστασης F , μέσω καταλλήλων -κατά το δυνατόν απλουστερών- παραμετρήσεων (U, r, W) και $(\bar{U}, \bar{r}, \bar{W})$ στα σημεία p και $f(p)$ αντιστοίχως, οπότε, για οποιοδήποτε εφαπτόμενο διάνυσμα

$$w = (\lambda, \mu) \equiv \lambda r_u(q) + \mu r_v(q) \in T_p S,$$

έχουμε ότι

$$d_p f(w) = (J_q F) \cdot (\lambda, \mu)^t.$$

Προφανώς, το προηγούμενο εφαπτόμενο διάνυσμα θα έχει την (γενική) μορφή

$$d_p f(w) = \bar{w} = (\bar{\lambda}, \bar{\mu}) \equiv \bar{\lambda} \bar{r}_u(\bar{q}) + \bar{\mu} \bar{r}_v(\bar{q}) \in T_f(p) \bar{S},$$

όπου $\bar{q} = \bar{r}^{-1}(f(p))$.

Ο υπολογισμός του διαφορικού μιας απεικόνισης $f: S_1 \rightarrow S_2$ διευκολύνεται ιδιαίτερα, αν γνωρίζουμε ότι η f είναι περιορισμός (επί της S_1) μιας διαφορίσιμης απεικόνισης της μορφής $F: A \rightarrow \mathbb{R}^3$, όπου το A είναι ανοιχτό υποσύνολο του \mathbb{R}^3 με $S_1 \subseteq A$. Ακριβέστερα, έχουμε την επόμενη

2.7.6 Πρόταση. Έστω διαφορίσιμη απεικόνιση $F: A \rightarrow \mathbb{R}^3$, όπου $A \subseteq \mathbb{R}^3$ ανοιχτό. Αν $S_1 \subseteq A$, S_2 είναι κανονικές επιφάνειες και $f: S_1 \rightarrow S_2$ απεικόνιση τέτοια ώστε $f = F|_{S_1}$, τότε

$$d_p f = DF(p)|_{T_p S_1}, \quad \forall p \in S_1.$$

Απόδειξη. Σύμφωνα με την Πρόταση 2.5.5 και το Θεώρημα 2.5.7, η απεικόνιση $f: S_1 \rightarrow S_2$ είναι διαφορίσιμη. Έστω τυχόν $p \in S_1$. Όπως είδαμε στην απόδειξη του Θεωρήματος 2.5.7, μπορούμε να βρούμε μία παραμέτρηση Monge (U_2, r_2, W_2) , της S_2 με $f(p) \in W_2$, και παραμέτρηση (U_1, r_1, W_1) της S_1 με $p \in W_1$, $f(W_1) \subseteq W_2$, έτσι ώστε η αντίστοιχη τοπική παράσταση

$$\bar{F} = r_2^{-1} \circ f \circ r_1 = \pi \circ f \circ r_1: U_1 \rightarrow U_2$$

να είναι διαφορίσιμη στο $q = r_1^{-1}(p)$. Εδώ συμβολίζουμε την τοπική παράσταση με \bar{F} για να την ξεχωρίσουμε από την F της εκφώνησης. Επίσης θυμίζουμε ότι π είναι ο περιορισμός της $\mathbb{R}^3 \ni (x, y, z) \mapsto (x, y) \in \mathbb{R}^2$ επί του W_2 .

Εφαρμόζοντας το μεταθετικό Διάγραμμα 2.4 και τον κανόνα της αλυσίδας σε ευκλείδειους χώρους [και θέτοντας $\bar{q} = r_2^{-1}(f(p))$], βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned} d_p f &= Dr_2(\bar{q}) \circ D\bar{F}(q) \circ [Dr_1(q)]^{-1} \\ &= Dr_2(\bar{q}) \circ D(r_2^{-1} \circ f \circ r_1)(q) \circ [Dr_1(q)]^{-1} \\ &= D(f \circ r_1)(q) \circ [Dr_1(q)]^{-1} \\ &= D(F \circ r_1)(q) \circ [Dr_1(q)]^{-1} \\ &= DF(p) \circ Dr_1(q) \circ [Dr_1(q)]^{-1} \\ &= DF(p) \circ id|_{T_p S_1} = DF(p)|_{T_p S_1}. \end{aligned}$$

Παρόμοια και για κάθε άλλο $p \in S_1$, οπότε κλείνει η απόδειξη. □

Η έννοια της διαφορισιμότητας, για απεικονίσεις μεταξύ επιφανειών, και του αντίστοιχου διαφορικού τους οδηγεί στη δημιουργία ενός Διαφορικού Λογισμού στο πλαίσιο της Θεωρίας Επιφανειών, ο οποίος επεκτείνει το συνήθη Διαφορικό Λογισμό μεταξύ ευκλειδίων χώρων. Ο νέος αυτός λογισμός έχει ανάλογες ιδιότητες. Για να δώσουμε μια σχετική ιδέα στον αναγνώστη, θα παρουσιάσουμε δύο βασικά αποτελέσματα: το πρώτο είναι η πλήρης μορφή του Θεωρήματος της Αλυσίδας, και το δεύτερο αποτελεί το Θεώρημα της Αντίστροφης Συνάρτησης στο παρόν πλαίσιο.

2.7.7 Θεώρημα (Κανόνας της Αλυσίδας). *Αν S_i ($i = 1, 2, 3$) είναι κανονικές επιφάνειες, $f: S_1 \rightarrow S_2$ διαφορίσιμη απεικόνιση στο $p \in S_1$ και $g: S_2 \rightarrow S_3$ διαφορίσιμη στο $f(p) \in S_2$, τότε και η σύνθεση $g \circ f: S_1 \rightarrow S_3$ είναι διαφορίσιμη απεικόνιση στο p και*

$$(2.7.3) \quad d_p(g \circ f) = d_{f(p)}g \circ d_p f,$$

δηλαδή έχουμε το μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{array}{ccc} T_p S_1 & \xrightarrow{d_p f} & T_{f(p)} S_2 \\ & \searrow d_p(g \circ f) & \downarrow d_{f(p)} g \\ & & T_{g(f(p))} S_3 \end{array}$$

Διάγραμμα 2.5

Απόδειξη. Η διαφορισιμότητα της $g \circ f$ στο p έχει ήδη αποδειχθεί στο Θεώρημα 2.5.9. Για την απόδειξη της (2.7.5) προχωρούμε ως εξής: Θεωρούμε τυχόν $w \in T_p S_1$ και υποθέτουμε ότι υλοποιείται από μία διαφορίσιμη καμπύλη α με $\alpha(0) = p$, δηλαδή $\alpha'(0) = w$. Σύμφωνα με το Λήμμα 2.7.1, και η $f \circ \alpha$ είναι διαφορίσιμη καμπύλη με $(f \circ \alpha)(0) = f(p)$. Επομένως, κατά τον Ορισμό 2.7.2, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} d_p(g \circ f)(w) &= ((g \circ f) \circ \alpha)'(0) = (g \circ (f \circ \alpha))'(0) = \\ &= d_{f(p)}g((f \circ \alpha)'(0)) = d_{f(p)}g(d_p f(\alpha'(0))) = (d_{f(p)}g \circ d_p f)(w), \end{aligned}$$

που κλείνει την απόδειξη. \square

2.7.8 Θεώρημα (της Αντίστροφης Συνάρτησης). Υποθέτουμε ότι $f: S \rightarrow \bar{S}$ είναι απεικόνιση διαφορίσιμη στο $p \in S$, της οποίας το (σημειακό) διαφορικό $d_p f: T_p S \rightarrow T_{f(p)} \bar{S}$ είναι γραμμικός ισομορφισμός. Τότε η f είναι τοπική αμφιδιαφόριση στο p , δηλαδή υπάρχει ανοιχτή περιοχή $A \subseteq S$ του p και ανοιχτή περιοχή $\bar{A} \subseteq \bar{S}$ του $f(p)$, έτσι ώστε η $f|_A: A \rightarrow \bar{A}$ να είναι αμφιδιαφόριση.

Απόδειξη. Εφ' όσον η f είναι διαφορίσιμη στο $p \in S$, υπάρχουν παραμετρήσεις (U, r, W) , $(\bar{U}, \bar{r}, \bar{W})$ των S, \bar{S} αντιστοίχως, με $p \in W$ και $f(W) \subseteq \bar{W}$, έτσι ώστε η τοπική παράσταση $F = \bar{r}^{-1} \circ f \circ r: U \rightarrow \bar{U}$ να είναι διαφορίσιμη στο $q = r^{-1}(p)$. Από το Πόρισμα 2.6.2, το μεταθετικό Διάγραμμα 2.4 και την υπόθεση, προκύπτει ότι η

$$DF(q) = [D\bar{r}(\bar{q})]^{-1} \circ d_p f \circ Dr(q): \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad [:\bar{q} = \bar{r}^{-1}(f(p))]$$

είναι γραμμικός ισομορφισμός. Επομένως, κατά το Θεώρημα της Αντίστροφης Συνάρτησης σε ευκλείδειους χώρους, υπάρχει ανοιχτή περιοχή $V \subseteq U$ του q και ανοιχτή περιοχή $\bar{V} \subseteq \bar{U}$ του \bar{q} , έτσι ώστε η $F|_V: V \rightarrow \bar{V}$ να είναι αμφιδιαφόριση [με την συνήθη έννοια και με την έννοια των επιφανειών, μετά το Παράδειγμα 2.2(1)]. Θέτοντας $A := r(V)$ και $\bar{A} := \bar{r}(\bar{V})$, έχουμε ότι η $f|_A = \bar{r} \circ F \circ r^{-1}|_A: A \rightarrow \bar{A}$ είναι αμφιδιαφόριση. \square

2.8 Ασκήσεις

Άσκηση 1. Να αποδειχθούν οι τύποι των στερεογραφικών προβολών και η σχέση (*) της σελ. 90 (βλ. Παράδειγμα 3, Παράγραφος 2.2).

Λύση. Αναφερόμενοι στο Σχήμα 2.4, θεωρούμε το σημείο P και την προβολή του (από το βόρειο πόλο) P_N επί του επιπέδου του ισημερινού $E \equiv \mathbb{R}^2$. Αν καλέσουμε (x, y, z) τις συντεταγμένες του P , $(x_N, y_N) \equiv (x_N, y_N, 0)$ τις συντεταγμένες του P_N , έχουμε ότι

$$(1) \quad \vec{NP} = \vec{OP} - \vec{ON} = (x, y, z) - (0, 0, 1) = (x, y, z - 1),$$

$$(2) \quad \vec{NP}_N = \vec{OP}_N - \vec{ON} = (x_N, y_N, 0) - (0, 0, 1) = (x_N, y_N, -1),$$

Όμως, $\overrightarrow{NP_N} = \lambda \cdot \overrightarrow{NP}$, για κάποιο $\lambda \in \mathbb{R}_*$, άρα οι (1) και (2) δίνουν ότι $(x_N, y_N, -1) = \lambda(x, y, z - 1)$, απ' όπου

$$x_N = \lambda x, \quad y_N = \lambda y, \quad \lambda(1 - z) = 1.$$

Επομένως, επιλύοντας την τελευταία ως προς λ , βρίσκουμε ότι

$$\lambda = \frac{1}{z-1} \quad \text{και} \quad x_N = \frac{x}{1-z}, \quad y_N = \frac{y}{1-z},$$

που μας δίνουν ακριβώς την έκφραση της r_N^{-1} .

Η r_N^{-1} είναι προφανώς 1-1. Ισχυριζόμαστε ότι $r_N^{-1}(S^2 \setminus \{N\}) = \mathbb{R}^2$, δηλαδή η r_N^{-1} είναι απεικόνιση επί. Ο μηχανισμός της απόδειξης του επί θα μας δώσει και την έκφραση της r_N . Για τον σκοπό αυτό θεωρούμε τυχόν $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ και αναζητούμε $(x, y, z) \in S^2$, τέτοιο ώστε

$$(u, v) = r_N^{-1}(x, y, z) = \left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z} \right),$$

απ' όπου

$$(3) \quad x = u(1-z) \quad \text{και} \quad y = v(1-z).$$

Αφού $(x, y, z) \in S^2$, θα είναι

$$u^2(1-z)^2 + v^2(1-z)^2 + z^2 = 1,$$

απ' την οποίαν στοιχειωδώς βρίσκουμε ότι

$$z = \frac{-1 + u^2 + v^2}{1 + u^2 + v^2}.$$

Άρα οι σχέσεις (3) δίνουν τις

$$x = \frac{2u}{1 + u^2 + v^2}, \quad y = \frac{2v}{1 + u^2 + v^2},$$

οπότε καταλήγουμε στην έκφραση της r_N .

Άσκηση 2. Να δικαιολογηθεί γιατί το ελλειψοειδές (βλ. Παραδείγματα 5(ii), Παράγραφος 2.2)

$$S := \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \right\},$$

με $abc > 0$, είναι κανονική επιφάνεια και να βρεθεί μία παραμέτρηση του τύπου Monge που να περιέχει το σημείο $(a, 0, 0)$.

Λύση. Παρατηρούμε ότι η απεικόνιση

$$f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}: (x, y, z) \mapsto \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$$

είναι διαφορίσιμη, $1 \in f(\mathbb{R}^3)$, και $S = f^{-1}(1)$. Επίσης, διαπιστώνουμε ότι, για κάθε $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, είναι

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{(x,y,z)}, \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{(x,y,z)}, \frac{\partial f}{\partial z} \Big|_{(x,y,z)} \right) = \left(\frac{2x}{a^2}, \frac{2y}{b^2}, \frac{2z}{c^2} \right),$$

άρα, για κάθε $(x, y, z) \in S$, είναι

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{(x,y,z)}, \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{(x,y,z)}, \frac{\partial f}{\partial z} \Big|_{(x,y,z)} \right) \neq (0, 0, 0).$$

Επομένως, κατά το Θεώρημα 2.2.1, το ελλειψοειδές είναι κανονική επιφάνεια.

Για το σημείο $(a, 0, 0) \in S$ έχουμε

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{(a,0,0)}, \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{(a,0,0)}, \frac{\partial f}{\partial z} \Big|_{(a,0,0)} \right) = \left(\frac{2}{a}, 0, 0 \right) \neq (0, 0, 0).$$

Λύνοντας την ισότητα που ορίζει το ελλειψοειδές ως προς x , έχουμε ότι

$$x = \pm a \sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}}.$$

Η ζητούμενη παραμέτρηση Monge που περιλαμβάνει στην εικόνα της το σημείο $(x = a, y = 0, z = 0)$ είναι η $(U, r, r(U))$, όπου

$$U := \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : 1 - \frac{u^2}{b^2} - \frac{v^2}{c^2} > 0\},$$

$$r: U \longrightarrow \mathbb{R}^3: (u, v) \mapsto (g(u, v), u, v),$$

$$\text{με } g: U \rightarrow \mathbb{R}: (u, v) \mapsto a \sqrt{1 - \frac{u^2}{b^2} - \frac{v^2}{c^2}}.$$

Άσκηση 3. Να αποδειχθεί ότι η τριάδα $(U, r, r(U))$, όπου $U = \mathbb{R} \times (0, \pi)$ και

$$r: U \rightarrow \mathbb{R}^3: (u, v) \mapsto (a \cos u \sin v, b \sin u \sin v, c \cos v),$$

είναι παραμέτρηση του ελλειψοειδούς (βλ. Άσκηση 2). Να περιγραφούν οι u - και v -παραμετρικές καμπύλες.

Λύση. Το σύνολο U είναι ανοιχτό υποσύνολο του \mathbb{R}^2 και η r είναι διαφορίσιμη και 1-1. Η εικόνα της r είναι (ανοιχτό) υποσύνολο του ελλειψοειδούς: για κάθε $(u, v) \in U$, είναι

$$\frac{a^2 \cos^2 u \sin^2 v}{a^2} + \frac{b^2 \sin^2 u \sin^2 v}{b^2} + \frac{c^2 \cos^2 v}{c^2} = 1.$$

Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} r_u &= (-a \sin u \sin v, b \cos u \sin v, 0), \\ r_v &= (a \cos u \cos v, b \sin u \cos v, -c \sin v) \\ r_u \times r_v &= (-bc \cos u \sin^2 v, -ac \sin u \sin^2 v, -ab \sin v \cos v) \neq (0, 0, 0). \end{aligned}$$

Η τελευταία ισοδυναμεί με την συνθήκη να είναι η $Dr(q)$ απεικόνιση 1-1. Επειδή γνωρίζουμε ότι το ελλειψοειδές (που περιέχει την εικόνα της r) είναι κανονική επιφάνεια, δεν χρειάζεται να ελέγξουμε αν η r^{-1} είναι συνεχής (βλ. Πρόταση 2.3.2).

Οι u -παραμετρικές καμπύλες είναι (για v σταθερό) οι τομές του ελλειψοειδούς με το επίπεδο $z = c \cos v$, δηλαδή είναι οι ελλείψεις

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \sin^2 v.$$

Οι v -παραμετρικές καμπύλες είναι (για u σταθερό) οι τομές του ελλειψοειδούς με τα ημιεπίπεδα που ορίζονται από τις σχέσεις $x = aR \cos u$, $y = bR \sin u$ ($R > 0$), είναι συνεπώς ημιελλείψεις.

Άσκηση 4. Να αποδειχθεί με άλλους τρόπους, χωρίς εφαρμογή του Θεωρήματος 2.2.1, ότι το υπερβολικό παραβολοειδές

$$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \quad (ab \neq 0)$$

είναι κανονική επιφάνεια.

Λύση. Ας συμβολίζουμε με S την επιφάνεια του δοθέντος παραβολοειδούς. Εδώ έχουμε την δυνατότητα να εφαρμόσουμε δύο τρόπους.

Α' Τρόπος: Θεωρούμε την διαφορίσιμη απεικόνιση

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}: (x, y) \longmapsto \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}.$$

Σύμφωνα με το Παράδειγμα 4 της Παραγράφου 2.2, αρκεί να αποδείξουμε ότι $\Gamma_f = S$, που είναι προφανές.

Β' Τρόπος: Θεωρούμε την απεικόνιση

$$r(u, v) := (a(u + v), b(u - v), 4uv), \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2.$$

Η r είναι διαφορίσιμη και (όπως προκύπτει αμέσως) απεικόνιση 1-1, η οποία παίρνει τιμές στην S .

Δείχνουμε ότι είναι και απεικόνιση επί. Πράγματι, αν θεωρήσουμε τυχόν σημείο $(x, y, z) \in S$, τότε, για

$$u = \frac{1}{2} \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} \right), \quad v = \frac{1}{2} \left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b} \right),$$

είναι $r(u, v) = (x, y, z)$. Από την προηγούμενη διαδικασία, προκύπτει ότι η αντίστροφη της r είναι η απεικόνιση

$$r^{-1}: \mathbb{R}^3 \supseteq S \longrightarrow \mathbb{R}^2: (x, y, z) \mapsto \left(\frac{1}{2} \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} \right), \frac{1}{2} \left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b} \right) \right),$$

που είναι συνεχής, άρα η r είναι ομοιομορφισμός.

Τέλος, βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned} r_u &= (a, b, 4v), & r_v &= (a, -b, 4u) \\ r_u \times r_v &= (4b(u + v), 4a(-u + v), -2ab). \end{aligned}$$

Επειδή $ab \neq 0$, είναι και $r_u \times r_v \neq 0$. Επομένως, η r ορίζει μία παραμέτρηση που καλύπτει ολόκληρη την S , άρα η τελευταία είναι κανονική επιφάνεια.

Άσκηση 5. Δίνεται η απεικόνιση

$$\chi: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3: (u, v) \mapsto \left(\frac{1}{2}(u + v), \frac{1}{2}(u - v), uv \right).$$

Να αποδειχθεί ότι αποτελεί παραμέτρηση επιφανείας. Ποιά είναι η επιφάνεια αυτή;

Λύση. Παρατηρούμε ότι

$$\chi(\mathbb{R}^2) = \{(x, y, z) : z = x^2 - y^2\},$$

δηλαδή πρόκειται περί του υπερβολικού παραβολοειδούς με $a = b = 1$. Τα υπόλοιπα μέρη της άσκησης ελέγχονται όπως στην προηγούμενη.

Άσκηση 6. Να αποδειχθεί ότι η απεικόνιση

$$r(u, v) = (u^2, uv, v^2), \quad u > 0, v > 0$$

αποτελεί παραμέτρηση επιφάνειας.

Λύση. Η r είναι διαφορίσιμη απεικόνιση. Είναι 1-1, αφού

$$r(u, v) = r(\bar{u}, \bar{v}) \Rightarrow \begin{cases} u^2 = \bar{u}^2 \\ v^2 = \bar{v}^2 \\ uv = \bar{u}\bar{v} \end{cases} \Rightarrow u = \bar{u}, v = \bar{v},$$

λόγω της υπόθεσης για τα u, v .

Επίσης, αν $U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u > 0, v > 0\}$ και $W = r(U)$, παρατηρούμε ότι η απεικόνιση

$$W \ni (x, y, z) \mapsto \left(\sqrt{x}, \frac{y}{\sqrt{x}} \right) \in U$$

είναι συνεχής και αντίστροφη της r , άρα η r είναι ομοιομορφισμός. Τέλος, με απλούς υπολογισμούς βρίσκουμε ότι

$$r_u \times r_v = (2v^2, -4uv, 2v^2) \neq (0, 0, 0)$$

(ισοδύναμα $\|r_u \times r_v\| = 2(v^2 + 4uv + u^2)^{1/2} \neq 0$), οπότε η τριάδα (U, r, W) είναι παραμέτρηση επιφάνειας.

Άσκηση 7. Να αποδειχθεί ότι η απεικόνιση

$$r(u, v) = (au \cos v, bu \sin v, u^2), \quad u > 0, v \in \mathbb{R}.$$

αποτελεί παραμέτρηση επιφάνειας (ποιάς;).

Λύση. Εργαζόμενοι όπως και στις προηγούμενες περιπτώσεις, αποδεικνύουμε ότι η r ορίζει πράγματι μία παραμέτρηση επιφάνειας (U, r, W) , όπου $U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u > 0\}$ και $W = r(U)$.

Επειδή

$$\frac{(au \cos v)^2}{a^2} + \frac{(bu \sin v)^2}{b^2} = u^2,$$

πρόκειται για παραμέτρηση του ελλειπτικού παραβολοειδούς S , με εξίσωση

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}.$$

Η W καλύπτει ολόκληρη την επιφάνεια S εκτός του σημείου $(0, 0, 0)$, δηλαδή $W = S \setminus \{(0, 0, 0)\}$.

Άσκηση 8. Έστω $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ αμφιδιαφορίσιμη απεικόνιση (μεταξύ ευκλειδίων χώρων) και $S \subset \mathbb{R}^3$ κανονική επιφάνεια. Να αποδειχθεί ότι το σύνολο $\bar{S} := f(S)$ είναι επίσης κανονική επιφάνεια.

Λύση. Έστω τυχόν $\bar{p} \in \bar{S}$. Τότε υπάρχει μοναδικό $p \in S$, έτσι ώστε $\bar{p} = f(p)$. Επομένως, αφού η S είναι κανονική επιφάνεια, υπάρχει παραμέτρηση (U, r, W) της S με $p \in W$.

Θεωρούμε την απεικόνιση $\bar{r}: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ με $\bar{r} := f \circ r$. Η \bar{r} είναι προφανώς διαφορίσιμη και 1-1. Επίσης, αν $\bar{W} := \bar{r}(U)$, παρατηρούμε ότι η

$$\bar{r}^{-1} = (f \circ r)^{-1} = r^{-1} \circ f^{-1}: \bar{W} \rightarrow U$$

είναι συνεχής, άρα η \bar{r} είναι ομοιομορφισμός.

Απ' το άλλο μέρος, για κάθε $q \in U$, έχουμε ότι

$$D\bar{r}(q) = D(f \circ r)(q) = Df(r(q)) \circ Dr(q)$$

άρα η $D\bar{r}(q)$ είναι 1-1 ως σύνθεση απεικονίσεων 1-1.

Επίσης, επειδή $W \subseteq S$ ανοιχτό, θα είναι $W = S \cap A$, για κάποιο $A \subseteq \mathbb{R}^3$ ανοιχτό. Επομένως,

$$\bar{W} = \bar{r}(U) = f(W) = f(S \cap A) = f(S) \cap f(A) = \bar{S} \cap f(A),$$

που είναι επίσης ανοιχτό υποσύνολο της \bar{S} , αφού το $f(A)$ είναι ανοιχτό υποσύνολο του \mathbb{R}^3 (λόγω της υπόθεσης ότι η f είναι αμφιδιαφόριση, άρα ομοιομορφισμός).

Συνεπώς, βρήκαμε ότι, για κάθε $\bar{p} \in \bar{S}$, υπάρχει παραμέτρηση $(\bar{U}, \bar{r}, \bar{W})$ με $\bar{p} \in \bar{W}$ και $\bar{W} \subseteq \bar{S}$ ανοιχτό. Αν τώρα θεωρήσουμε όλες τις παραμετρήσεις (U_i, r_i, W_i) , $i \in I$, της S και τις αντίστοιχες $(\bar{U}_i, \bar{r}_i, \bar{W}_i)$ του \bar{S} , λόγω της κάλυψης

$$S = \bigcup_{i \in I} W_i,$$

έχουμε και την κάλυψη

$$\bar{S} = f(S) = f\left(\bigcup_{i \in I} W_i\right) = \bigcup_{i \in I} f(W_i) = \bigcup_{i \in I} \bar{W}_i,$$

με την οποίαν αποδεικνύεται πλήρως ότι το \bar{S} είναι πραγματικά μία κανονική επιφάνεια.

Άσκηση 9. Αν S είναι ο τετραγωνικός κώνος του Παραδείγματος 5(στ), Παράγραφος 2.2, είναι το σύνολο $\bar{S} = S \cup (0, 0, 0)$ κανονική επιφάνεια;

Λύση. Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει παραμέτρηση (U, r, W) του \bar{S} , με $(0, 0, 0) \in W$. Αν $q_o := r^{-1}((0, 0, 0)) \in U$, θα υπήρχε και (ανοιχτός) δίσκος $D(q_o, \varepsilon) \subseteq U$. Λόγω του ότι το W είναι ανοιχτό υποσύνολο του \bar{S} και η r ομοιομορφισμός, η εικόνα $A = r(D(q_o, \varepsilon))$ θα είναι επίσης ανοιχτό υποσύνολο του W και του \bar{S} . Επομένως τα σύνολα $D(q_o, \varepsilon) \setminus \{q_o\}$ και $A \setminus \{0\}$ θα ήσαν ομοιομορφικά,

πράγμα που είναι άτοπο, γιατί το πρώτο έχει μόνον μια συνεκτική συνιστώσα ενώ το δεύτερο δύο.

Άσκηση 10. Να αποδειχθεί ότι η απεικόνιση

$$f: S^2 \longrightarrow S^2: (x, y, z) \mapsto (-x, -y, -z)$$

είναι αμφιδιαφόριση.

Λύση. Παρατηρούμε ότι η f είναι 1-1 και επί με $f^{-1} = f$. Άρα αρκεί να δείξουμε ότι η f είναι διαφορίσιμη.

Α' Τρόπος: Έστω $p_o := (x_o, y_o, z_o) \in S^2$. Είναι $(x_o, y_o, z_o) \neq (0, 0, 0)$, άρα κάποια συντεταγμένη είναι μη μηδενική. Έστω ότι $x_o \neq 0$, και ιδιαίτερα $x_o > 0$. Τότε το p_o ανήκει στην εικόνα της παραμέτρησης $(D(0, 1), r_x^+, S_x^+)$, ενώ $f(S_x^+) = S_x^-$. Η τοπική παράσταση της f μέσω των παραμετρήσεων $(D(0, 1), r_x^+, S_x^+)$ και $(D(0, 1), r_x^-, S_x^-)$ είναι η

$$\begin{aligned} [(r_x^-)^{-1} \circ f \circ r_x^+](u, v) &= [(r_x^-)^{-1} \circ f](\sqrt{1 - u^2 - v^2}, u, v) \\ &= (r_x^-)^{-1}(-\sqrt{1 - u^2 - v^2}, -u, -v) \\ &= (-u, -v) \end{aligned}$$

που είναι διαφορίσιμη (σ' ολόκληρο το $D(0, 1)$), άρα και στο $(r_x^+)^{-1}(p_o)$. Επομένως, κατά το Θεώρημα 2.5.7, η f είναι διαφορίσιμη στο p_o . Παρόμοια ελέγχεται η διαφορισιμότητα της f σε κάθε άλλο σημείο της S^2 .

Β' Τρόπος: Έστω το σημείο $p_o \in S^2$ και η παραμέτρηση $(D(0, 1), r_x^+, S_x^+)$, όπως πριν. Αν θεωρήσουμε την f ως απεικόνιση της μορφής $f: S^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, παρατηρούμε ότι η

$$\begin{aligned} (f \circ r_x^+)(u, v) &:= f(\sqrt{1 - u^2 - v^2}, u, v) \\ &= (-\sqrt{1 - u^2 - v^2}, -u, -v) \end{aligned}$$

είναι διαφορίσιμη. Επομένως, κατά τον Ορισμό 2.5.1, η f είναι διαφορίσιμη στο p_o .

Γ Τρόπος: Η f είναι περιορισμός (επί της S^2) της διαφορίσιμης απεικόνισης

$$F: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3: (x, y, z) \mapsto (-x, -y, -z).$$

Συνεπώς, κατά την Πρόταση 2.5.5, η f είναι επίσης διαφορίσιμη.

Άσκηση 11. Με τις υποθέσεις της Άσκησης 8, να αποδειχθεί ότι η απεικόνιση $f|_S: S \rightarrow \bar{S}$ είναι αμφιδιαφόριση.

Λύση. Μπορούμε να εφαρμόσουμε και τους τρεις τρόπους της προηγούμενης άσκησης. Ο απλούστερος είναι ο τρίτος: Η $f|_S$ είναι διαφορίσιμη ως περιορισμός (επί της S) της διαφορίσιμης $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$. Παρόμοια έχουμε ότι και η $(f|_S)^{-1}$ είναι διαφορίσιμη.

Άσκηση 12. Να κατασκευαστεί μία αμφιδιαφόριση μεταξύ του ελλειψοειδούς (βλ. Παράδειγμα 5(a), Παράγραφος 2.2) και της μοναδιαίας σφαίρας με κέντρο το 0.

Λύση. Θεωρούμε την απεικόνιση

$$F: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3: (x, y, z) \mapsto \left(\frac{x}{a}, \frac{y}{b}, \frac{z}{c} \right),$$

η οποία είναι, προφανώς, αμφιδιαφόριση, με αντίστροφη την

$$F^{-1}: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3: (x, y, z) \mapsto (ax, by, cz).$$

Αν συμβολίσουμε με S την επιφάνεια του ελλειψοειδούς, με στοιχειώδεις υπολογισμούς διαπιστώνουμε ότι $F(S) \subseteq S^2$ και $F^{-1}(S^2) \subseteq S$. Επομένως, η απεικόνιση $f := F|_S: S \rightarrow S^2$ είναι αμφιδιαφόριση (βλ. Πρόταση 2.5.5).

Φυσικά, μπορούμε να ελέγξουμε τη διαφορίσιμότητα της f (και παρόμοια αυτήν της f^{-1}) χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 2.5.7: Αν θεωρήσουμε ένα $p \in S$ και υποθέσουμε, για παράδειγμα, ότι $p \in W$, όπου (U, χ, W) είναι η παραμέτρηση του ελλειψοειδούς (βλ. και Άσκηση 2) με

$$\chi(u, v) = \left(u, v, +c\sqrt{1 - \frac{u^2}{a^2} - \frac{v^2}{b^2}} \right),$$

$$U = \left\{ (u, v) \in \mathbb{R}^2 : 1 - \sqrt{1 - \frac{u^2}{a^2} - \frac{v^2}{b^2}} > 0 \right\},$$

μπορούμε να πάρουμε και την παραμέτρηση $(D(0, 1), r_z^+, S_z^+)$ της μοναδιαίας σφαίρας, οπότε $f(U) \subseteq S_z^+$ και η αντίστοιχη τοπική παράσταση

$$(r_z^+)^{-1} \circ f \circ \chi: U \longrightarrow D(0, 1): (u, v) \mapsto \left(\frac{u}{a}, \frac{v}{b} \right)$$

είναι διαφορίσιμη.

Ανάλογα, μπορούμε να εφαρμόσουμε και τον Ορισμό 2.5.1.

Άσκηση 13. Να δικαιολογηθεί γιατί το ελλειπτικό παραβολοειδές, που καθορίζεται από την εξίσωση $z = x^2 + y^2$, είναι αμφιδιαφορικό με ένα επίπεδο.

Λύση. Ολόκληρο το παραβολοειδές αυτό καλύπτεται από την παραμέτρηση Monge

$$r(u, v) = (u, v, u^2 + v^2), \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2.$$

Επομένως, σύμφωνα με την Παρατήρηση 2.5.8(3), το δοθέν παραβολοειδές είναι αμφιδιαφορικό με το \mathbb{R}^2 .

Άσκηση 14. Δίνεται κανονική επιφάνεια S και δύο συστήματα συντεταγμένων (παραμετρήσεις) (U, r, W) , $(\bar{U}, \bar{r}, \bar{W})$ της S με $W \cap \bar{W} \neq \emptyset$. Να υπολογιστούν οι απεικονίσεις \bar{r}_u, \bar{r}_v μέσω των r_u και r_v .

Λύση. Γνωρίζουμε ήδη ότι η αλλαγή των συντεταγμένων

$$r^{-1} \circ \bar{r}: \bar{r}^{-1}(W \cap \bar{W}) \longrightarrow r^{-1}(W \cap \bar{W})$$

είναι αμφιδιαφόριση (βλ. Θεώρημα 2.2.3). Η τελευταία μπορεί να γραφτεί με την μορφή

$$(r^{-1} \circ \bar{r})(\bar{u}, \bar{v}) = (u(\bar{u}, \bar{v}), v(\bar{u}, \bar{v})), \quad (\bar{u}, \bar{v}) \in \bar{r}^{-1}(W \cap \bar{W}).$$

Επομένως, για τυχόν $\bar{q} \in \bar{r}^{-1}(W \cap \bar{W})$, θέτοντας $q = (r^{-1} \circ \bar{r})(\bar{q})$, έχουμε διαδοχικά:

$$\begin{aligned} \bar{r}_u(\bar{q}) &= D\bar{r}(\bar{q})(e_1) = [D(r \circ (r^{-1} \circ \bar{r}))(\bar{q})](e_1) \\ &= [Dr(q) \circ D(r^{-1} \circ \bar{r})(\bar{q})](e_1) = Dr(q) \left[\frac{\partial(r^{-1} \circ \bar{r})}{\partial \bar{u}} \Big|_{\bar{q}} \right] \\ &= Dr(q) \left(\frac{\partial u}{\partial \bar{u}} \Big|_{\bar{q}}, \frac{\partial v}{\partial \bar{u}} \Big|_{\bar{q}} \right) = Dr(q) \left(\frac{\partial u}{\partial \bar{u}} \Big|_{\bar{q}} \cdot e_1 + \frac{\partial v}{\partial \bar{u}} \Big|_{\bar{q}} \cdot e_2 \right) \\ &= \frac{\partial u}{\partial \bar{u}} \Big|_{\bar{q}} Dr(q)(e_1) + \frac{\partial v}{\partial \bar{u}} \Big|_{\bar{q}} Dr(q)(e_2) = \frac{\partial u}{\partial \bar{u}} \Big|_{\bar{q}} r_u(q) + \frac{\partial v}{\partial \bar{u}} \Big|_{\bar{q}} r_v(q), \end{aligned}$$

δηλαδή, καταλήγουμε στη σχέση

$$\bar{r}_u(\bar{q}) = \frac{\partial u}{\partial \bar{u}} \Big|_{\bar{q}} r_u(q) + \frac{\partial v}{\partial \bar{u}} \Big|_{\bar{q}} r_v(q),$$

και ανάλογα στην

$$\bar{r}_v(\bar{q}) = \frac{\partial u}{\partial \bar{v}} \Big|_{\bar{q}} r_u(q) + \frac{\partial v}{\partial \bar{v}} \Big|_{\bar{q}} r_v(q).$$

Άσκηση 15. Να αποδειχθεί ότι σε κάθε σημείο μιας γενέτειρας του κυλίνδρου το εφαπτόμενο επίπεδο μένει σταθερό.

Λύση. Θεωρούμε την παραμέτρηση του κυλίνδρου K

$$r(u, v) = (\cos u, \sin u, v); \quad u \in (0, 2\pi), \quad v \in \mathbb{R}.$$

Μια **γενέτειρα** είναι το σύνολο των σημείων

$$\Gamma = \{r(u_0, v) : v \in \mathbb{R}\},$$

για ένα σταθερό u_o . Επειδή $T_p K \perp r_u(q) \times r_v(q)$, όπου $q = r^{-1}(p)$, για να δείξουμε ότι το $T_p K$ παραμένει σταθερό όταν το $p = r(u_o, v)$ διατρέχει το Γ , αρκεί να δείξουμε ότι $r_u(q) \times r_v(q)$ παραμένει σταθερό. Επειδή

$$r_u(u_o, v) = (-\sin u_o, \cos u_o, 0), \quad r_v(u_o, v) = (0, 0, 1),$$

προκύπτει ότι το

$$r_u(q) \times r_v(q) = (\cos u_o, \sin u_o, 0)$$

είναι ανεξάρτητο του v .

Άσκηση 16. Εστω ότι η ισότητα $f(x, y, z) = c$ ορίζει επιφάνεια S (βλ. Θεώρημα 2.2.1), $p \in S$ και $w = (w_1, w_2, w_3) \in T_p S \subseteq \mathbb{R}^3$. Να αποδειχθεί ότι

$$w_1 \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_p + w_2 \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_p + w_3 \left. \frac{\partial f}{\partial z} \right|_p = 0.$$

Λύση. Έστω $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$ διαφορίσιμη καμπύλη με τιμές στην S και $\alpha'(0) = w$. Τότε

$$\begin{aligned} f \circ \alpha = c &\Rightarrow (f \circ \alpha)'(0) = 0 \\ &\Rightarrow [D(f \circ \alpha)(0)](1) = 0 \\ &\Rightarrow [Df(\alpha(0)) \circ D\alpha(0)](1) = 0 \\ &\Rightarrow [Df(\alpha(0))](\alpha'(0)) = 0 \\ &\Rightarrow Df(p)(w_1, w_2, w_3) = 0 \\ &\Rightarrow (J_p f) \cdot \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = 0 \\ &\Rightarrow w_1 \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_p + w_2 \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_p + w_3 \left. \frac{\partial f}{\partial z} \right|_p = 0. \end{aligned}$$

Άσκηση 17. Να βρεθούν οι καρτεσιανές εξισώσεις του εφαπτομένου χώρου και του εφαπτομένου επιπέδου μιας επιφάνειας S σε ένα σημείο της p .

Λύση. Έστω (U, r, W) ένα σύστημα συντεταγμένων της S με $p \in W$ και $q = r^{-1}(p) \in U$. Εφ' όσον ο εφαπτόμενος χώρος $T_p S$ παράγεται από τα $r_u(q)$, $r_v(q)$ και $r_u(q) \times r_v(q) \perp T_p S$, τότε, για κάθε $(x, y, z) \in T_p S$, είναι

$$\langle (x, y, z), r_u(q) \times r_v(q) \rangle = 0,$$

που είναι η καρτεσιανή εξίσωση του $T_p S$.

Ανάλογα, αν $E_p = p + T_p S$ είναι το εφαπτόμενο επίπεδο στο p , τότε, για κάθε $(x, y, z) \in E_p$, είναι $(x, y, z) - p \in T_p S$, άρα η καρτεσιανή εξίσωση του εφαπτομένου επιπέδου στο p είναι η

$$\langle (x, y, z) - p, r_u(q) \times r_v(q) \rangle = 0.$$

Άσκηση 18. Να βρεθεί η καρτεσιανή εξίσωση του εφαπτόμενου χώρου και του εφαπτομένου επιπέδου στο σημείο $p = (1, 2, 5)$ της παραμετρημένης επιφάνειας $\chi(u, v) = (u, v, u^2 + v^2)$, με $(u, v) \in \mathbb{R}^2$.

Λύση. Α' Τρόπος. Εφαρμογή της προηγούμενης άσκησης:

Θεωρούμε το σημείο $q = \chi^{-1}(p) = (1, 2)$. Τότε

$$\begin{aligned}\chi_u(q) &= (1, 0, 2), & \chi_v(q) &= (0, 1, 4), \\ \chi_u(q) \times \chi_v(q) &= (-2, -4, 1),\end{aligned}$$

Τα σημεία (x, y, z) του εφαπτομένου χώρου θα ικανοποιούν την (γενική) εξίσωση

$$\langle (x, y, z), \chi_u(q) \times \chi_v(q) \rangle = 0,$$

που τώρα παίρνει την μορφή

$$\langle (x, y, z), (-2, -4, 1) \rangle = 0,$$

από την οποία προκύπτει η ζητούμενη εξίσωση $2x + 4y - z = 0$.

Απ' το άλλο μέρος, τα σημεία (x, y, z) του εφαπτομένου επιπέδου θα ικανοποιούν την

$$\langle (x, y, z) - (1, 2, 5), (-2, -4, 1) \rangle = 0,$$

ή, ισοδύναμα,

$$\langle (x - 1, y - 2, z - 5), (-2, -4, 1) \rangle = 0,$$

από την οποία προκύπτει η εξίσωση του επιπέδου $2x + 4y - z = 5$.

Β' Τρόπος: Σύμφωνα με τον ορισμό,

$$\begin{aligned}T_p S &= \{\lambda \chi_u(q) + \mu \chi_v(q) \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\} \\ &= \{\lambda(1, 0, 2) + \mu(0, 1, 4) \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(\lambda, \mu, 2\lambda + 4\mu) \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}.\end{aligned}$$

Για τυχόν $(x, y, z) \in T_p S$, υπάρχουν $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, τέτοια ώστε $(x, y, z) = (\lambda, \mu, 2\lambda + 4\mu)$, από την οποία βρίσκουμε ότι

$$x = \lambda, \quad y = \mu, \quad z = 2\lambda + 4\mu.$$

Αντικαθιστώντας στην τελευταία τις τιμές των λ και μ , καταλήγουμε στην εξίσωση του εφαπτόμενου χώρου $z = 2x + 4y$, που φυσικά είναι αυτή που βρέθηκε και με τον Α' τρόπο.

Ανάλογα, το εφαπτόμενο επίπεδο έχει την μορφή

$$\begin{aligned} E_p &= p + T_p S = (1, 2, 5) + \{(\lambda, \mu, 2\lambda + 4\mu) \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(1 + \lambda, 2 + \mu, 5 + 2\lambda + 4\mu) \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Επομένως, τυχόν $(x, y, z) \in E_p$ θα έχει την μορφή

$$(x, y, z) = (1 + \lambda, 2 + \mu, 5 + 2\lambda + 4\mu),$$

απ' όπου

$$x = 1 + \lambda, \quad y = 2 + \mu, \quad z = 5 + 2\lambda + 4\mu,$$

άρα, απαλοφώντας τα λ και μ βρίσκουμε την εξίσωση του εφαπτομένου επιπέδου $z = 2x + 4y - 5$.

Άσκηση 19. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ διαφορίσιμη απεικόνιση και Γ_f το αντίστοιχο γράφημά της. (α) Να βρεθεί ο εφαπτόμενος χώρος και το εφαπτόμενο επίπεδο του γραφήματος στο σημείο $p = (a, b, c)$. (β) Να βρεθούν οι καρτεσιανές εξισώσεις των προηγούμενων. (γ) Να βρεθεί η ικανή και αναγκαία συνθήκη προκειμένου ένα $w = (w_1, w_2, w_3) \in \mathbb{R}^3$ να ανήκει στον εφαπτόμενο χώρο ή στο εφαπτόμενο επίπεδο στο σημείο p .

Λύση. (α) Όπως έχουμε δει στο Παράδειγμα 4 της Παραγράφου 2.2, το γράφημα καλύπτεται από την μοναδική παραμέτρηση

$$r(u, v) = (u, v, f(u, v)), \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2,$$

για την οποίαν βρίσκουμε ότι

$$r_u = (1, 0, f_u), \quad r_v = (0, 1, f_v), \quad r_u \times r_v = (-f_u, -f_v, 1).$$

Επομένως, για $p = (a, b, c)$ και $q = r^{-1}(p) = (a, b)$, είναι:

$$\begin{aligned} T_{(a,b,c)}\Gamma_f &= \{\lambda(1, 0, f_u(a, b)) + \mu(0, 1, f_v(a, b)) \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(\lambda, \mu, \lambda f_u(a, b) + \mu f_v(a, b)) \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Απ' το άλλο μέρος, επειδή $(a, b, c) \in \Gamma_f \Rightarrow c = f(a, b)$,

$$\begin{aligned} E_{(a,b,c)}\Gamma_f &= (a, b, f(a, b)) + \{(\lambda, \mu, \lambda f_u(a, b) + \mu f_v(a, b)) \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(a + \lambda, b + \mu, f(a, b) + \lambda f_u(a, b) + \mu f_v(a, b)) \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

(β) Η εξίσωση του εφαπτομένου χώρου στο p είναι η

$$\langle (x, y, z), (-f_u(a, b), -f_v(a, b), 1) \rangle = 0,$$

ή, ισοδύναμα,

$$f_u(a, b)x + f_v(a, b)y = z.$$

Ανάλογα, η εξίσωση του εφαπτομένου επιπέδου στο p είναι η

$$\langle (x, y, z) - (a, b, f(a, b)), (-f_u(a, b), -f_v(a, b), 1) \rangle = 0,$$

ή, ισοδύναμα,

$$z = f(a, b) + (x - a)f_u(a, b) + (y - b)f_v(a, b).$$

(γ) Από τις εξισώσεις του εφαπτομένου χώρου και του εφαπτομένου επιπέδου, έχουμε αντιστοίχως:

$$w \in T_{(a,b,c)}\Gamma_f \Leftrightarrow w_3 = w_1 f_u(a, b) + w_2 f_v(a, b),$$

$$w \in E_{(a,b,c)}\Gamma_f \Leftrightarrow w_3 = f(a, b) + (w_1 - a)f_u(a, b) + (w_2 - b)f_v(a, b).$$

Άσκηση 20. Να βρεθεί η μορφή και η καρτεσιανή εξίσωση του εφαπτομένου επιπέδου $E_p S$ της επιφάνειας S που ορίζει η παραμέτρηση

$$\chi(u, v) = ((u + v), (u - v), uv); \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2,$$

όταν $p = (0, 2, -1)$.

Λύση. Το σημείο $q \in \mathbb{R}$ με $\chi(q) = p$ είναι το $q = (1, -1)$. Επομένως έχουμε:

$$\chi_u(q) = (1, 1, -1), \quad \chi_v(q) = (1, -1, 1), \quad \chi_u(q) \times \chi_v(q) = (0, -2, -2),$$

$$E_p S = (0, 2, -1) + \{\lambda(1, 1, -1) + \mu(1, -1, 1) \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$$

$$= \{(\lambda + \mu, \lambda - \mu + 2, -\lambda + \mu - 1) \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$$

Απ' το άλλο μέρος

$$(x, y, z) \in E_p S \Leftrightarrow \begin{cases} \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R} : \\ (x, y, z) = (\lambda + \mu, \lambda - \mu + 2, -\lambda + \mu - 1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow y + z = 1.$$

Στην τελευταία εξίσωση καταλήγουμε βέβαια και από την

$$\langle (x, y, z) - (0, 2, -1), (0, -2, -2) \rangle = 0.$$

Άσκηση 21. Υποθέτουμε ότι (U, r, W) , $(\bar{U}, \bar{r}, \bar{W})$ είναι παραμετρήσεις μιας κανονικής επιφάνειας S και $p \in W \cap \bar{W}$ (βλ. σχετικά και την Άσκηση 14 με τους συμβολισμούς της). Αν ένα $w \in T_p S$ δίνεται από τους γραμμικούς συνδυασμούς

$$(1) \quad w = \lambda r_u(q) + \mu r_v(q),$$

$$(2) \quad w = \bar{\lambda} \bar{r}_u(\bar{q}) + \bar{\mu} \bar{r}_v(\bar{q}),$$

να εκφραστούν οι συντελεστές \bar{w}_1, \bar{w}_2 μέσω των w_1, w_2 .

Λύση. Ακολουθώντας την διαδικασία της Άσκησης 14, βρίσκουμε και τους ανάλογους τύπους

$$(3) \quad r_u(q) = \left. \frac{\partial \bar{u}}{\partial u} \right|_q \bar{r}_u(\bar{q}) + \left. \frac{\partial \bar{v}}{\partial u} \right|_q \bar{r}_v(\bar{q}),$$

$$(4) \quad r_v(q) = \left. \frac{\partial \bar{u}}{\partial v} \right|_q \bar{r}_u(\bar{q}) + \left. \frac{\partial \bar{v}}{\partial v} \right|_q \bar{r}_v(\bar{q}).$$

Επομένως, μέσω των (3) και (4), το δεύτερο μέλος της (1) μετασχηματίζεται ως εξής:

$$\begin{aligned} \lambda r_u(q) + \mu r_v(q) &= \lambda \left[\left. \frac{\partial \bar{u}}{\partial u} \right|_q \bar{r}_u(\bar{q}) + \left. \frac{\partial \bar{v}}{\partial u} \right|_q \bar{r}_v(\bar{q}) \right] \\ &= \lambda \left. \frac{\partial \bar{u}}{\partial u} \right|_q \bar{r}_u(\bar{q}) + \lambda \left. \frac{\partial \bar{v}}{\partial u} \right|_q \bar{r}_v(\bar{q}) \\ &+ \mu \left. \frac{\partial \bar{u}}{\partial v} \right|_q \bar{r}_u(\bar{q}) + \mu \left. \frac{\partial \bar{v}}{\partial v} \right|_q \bar{r}_v(\bar{q}) \\ &= \left[\lambda \left. \frac{\partial \bar{u}}{\partial u} \right|_q + \mu \left. \frac{\partial \bar{u}}{\partial v} \right|_q \right] \bar{r}_u(\bar{q}) \\ &+ \left[\lambda \left. \frac{\partial \bar{v}}{\partial u} \right|_q + \mu \left. \frac{\partial \bar{v}}{\partial v} \right|_q \right] \bar{r}_v(\bar{q}). \end{aligned}$$

Συγκρίνοντας την τελευταία με την (2) καταλήγουμε στις

$$\begin{aligned} \bar{\lambda} &= \lambda \left. \frac{\partial \bar{u}}{\partial u} \right|_q + \mu \left. \frac{\partial \bar{u}}{\partial v} \right|_q, \\ \bar{\mu} &= \lambda \left. \frac{\partial \bar{v}}{\partial u} \right|_q + \mu \left. \frac{\partial \bar{v}}{\partial v} \right|_q. \end{aligned}$$

Άσκηση 22. Με τις υποθέσεις και τους συμβολισμούς των Ασκήσεων 14 και 21, να βρεθεί ο πίνακας της αλλαγής των βάσεων $\{r_u, r_v\}$ και $\{\bar{r}_u, \bar{r}_v\}$.

Λύση. Από τις (3) και (4) της Άσκησης 21 προκύπτει ότι ο πίνακας της αλλαγής των βάσεων είναι ο

$$A = \begin{pmatrix} \left. \frac{\partial \bar{u}}{\partial u} \right|_q & \left. \frac{\partial \bar{u}}{\partial v} \right|_q \\ \left. \frac{\partial \bar{v}}{\partial u} \right|_q & \left. \frac{\partial \bar{v}}{\partial v} \right|_q \end{pmatrix}.$$

Επειδή η απεικόνιση αλλαγής συντεταγμένων

$$\bar{r}^{-1} \circ r: r(W \cap \bar{W}) \longrightarrow \bar{r}(W \cap \bar{W}),$$

γράφεται με την μορφή

$$(u, v) \longmapsto (\bar{u}(u, v), \bar{v}(u, v)),$$

προκύπτει ότι

$$A = J_q(\bar{r}^{-1} \circ r).$$

Άσκηση 23. Να βρεθούν: (α) το διαφορικό μιας σταθερής απεικόνισης $f = c: S_1 \rightarrow S_2$, και (β) το διαφορικό της ταυτοτικής απεικόνισης $id_S: S \rightarrow S$, σε τυχόν σημείο του πεδίου ορισμού τους.

Λύση. Α' Τρόπος: (α) Θεωρούμε την σταθερή απεικόνιση $c: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$. Επειδή $f = c|_{S_1}$, σύμφωνα με την Πρόταση 2.7.6, θα είναι (για οποιοδήποτε $p \in S_1$)

$$d_p f = Dc(p)|_{T_p S_1} = 0.$$

(β) Παρόμοια

$$d_p id_S = D id_{\mathbb{R}^3}(p)|_{T_p S} = id_{\mathbb{R}^3}|_{T_p S} = id_{T_p S}.$$

Β' Τρόπος: (α) Αν $u \in T_p S_1$ είναι τυχόν εφαπτόμενο διάνυσμα με $u = \alpha'(0)$, για μια διαφορίσιμη καμπύλη $\alpha: (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow S_1$ με $\alpha(0) = p$, σύμφωνα με τον ορισμό του διαφορικού θα είναι

$$d_p f(u) = (f \circ \alpha)'(0) = (c \circ \alpha)'(0) = c'(0) = 0,$$

άρα $d_p f = 0$.

(β) Ανάλογα,

$$d_p id_S(u) = (id_S \circ \alpha)'(0) = \alpha'(0) = u,$$

άρα $d_p id_S = id|_{T_p S}$.

Άσκηση 24. Αν $f: S_1 \rightarrow S_2$ είναι αμφιδιαφόριση, τότε για κάθε $p \in S_1$ ισχύει η σχέση

$$(1) \quad d_{f(p)} f^{-1} = (d_p f)^{-1}.$$

Λύση. Θεωρούμε τις σχέσεις

$$f^{-1} \circ f = id_{S_1}, \quad \text{και} \quad f \circ f^{-1} = id_{S_2}.$$

Παίρνοντας τα διαφορικά τους και εφαρμόζοντας τον Κανόνα της Αλυσίδας, έχουμε:

$$(2) \quad \begin{aligned} d_p(f^{-1} \circ f) &= d_p(id_{S_1}), \\ \Rightarrow d_{f(p)}f^{-1} \circ d_p f &= id_{T_p S_1}, \end{aligned}$$

και ανάλογα

$$(3) \quad \begin{aligned} d_{f(p)}(f \circ f^{-1}) &= d_p(id_{S_2}), \\ \Rightarrow d_p f \circ d_{f(p)}f^{-1} &= id_{T_p S_2}. \end{aligned}$$

Οι (2) και (3) οδηγούν στην προς απόδειξη (1).

Άσκηση 25. Να υπολογισθεί το διαφορικό της απεικόνισης (βλ. Άσκηση 10)

$$S^2 \ni (x, y, z) \longmapsto (-x, -y, -z) \in S^2$$

στο σημείο $p_o = (1, 0, 0)$.

Λύση. Α' Τρόπος: Όπως στην Άσκηση 10 (Α' Τρόπος), θεωρούμε τις παραμετρήσεις

$$(D(0, 1), r_x^+, S_x^+) \quad \text{και} \quad (D(0, 1), r_x^-, S_x^-),$$

μέσω των οποίων ορίζεται η τοπική παράσταση

$$\bar{f} = (r_x^-)^{-1} \circ f \circ r_x^+ : D(0, 1) \longmapsto D(0, 1) : (u, v) \mapsto (-u, -v)$$

της f . Επίσης, παρατηρούμε ότι τώρα

$$q_0 = (r_x^+)^{-1}(p_o) = (0, 0), \quad \bar{q}_0 = (r_x^-)^{-1}(f(p_o)) = (0, 0).$$

Επομένως, βάσει του Θεωρήματος 2.7.4 και της Παρατήρησης 2.7.5, για κάθε

$$w = \lambda \cdot (r_x^+)_u(0, 0) + \mu \cdot (r_x^+)_v(0, 0) \equiv (\lambda, \mu) \in T_{p_o} S^2,$$

έχουμε:

$$\begin{aligned} d_{p_o} f(w) &= J_{q_0}((r_x^-)^{-1} \circ f \circ r_x^+) \cdot \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} \\ &= (-\lambda, -\mu) \equiv -\lambda(r_x^-)_u(0, 0) - \mu(r_x^-)_v(0, 0) \in T_{-p_o} S^2. \end{aligned}$$

Β' Τρόπος: Όπως στον Γ Τρόπος της Άσκησης 10, θεωρούμε την διαφορίσιμη απεικόνιση

$$F: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 : (x, y, z) \mapsto (-x, -y, -z),$$

οπότε $f = F|_{S^2}$. Συνεπώς, κατά την Πρόταση 2.7.6, είναι:

$$d_{p_0}f(w) = DF(p_0)(w) = -DId_{\mathbb{R}^3}(w) = -w \in T_{-p_0}S^2.$$

Άσκηση 26. Να υπολογιστεί το διαφορικό στο σημείο $p = (0, 0, c)$ της αμφιδιαφόρισης μεταξύ του ελλειψοειδούς S και της μοναδιαίας σφαίρας S^2 , που κατασκευάστηκε στην Άσκηση 12. Επίσης, να βρεθεί το διαφορικό της αντίστροφης συνάρτησης στο $f(p)$.

Λύση. Α' Τρόπος: Μπορούμε να πάρουμε την τοπική παράσταση

$$\bar{f} = (r_z^+)^{-1} \circ f \circ \chi: U \longrightarrow D(0, 1): (u, v) \mapsto \left(\frac{u}{a}, \frac{v}{b}\right).$$

Επομένως, για οποιοδήποτε $w = \lambda \cdot \chi_u(0, 0) + \mu \cdot \chi_v(0, 0) \equiv (\lambda, \mu) \in T_p S$, είναι:

$$\begin{aligned} d_p f(w) &= (J_q \bar{f}) \cdot \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/a & 0 \\ 0 & 1/b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} \\ &= \left(\frac{\lambda}{a}, \frac{\mu}{b}\right) \equiv \frac{\lambda}{a} \cdot (r_z^+)_u(0, 0) + \frac{\mu}{b} \cdot (r_z^+)_v(0, 0) \in T_N S^2, \end{aligned}$$

όπου το N είναι ο βόρειος πόλος της S^2 .

Β' Τρόπος: Θεωρούμε την αμφιδιαφόριση

$$F: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3: (x, y, z) \mapsto \left(\frac{x}{a}, \frac{y}{b}, \frac{z}{c}\right),$$

οπότε $f := F|_S: S \rightarrow S^2$. Άρα, κατά την Πρόταση 2.7.6,

$$d_p f(w) = DF(p)(w).$$

▽ Όμως εδώ χρειάζεται ιδιαίτερη ΠΡΟΣΟΧΗ! Για να υπολογίσουμε την τελευταία παράγωγο, θα πρέπει να θεωρήσουμε το w ως διάνυσμα του \mathbb{R}^3 , αφού $DF(p): \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$.

Έτσι, αν θέσουμε $w = (w_1, w_2, w_3) \in \mathbb{R}^3$, βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned} d_p f(w) &= DF(p)(w) = (J_p F) \cdot (w_1, w_2, w_3)^t \\ &= \begin{pmatrix} 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 1/b & 0 \\ 0 & 0 & 1/c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \\ &= \left(\frac{w_1}{a}, \frac{w_2}{b}, \frac{w_3}{c}\right). \end{aligned}$$

Θα εκφράσουμε τώρα τα w_1, w_2, w_3 μέσω των λ, μ . Πριν απ' αυτό βρίσκουμε τα βασικά εφαπτόμενα διανύσματα του ελλειψοειδούς στο p , ως προς την επιλεγείσα παραμέτρηση (U, χ) . Συγκεκριμένα έχουμε:

$$\chi_u(0, 0) = (1, 0, 0), \quad \chi_v(0, 0) = (0, 1, 0).$$

Επομένως,

$$\begin{aligned} (w_1, w_2, w_3) &= \lambda \chi_u(0, 0) + \mu \chi_v(0, 0) \\ &= \lambda(1, 0, 0) + \mu(0, 1, 0) \\ &= (\lambda, \mu, 0), \end{aligned}$$

μέσω της οποίας η παραπάνω έκφραση του διαφορικού μετασχηματίζεται στη σχέση

$$d_p f(w) = \left(\frac{w_1}{a}, \frac{w_2}{b}, \frac{w_3}{c} \right) = \left(\frac{\lambda}{a}, \frac{\mu}{b}, 0 \right),$$

που είναι η έκφραση του $d_p f(w)$ ως διανύσματος του \mathbb{R}^3 .

Άσκηση 27. Αν $f: S \rightarrow \bar{S}$ είναι διαφορίσιμη απεικόνιση και (U, r, W) ένα σύστημα συντεταγμένων της S στο p_o , να αποδειχθούν οι σχέσεις

$$d_{p_o} f(r_u(q_o)) = \frac{\partial(f \circ r)}{\partial u} \Big|_{q_o}, \quad d_{p_o} f(r_v(q_o)) = \frac{\partial(f \circ r)}{\partial v} \Big|_{q_o}.$$

Λύση. Αν θέσουμε $q_o = (u_o, v_o)$, ορίζουμε την διαφορίσιμη καμπύλη

$$\underline{\alpha}: (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow \mathbb{R}^2: t \mapsto \underline{\alpha}(t) = (u_o + t, v_o)$$

[λόγω της συνέχειας της καμπύλης $\underline{\alpha}$ μπορούμε να βρούμε $\epsilon > 0$, έτσι ώστε $\underline{\alpha}((-\epsilon, \epsilon)) \subset U$].

Θέτουμε $\alpha = r \circ \underline{\alpha}$ και $p_o = r(q_o)$. Παρατηρούμε ότι $\alpha(0) = (r \circ \underline{\alpha})(0) = p_o$ και

$$\begin{aligned} \alpha'(0) &= [D(r \circ \underline{\alpha})(0)](1) = [Dr(q_o) \circ D\underline{\alpha}(0)](1) \\ &= Dr(q_o)(\underline{\alpha}'(0)) = Dr(q_o)(1, 0) = \frac{\partial r}{\partial u} \Big|_{q_o} = r_u(q_o). \end{aligned}$$

Η τελευταία σχέση σημαίνει ότι η καμπύλη α υλοποιεί το εφαπτόμενο διάνυσμα $r_u(q_o)$, επομένως

$$\begin{aligned} d_{p_o} f(r_u(q_o)) &= (f \circ \alpha)'(0) = [D((f \circ r) \circ (r^{-1} \circ \alpha))(0)](1) \\ &= [D(f \circ r)(q_o) \circ D\underline{\alpha}(0)](1) \\ &= D(f \circ r)(q_o)(\underline{\alpha}'(0)) = D(f \circ r)(q_o)(1, 0) \\ &= \frac{\partial(f \circ r)}{\partial u} \Big|_{q_o}. \end{aligned}$$

Για την δεύτερη σχέση εργαζόμαστε ανάλογα, χρησιμοποιώντας την καμπύλη $\underline{\beta}(t) = (u_o, v_o + t)$, οπότε το $r_v(q_o)$ υλοποιείται από την καμπύλη $\beta(t) = r(\underline{\beta}(t))$.

Κεφάλαιο 3

Η καμπυλότητα Gauss

3.0 Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό θα μελετήσουμε μία από τις σημαντικότερες γεωμετρικές έννοιες, αυτήν της καμπυλότητας, η οποία περιγράφει –κατά κάποιον τρόπο– το «σχήμα» μιας επιφάνειας, δηλαδή το πόσο «καμπυλώνεται» η επιφάνεια στον χώρο.

Μια πρώτη συστηματική προσέγγιση της καμπυλότητας οφείλεται στον L. Euler και βασίζεται στον υπολογισμό της καμπυλότητας διαφόρων καμπυλών επί μιας επιφάνειας.

Όμως, όπως σε μια καμπύλη, η καμπυλότητα υπολογίζεται μέσω της μεταβολής του πρώτου καθέτου διανύσματος, έτσι και στην περίπτωση μιας επιφάνειας, μπορούμε να προσδιορίσουμε την καμπυλότητά της μέσω της μεταβολής του αντιστοιχίου του καθέτου διανύσματος, δηλαδή του μοναδικού διανύσματος του χώρου, το οποίον είναι κάθετο στον εφαιπόμενο χώρο ενός σημείου της επιφάνειας. Η μέθοδος αυτή οφείλεται στον C. F. Gauss και εκτίθεται στο θεμελιώδες έργο του *Disquisitiones Generales circa Superficies Curvas*, στο οποίον αναφερθήκαμε πολύ σύντομα στην εισαγωγή του Κεφαλαίου 2.

Εδώ δεν θα ακολουθήσουμε την ιστορική εξέλιξη. Πρώτα θα μελετήσουμε την καμπυλότητα με την (μεταγενέστερη) μέθοδο του Gauss, αλλά με πιο σύγχρονο τρόπο, και κατόπιν, για την πληρότητα, θα δούμε και την προσέγγιση του Euler.

3.1 Κάθετα διανύσματα

Υποθέτουμε ότι δίνεται μια κανονική επιφάνεια S και παραμέτρηση (U, r, W) της S στο σημείο p , δηλαδή $p \in W$. Θέτουμε $q = r^{-1}(p)$.

Αν θεωρήσουμε τον εφαπτόμενο χώρο $T_p S$, γνωρίζουμε ότι το

$$r_u(q) \times r_v(q)$$

είναι διάνυσμα του \mathbb{R}^3 , κάθετο προς το επίπεδο των $r_u(q)$ και $r_v(q)$, δηλαδή κάθετο προς τον εφαπτόμενο χώρο $T_p S$ καθώς και στο κάθετο επίπεδο E_p . Υπενθυμίζουμε ότι η φορά του $r_u(q) \times r_v(q)$ είναι τέτοια, ώστε η τριάδα

$$\{r_u(q), r_v(q), r_u(q) \times r_v(q)\}$$

να αποτελεί θετικά προσανατολισμένη βάση του \mathbb{R}^3 .

3.1.1 Ορισμός. Το διάνυσμα

$$N(p) := \frac{r_u(q) \times r_v(q)}{\|r_u(q) \times r_v(q)\|} = \frac{r_u \times r_v}{\|r_u \times r_v\|}(r^{-1}(p))$$

καλείται **μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα της S στο p** (unit normal vector at p). Η ευθεία που διέρχεται από το p και είναι κάθετη στο επίπεδο E_p λέγεται **κάθετη ευθεία στο p** (βλ. και το σχετικό Σχήμα 2.11).

Σύμφωνα με τον προηγούμενο ορισμό, επί του συνόλου $W = r(U)$ ορίζεται μια απεικόνιση

$$N: W \longrightarrow \mathbb{R}^3: p \mapsto N(p) := \frac{r_u \times r_v}{\|r_u \times r_v\|}(r^{-1}(p)),$$

η οποία, επιπλέον, είναι διαφορίσιμη ως σύνθεση διαφορίσιμων απεικονίσεων.

3.1.2 Ορισμός. Κάθε απεικόνιση της μορφής $F: S \rightarrow \mathbb{R}^3$ καλείται **διανυσματικό πεδίο επί της S** (vector field).

Από τον τελευταίο ορισμό συνάγεται ότι η απεικόνιση N είναι ένα *διαφορίσιμο μοναδιαίο κάθετο διανυσματικό πεδίο επί του W* .

Ας θεωρήσουμε τώρα μια παραμέτρηση (U, r, W) της επιφάνειας S και την απεικόνιση **συμμετρίας** (symmetry)

$$\rho: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2: (u, v) \mapsto \rho(u, v) := (v, u).$$

Η ρ είναι γραμμικός ισομορφισμός, επομένως ομοιομορφισμός και αμφιδιαφόριση του επιπέδου στον εαυτό του, με $\rho^{-1} = \rho$, άρα το σύνολο

$$\bar{U} := \rho(U)$$

είναι ανοιχτό υποσύνολο του \mathbb{R}^2 . Ορίζουμε και την απεικόνιση

$$\bar{r} := r \circ \rho|_{\bar{U}}: \bar{U} \longrightarrow W = r(U),$$

που είναι ομοιομορφισμός ως σύνθεση τέτοιων, και διαφορίσιμη με σημειακό διαφορικό τάξης 2, σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της. Άρα η \bar{r} ορίζει μία (2-διάστατη) παραμέτρηση της ίδιας επιφάνειας S . Έστω $p \in W$ και $q = r^{-1}(p)$. Θέτουμε $\bar{q} := \rho(q) = \bar{r}^{-1}(p)$. Για την νέα παραμέτρηση είναι

$$\begin{aligned} \bar{r}_u(\bar{q}) &= [D(r \circ \rho)(\bar{q})](e_1) = [D(r(q)) \circ D(\rho)(\bar{q})](e_1) \\ &= D(r(q))(\rho(e_1)) = D(r(q))(\rho(e_2)) = r_v(q), \end{aligned}$$

και ανάλογα,

$$\begin{aligned} \bar{r}_v(\bar{q}) &= r_u(q), \\ \bar{N}(p) &= r_v(q) \times r_u(q) = -N(p), \end{aligned}$$

άρα το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στο p , που ορίζει η παραμέτρηση $(\bar{U}, \bar{r}, \bar{W})$ είναι αντίθετο του αρχικού $N(p)$.

Από τα προηγούμενα προκύπτει ότι

κάθε παραμέτρηση (U, r, W) ορίζει πάντοτε στην εικόνα $W = r(U)$ ένα διαφορίσιμο μοναδιαίο κάθετο διανυσματικό πεδίο.

Περιφραστικά, ένα τέτοιο πεδίο καθορίζει ποιά πλευρά της επιφάνειας είναι η "πάνω" και ποιά η "κάτω".

Ένα βασικό ερώτημα είναι αν εξασφαλίζεται η ύπαρξη ενός τέτοιου πεδίου ολικά, δηλαδή σε ολόκληρη την επιφάνεια S . Αυτό άλλοτε είναι δυνατόν, όπως στην περίπτωση της σφαίρας, και άλλοτε όχι, όπως στην **ταινία του Möbius** (Möbius band), που απεικονίζεται στο Σχήμα 3.1 της επόμενης σελίδας. Ας δούμε τι συμβαίνει σ' αυτήν την επιφάνεια: αν ξεκινήσουμε από ένα σημείο p της ταινίας και την διατρέξουμε κινούμενοι κυκλικά, διαισθητικά βλέπουμε ότι, επανερχόμενοι στο p , το αρχικό κάθετο διάνυσμα $N(p)$ θα έχει αλλάξει φορά και θα έχει γίνει $-N(p)$. Αυτό σημαίνει ότι δεν υπάρχει ολικό διαφορίσιμο πεδίο N , αφού η συνέχειά του (λόγω διαφορισιμότητας) δεν επιτρέπει αλλαγή του προσήμου. Περιφραστικά, θα λέγαμε ότι σ' αυτήν την επιφάνεια δεν μπορούμε να επιλέξουμε την "πάνω" ή "κάτω" πλευρά της επιφάνειας.

Αν υπάρχει ένα ολικό μοναδιαίο κάθετο διαφορίσιμο διανυσματικό πεδίο

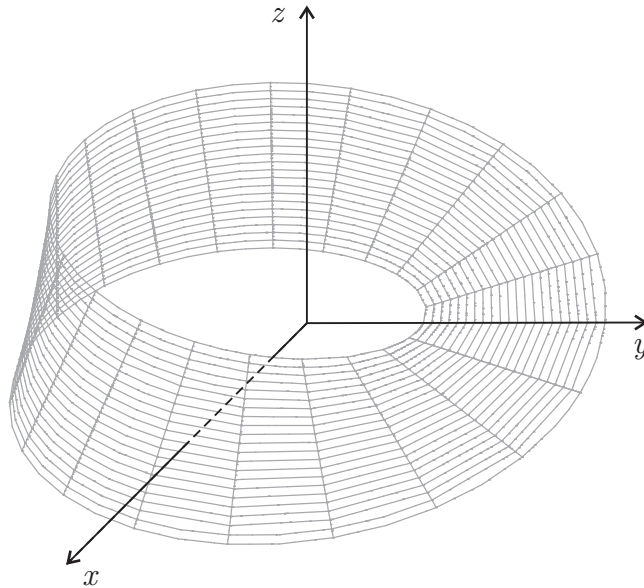
$$N: S \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

λέμε ότι η επιφάνεια S είναι **προσανατολίσιμη** (orientable), και το ολικό πεδίο N είναι ένας **προσανατολισμός** (orientation). Αξίζει να σημειωθεί ότι αν

υπάρχει ένας προσανατολισμός όπως ο ανωτέρω, τότε και η αντίθετη απεικόνιση

$$-N: S \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

είναι επίσης προσανατολισμός της S .



Σχήμα 3.1

3.1.3 Παραδειγμα. Στη μοναδιαία σφαίρα S^2 θεωρούμε την παραμέτρηση $(D(0,1), r_z^+, S_z^+)$ του Παραδείγματος 3, της §2.2. Για κάθε $q = (u, v) \in D(0,1)$ και $p = r_z^+(u, v) = (u, v, \sqrt{1 - u^2 - v^2})$, είναι

$$(r_z^+)_u(q) = \left(1, 0, -\frac{u}{\sqrt{1 - u^2 - v^2}} \right),$$

$$(r_z^+)_v(q) = \left(0, 1, -\frac{v}{\sqrt{1 - u^2 - v^2}} \right),$$

οπότε

$$N(p) = p, \quad p \in S_z^+.$$

Ο προηγούμενος τοπικός προσανατολισμός επεκτείνεται σε μια ολική διαφορίσιμη απεικόνιση

$$N: S^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3: p \mapsto N(p) = p,$$

άρα η S^2 είναι προσανατολίσιμη. Συχνά, για τεχνικούς λόγους, επιλέγουμε τον προσανατολισμό $-N$ της σφαίρας.

ΕΡΩΤΗΣΗ: Ποιόν προσανατολισμό ορίζουν οι άλλες παραμετρήσεις της σφαίρας S^2 ;

3.2 Η πρώτη θεμελιώδης μορφή

Είδαμε ότι ο εφαπτόμενος χώρος $T_p S$ της S στο $p \in S$ είναι ένας γραμμικός χώρος, υπόχωρος του \mathbb{R}^3 , διάστασης 2. Επομένως, ο περιορισμός του συνηθούς εσωτερικού γινομένου $\langle \cdot, \cdot \rangle$ του \mathbb{R}^3 επί του $T_p S$ είναι ένα εσωτερικό γινόμενο του $T_p S$, που θα συμβολίζουμε με $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$. Επομένως,

$$\langle w_1, w_2 \rangle_p := \langle w_1, w_2 \rangle, \quad \forall w_1, w_2 \in T_p S.$$

Από το εσωτερικό γινόμενο

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_p: T_p S \times T_p S \longrightarrow \mathbb{R}$$

κατασκευάζεται η *τετραγωνική μορφή*

$$I_p: T_p S \longrightarrow \mathbb{R}: w \mapsto I_p(w) := \langle w, w \rangle_p = \|w\|^2.$$

3.2.1 Ορισμός. Η τετραγωνική μορφή I_p λέγεται **πρώτη θεμελιώδης (τετραγωνική) μορφή** της S στο p (first fundamental form).

Ας θεωρήσουμε τώρα μια παραμέτρηση (U, r, W) της S με $p \in W$ και $q = r^{-1}(p)$. Ήδη γνωρίζουμε ότι τα διανύσματα

$$r_u(q) := \left. \frac{\partial r}{\partial u} \right|_q, \quad r_v(q) := \left. \frac{\partial r}{\partial v} \right|_q$$

αποτελούν βάση του $T_p S$. Αν πάρουμε δύο οποιαδήποτε εφαπτόμενα διανύσματα

$$w_i = \lambda_i r_u(q) + \mu_i r_v(q); \quad i = 1, 2,$$

τότε θα είναι

$$\begin{aligned} \langle w_1, w_2 \rangle_p &= \langle \lambda_1 r_u(q) + \mu_1 r_v(q), \lambda_2 r_u(q) + \mu_2 r_v(q) \rangle \\ &= \lambda_1 \lambda_2 \langle r_u(q), r_u(q) \rangle + (\lambda_1 \mu_2 + \lambda_2 \mu_1) \langle r_u(q), r_v(q) \rangle \\ &\quad + \mu_1 \mu_2 \langle r_v(q), r_v(q) \rangle. \end{aligned}$$

Ιδιαίτερος, αν $w = \lambda r_u(q) + \mu r_v(q)$, βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned} I_p(w) &= \|w\|^2 = \langle w, w \rangle = \\ &= \lambda^2 \langle r_u(q), r_u(q) \rangle + 2\lambda\mu \langle r_u(q), r_v(q) \rangle + \mu^2 \langle r_v(q), r_v(q) \rangle. \end{aligned}$$

Αν θέσουμε

$$\begin{aligned} E(q) &:= \langle r_u(q), r_u(q) \rangle = \|r_u(q)\|^2, \\ F(q) &:= \langle r_u(q), r_v(q) \rangle, \\ G(q) &:= \langle r_v(q), r_v(q) \rangle = \|r_v(q)\|^2, \end{aligned}$$

παίρνουμε τις εκφράσεις

$$(3.2.1) \quad I_p(w) = \lambda^2 E(q) + 2\lambda\mu F(q) + \mu^2 G(q),$$

$$(3.2.2) \quad \langle w_1, w_2 \rangle_p = \lambda_1 \lambda_2 E(q) + (\lambda_1 \mu_2 + \lambda_2 \mu_1) F(q) + \mu_1 \mu_2 G(q).$$

Επομένως, η πρώτη θεμελιώδης μορφή I_p και το εσωτερικό γινόμενο $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ καθορίζονται πλήρως από τις ποσότητες $E(q)$, $F(q)$ και $G(q)$.

3.2.2 Ορισμός. Καλούμε **θεμελιώδη μεγέθη 1ης τάξης της S στο p** (first fundamental coefficients) τις ποσότητες $E(q)$, $F(q)$ και $G(q)$.

Παρατηρούμε ότι η 1η θεμελιώδης μορφή είναι ανεξάρτητη της θεωρούμενης παραμέτρησης, ενώ τα θεμελιώδη μεγέθη εξαρτώνται από την (U, r, W) . Επιπλέον, αν αφήσουμε το $q = (u, v) \in U$ να μεταβάλλεται μέσα στο U , τα θεμελιώδη μεγέθη $E(u, v)$, $F(u, v)$ και $G(u, v)$ ορίζουν διαφορίσιμες συναρτήσεις

$$E, F, G: U \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Θα δούμε τώρα μια άλλη έκφραση του I_p , η οποία είναι χρήσιμη σε πολλές περιπτώσεις. Γνωρίζουμε ότι (βλ. απόδειξη Θεωρήματος 2.6.2) ένα εφαπτόμενο διάνυσμα $w \in T_p S$ μπορεί να γραφτεί με την μορφή

$$w = [Dr(q)](h) = \alpha'(0),$$

για κάποιο $h \in \mathbb{R}^2$ και με $\alpha = r \circ \beta$, όπου $\beta(t) = th + q$, $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, για ε κατάλληλα μικρό έτσι ώστε $\beta((-\varepsilon, \varepsilon)) \subset U$. Επομένως,

$$w = [Dr(q)](h) = [Dr(q)](\beta'(0)).$$

Επειδή η β παίρνει τιμές στο U , μπορούμε να γράψουμε ότι $\beta(t) = (u(t), v(t))$, άρα $\beta'(t) = (u'(t), v'(t))$. Συνεπώς,

$$\begin{aligned} w &= [Dr(q)](h) = [Dr(q)](\beta'(0)) \\ &= [Dr(q)](u'(0), v'(0)) = [Dr(q)](u'(0)e_1 + v'(0)e_2) \\ &= u'(0)[Dr(q)](e_1) + v'(0)[Dr(q)](e_2) \\ &= u'(0) \left. \frac{\partial r}{\partial u} \right|_q + v'(0) \left. \frac{\partial r}{\partial v} \right|_q \\ &= u'(0)r_u(q) + v'(0)r_v(q) \\ &= \left. \frac{du}{dt} \right|_0 r_u(q) + \left. \frac{dv}{dt} \right|_0 r_v(q), \end{aligned}$$

οπότε ο τύπος (3.2.1) παίρνει την μορφή

$$(3.2.3) \quad \begin{aligned} I_p(w) &\equiv I_p \left(\left. \frac{du}{dt} \right|_0, \left. \frac{dv}{dt} \right|_0 \right) = \\ &= \left(\left. \frac{du}{dt} \right|_0 \right)^2 E(q) + 2 \left(\left. \frac{du}{dt} \right|_0 \right) \left(\left. \frac{dv}{dt} \right|_0 \right) F(q) + \left(\left. \frac{dv}{dt} \right|_0 \right)^2 G(q). \end{aligned}$$

Από την προηγούμενη σχέση παίρνουμε την συμβολική έκφραση

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2,$$

που σχετίζεται με το στοιχειώδες μήκος (βλ. πιο κάτω την έννοια του μήκους). Θα αποφύγουμε όμως την χρήση της γιατί μπορεί να οδηγήσει σε παρανοήσεις ή λάθη.

3.2.3 Πρόταση. *Ισχύουν οι σχέσεις:*

- (i) $\|r_u \times r_v\| = \sqrt{EG - F^2}$,
(ii) $E > 0, G > 0, EG - F^2 > 0$.

Απόδειξη. Η (i) είναι αποτέλεσμα της γνωστής σχέσης

$$\|r_u \times r_v\|^2 = \|r_u\|^2 \cdot \|r_v\|^2 - \langle r_u, r_v \rangle^2$$

και του ορισμού των μεγεθών E, F, G .

Επειδή r_u, r_v και $r_u \times r_v$ είναι διάφορα του 0, προκύπτουν οι γνήσιες ανισότητες της (ii). \square

Μέσω των θεμελιωδών μεγεθών μπορούμε να υπολογίζουμε *μήκη, γωνίες* και *εμβαδά* πάνω σε επιφάνειες.

Έστω ότι $\alpha: [a, b] \rightarrow W$ είναι μία διαφορίσιμη καμπύλη. Θα εκφράσουμε τα επαπτόμενα διανύσματά της ως στοιχεία αντιστοίχων επαπτομένων χώρων της επιφάνειας. Έτσι, επειδή $\alpha = r \circ \beta = r \circ (u, v)$, όπου

$$\beta \equiv (u, v) := r^{-1} \circ \alpha: [a, b] \rightarrow U$$

είναι διαφορίσιμη επίπεδη καμπύλη, έχουμε

$$\begin{aligned} \alpha'(t) &= [D\alpha(t)](1) = [D(r \circ \beta)(t)](1) \\ &= [Dr(\beta(t)) \circ D\beta(t)](1) \\ &= [Dr(\beta(t))](\beta'(t)) \\ &= [Dr(\beta(t))](u'(t), v'(t)) \\ &= u'(t)r_u(\beta(t)) + v'(t)r_v(\beta(t)), \end{aligned}$$

δηλαδή, καταλήγουμε στη σχέση

$$\boxed{\alpha'(t) = u'(t)r_u(\beta(t)) + v'(t)r_v(\beta(t))}$$

από την οποία συμπεραίνουμε ότι

$$(3.2.4) \quad \alpha'(t) \in T_{r(\beta(t))}S = T_{\alpha(t)}S,$$

άρα [βάσει της (3.2.3)]

$$(3.2.5) \quad \begin{aligned} \|\alpha'(t)\|^2 &= I_{\alpha(t)}(\alpha'(t)) = \\ &= u'(t)^2 E(\beta(t)) + 2u'(t)v'(t)F(\beta(t)) + v'(t)^2 G(\beta(t)). \end{aligned}$$

Βάσει των ανωτέρω, το **μήκος** (τόξου) μιας διαφορίσιμης (κανονικής) καμπύλης $\alpha: [a, b] \rightarrow W$ δίνεται από την σχέση

$$(3.2.6) \quad \begin{aligned} L(\alpha) &= \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt = \\ &= \int_a^b \sqrt{u'(t)^2 E(\beta(t)) + 2u'(t)v'(t)F(\beta(t)) + v'(t)^2 G(\beta(t))} dt. \end{aligned}$$

Για δύο διανύσματα $w_1, w_2 \in T_p S$, η γωνία θ που σχηματίζουν υπολογίζεται, ως συνήθως, από την σχέση

$$(3.2.7) \quad \cos \theta = \frac{\langle w_1, w_2 \rangle}{\|w_1\| \|w_2\|} = \frac{\langle w_1, w_2 \rangle_p}{\sqrt{I_p(w_1) \cdot I_p(w_2)}}.$$

Αν έχουμε δύο κανονικές διαφορίσιμες καμπύλες $\alpha: I \rightarrow S$ και $\gamma: J \rightarrow S$ που τέμνονται στο $p \in S$, δηλαδή υπάρχουν $t_o \in I$ και $s_o \in J$ τέτοια ώστε $\alpha(t_o) = \gamma(s_o) = p$, τότε ορίζεται η **γωνία** θ των καμπυλών αυτών, στο εν λόγω σημείο, μέσω της γωνίας των ταχυτήτων τους, δηλαδή μέσω της σχέσης

$$(3.2.8) \quad \cos \theta = \frac{\langle \alpha'(t_o), \gamma'(s_o) \rangle_p}{\|\alpha'(t_o)\| \|\gamma'(s_o)\|} = \frac{\langle \alpha'(t_o), \gamma'(s_o) \rangle_p}{\sqrt{I_p(\alpha'(t_o)) \cdot I_p(\gamma'(s_o))}}.$$

Ιδιαίτερως, αν οι α και γ είναι οι καμπύλες συντεταγμένων της δοσμένης παραμέτρησης r , τότε

$$(3.2.9) \quad \cos \theta = \frac{\langle r_u(q), r_v(q) \rangle}{\|r_u(q)\| \|r_v(q)\|} = \frac{F(q)}{\sqrt{E(q)G(q)}}.$$

Παρατηρούμε ότι

$$r_u \perp r_v \Leftrightarrow \langle r_u, r_v \rangle = 0 \Leftrightarrow F = 0.$$

Μιά παραμέτρηση με $F = 0$ καλείται **ορθογώνια** (orthogonal parametrization).

Έστω τώρα $K \subseteq W$ ένας *φραγμένος τόπος* υποσύνολο της S . Το **εμβαδόν** του K (area) δίνεται από τον τύπο

$$A(K) = \iint_{r^{-1}(K)} \|r_u(u, v) \times r_v(u, v)\| du dv.$$

Λόγω της σχέσης (i) της Πρότασης 3.2.3, τελικά το εμβαδόν του K δίνεται από τον τύπο

$$(3.2.10) \quad A(K) = \iint_{r^{-1}(K)} \sqrt{E(u, v)G(u, v) - F(u, v)^2} \, du \, dv.$$

3.2.4 Παρατηρήσεις. 1) Αν η εικόνα W μιας παραμέτρησης (U, r, W) καλύπτει ολόκληρη την επιφάνεια S πλην ενός συνόλου μηδενικού εμβαδού (π.χ. πλην μιας γραμμής ή μεμονωμένων σημείων), τότε το εμβαδόν του W συμπίπτει με το εμβαδόν όλης της S .

2) Αν το σύνολο K δεν περιέχεται ολόκληρο σε ένα σύστημα συντεταγμένων, το διαμερίζουμε σε υποσύνολα που έχουν αυτή την ιδιότητα, και υπολογίζουμε τα επιμέρους εμβαδά.

3.2.5 Παραδείγματα. (1) Ας θεωρήσουμε την επιφάνεια του **κατακόρυφου (ή ορθού) κυλίνδρου** (cylinder) ακτίνας 1

$$K = S^1 \times \mathbb{R} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\}.$$

Μια παραμέτρηση του K δίνεται από την τριάδα (U, r, W) με

$$U = \{(u, v) \mid u \in (0, 2\pi), v \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^2,$$

$$r: U \longrightarrow K: (u, v) \mapsto r(u, v) := (\cos u, \sin u, v),$$

που τον καλύπτει ολόκληρο, εκτός από μία γενέτειρα. Αμέσως βλέπουμε ότι

$$r_u(u, v) = (-\sin u, \cos u, 0) \quad \text{και} \quad r_v(u, v) = (0, 0, 1).$$

Επομένως, για κάθε $q = (u, v) \in U$, έχουμε

$$\begin{aligned} E(q) &= \langle r_u(q), r_u(q) \rangle_p \\ &= \langle (-\sin u, \cos u, 0), (-\sin u, \cos u, 0) \rangle \\ &= \sin^2 u + \cos^2 u + 0 = 1, \\ F(q) &= \langle r_u(q), r_v(q) \rangle_p \\ &= \langle (-\sin u, \cos u, 0), (0, 0, 1) \rangle = 0, \\ G(q) &= \langle r_v(q), r_v(q) \rangle_p = \langle (0, 0, 1), (0, 0, 1) \rangle = 1. \end{aligned}$$

Οι τιμές αυτές προκύπτουν για κάθε $q \in U$, άρα

$$E = 1, \quad F = 0, \quad G = 1,$$

(σταθερώς), άρα η παραπάνω παραμέτρηση του κυλίνδρου είναι ορθογώνια.

2) Ας πάρουμε το επίπεδο Π του Παραδείγματος 2, §2.2. Παραγωγίζοντας μερικώς την παραμέτρησή του, έχουμε ότι

$$r_u(q) = \left(1, 0, -\frac{A}{C}\right), \quad r_v(q) = \left(0, 1, -\frac{B}{C}\right),$$

οπότε

$$E(q) = 1 + \left(\frac{A}{C}\right)^2, \quad F(q) = \frac{AB}{C^2}, \quad G(q) = 1 + \left(\frac{B}{C}\right)^2,$$

και τελικά

$$E = 1 + \left(\frac{A}{C}\right)^2, \quad F = \frac{AB}{C^2}, \quad G = 1 + \left(\frac{B}{C}\right)^2.$$

Στην ιδιαίτερη περίπτωση του επιπέδου $z = 0$, είναι $A = B = D = 0$ και $C = 1$, άρα

$$E = 1, \quad F = 0, \quad G = 1,$$

δηλαδή το επίπεδο αυτό έχει τα ίδια θεμελιώδη μεγέθη με τον κύλινδρο. Αυτό μας οδηγεί στην επόμενη βασική παρατήρηση:

Τα θεμελιώδη μεγέθη 1ης τάξης δεν προσδιορίζουν, από μόνα τους, την επιφάνεια.

Για τον υπολογισμό των εμβαδών της σφαίρας και της σπείρας παραπέμπουμε στις λυμένες ασκήσεις.

3.3 Η απεικόνιση Gauss

Θεωρούμε μια προσανατολισμένη επιφάνεια S και τον προσανατολισμό της $N: S \rightarrow \mathbb{R}^3$. Επειδή κάθε $N(p)$ είναι μοναδιαίο διάνυσμα, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η N είναι απεικόνιση της μορφής

$$(3.3.1) \quad N: S \rightarrow S^2.$$

3.3.1 Ορισμός. Η απεικόνιση (3.3.1) καλείται **απεικόνιση Gauss** (Gauss map) της S .

3.3.2 Πρόταση. Η απεικόνιση Gauss είναι διαφορίσιμη.

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε παραμέτρηση (U, r, W) της S , η τοπική παράσταση

$$N \circ r: U \rightarrow \mathbb{R}^3$$

είναι διαφορίσιμη. Πράγματι, για κάθε $q \in U$, είναι

$$(N \circ r)(q) = \frac{r_u(q) \times r_v(q)}{\|r_u(q) \times r_v(q)\|},$$

η οποία είναι προφανώς διαφορίσιμη απεικόνιση. □

Εφ' όσον η N είναι διαφορίσιμη, ορίζεται και το διαφορικό της

$$(3.3.2) \quad d_p N: T_p S \longrightarrow T_{N(p)} S^2,$$

σε κάθε σημείο $p \in S$. Ο εφαπτόμενος χώρος $T_p S$ είναι ο (μοναδικός) 2-διάστατος υπόχωρος του \mathbb{R}^3 , που είναι κάθετος στο διάνυσμα $N(p)$. Από το άλλο μέρος, από κατασκευή, και ο εφαπτόμενος χώρος $T_{N(p)} S^2$ είναι 2-διάστατος υπόχωρος του \mathbb{R}^3 , και είναι κάθετος στο διάνυσμα θέσης (ακτίνα) του σημείου $N(p) \in S^2$. Επομένως οι χώροι $T_p S$ και $T_{N(p)} S^2$ είναι δύο επίπεδα παράλληλα μεταξύ τους (ως κάθετα προς το $N(p)$) και έχουν κοινό σημείο το 0, άρα συμπίπτουν, δηλαδή

$$(3.3.3) \quad T_{N(p)} S^2 = T_p S,$$

οπότε η (3.3.2) μπορεί να θεωρηθεί ότι είναι απεικόνιση της μορφής

$$(3.3.4) \quad d_p N: T_p S \longrightarrow T_p S.$$

Το προηγούμενο διαφορικό ουσιαστικά εκφράζει τον τρόπο μεταβολής του N , επομένως, κατά κάποιον τρόπο, περιγράφει το "σχήμα" της επιφάνειας.

3.3.3 Ορισμός. Η αντίθετη της απεικόνισης (3.3.4), δηλαδή ο τελεστής

$$-d_p N: T_p S \longrightarrow T_p S$$

καλείται **τελεστής σχήματος της S στο p** (shape operator).

Έστω τώρα μια παραμέτρηση (U, r, W) της S με $p \in W$. Για να υπολογίσουμε τις εικόνες των $w \in T_p S$ μέσω της $d_p N$, αρκεί να βρούμε τις εικόνες των βασικών διανυσμάτων $r_u(q), r_v(q)$, όπου $q := r^{-1}(p)$. Για το σκοπό αυτό χρησιμοποιούμε τις καμπύλες $\alpha = r \circ \bar{\alpha}$ και $\beta = r \circ \bar{\beta}$, όπου

$$\bar{\alpha}(t) := (u_o + t, v_o) \quad \text{και} \quad \bar{\beta}(t) := (u_o, v_o + t),$$

αντιστοίχως, με $(u_o, v_o) := q$ (βλ. Άσκηση 28, Κεφ. 2). Επομένως, από τον Ορισμό 2.7.2 του διαφορικού έχουμε:

$$\begin{aligned} d_p N(r_u(q)) &= d_p N(\alpha'(0)) = (N \circ \alpha)'(0) \\ &= (N \circ r \circ \bar{\alpha})'(0) = [D(N \circ r \circ \bar{\alpha})(0)](1) \\ &= [D(N \circ r)(q)](\bar{\alpha}'(0)) = [D(N \circ r)(q)](e_1) \\ &= \left. \frac{\partial(N \circ r)}{\partial u} \right|_q. \end{aligned}$$

Ανάλογα βρίσκουμε ότι

$$d_p N(r_v(q)) = \left. \frac{\partial(N \circ r)}{\partial v} \right|_q.$$

Συμβολικά θέτουμε

$$(3.3.5) \quad \boxed{N_u(q) := \left. \frac{\partial(N \circ r)}{\partial u} \right|_q, \quad N_v(q) := \left. \frac{\partial(N \circ r)}{\partial v} \right|_q,}$$

οπότε, τελικά,

$$(3.3.6) \quad \boxed{d_p N(r_u(q)) = N_u(q), \quad d_p N(r_v(q)) = N_v(q).}$$

3.3.4 Θεώρημα. *Ο τελεστής σχήματος είναι αυτοσυζυγής (ή συμμετρικός) (self-adjoint), δηλαδή, για οποιαδήποτε διανύσματα $w_1, w_2 \in T_p S$, ισχύει η σχέση*

$$\langle -d_p N(w_1), w_2 \rangle = \langle w_1, -d_p N(w_2) \rangle .$$

Απόδειξη. Προφανώς, αρκεί να δειχθεί ότι

$$\langle d_p N(w_1), w_2 \rangle = \langle w_1, d_p N(w_2) \rangle ,$$

δηλαδή ότι ο αντίθετος του $-d_p N$ είναι αυτοσυζυγής. Επίσης, αρκεί να αποδειχθεί η ανωτέρω σχέση για τυχούσα βάση $\{w_1, w_2\}$ του $T_p S$. Επομένως, αρκεί να αποδειχθεί ότι

$$\langle d_p N(r_u(q)), r_v(q) \rangle = \langle r_u(q), d_p N(r_v(q)) \rangle ,$$

ή, σύμφωνα με την (3.3.6),

$$(3.3.7) \quad \langle N_u(q), r_v(q) \rangle = \langle r_u(q), N_v(q) \rangle .$$

Επειδή

$$N(r(q)) \perp r_u(q), r_v(q); \quad \forall q \in U,$$

για τις συναρτήσεις $N \circ r$, r_u και r_v ισχύει ότι

$$(3.3.8) \quad \langle N \circ r, r_u \rangle = \langle N \circ r, r_v \rangle = 0.$$

Παραγωγίζοντας την $\langle N \circ r, r_u \rangle = 0$ ως προς v , έχουμε:

$$\begin{aligned} 0 &= \left. \frac{\partial}{\partial v} \right|_q (\langle N \circ r, r_u \rangle) = \\ &= \left\langle \left. \frac{\partial(N \circ r)}{\partial v} \right|_q, r_u(q) \right\rangle + \left\langle (N \circ r)(q), \left. \frac{\partial r_u}{\partial v} \right|_q \right\rangle . \end{aligned}$$

Θέτοντας

$$(3.3.9) \quad \boxed{r_{vu}(q) := \left. \frac{\partial r_u}{\partial v} \right|_q = \left. \frac{\partial}{\partial v} \right|_q \left(\frac{\partial r}{\partial u} \right) = \left. \frac{\partial^2 r}{\partial v \partial u} \right|_q,}$$

και χρησιμοποιώντας τις (3.3.5), η σχέση πριν την (3.3.9) δίνει την

$$(3.3.10) \quad \langle N_v(q), r_u(q) \rangle + \langle (N \circ r)(q), r_{vu}(q) \rangle = 0.$$

Ανάλογα, παραγωγίζοντας την $\langle N \circ r, r_v \rangle = 0$ ως προς u , βρίσκουμε ότι

$$(3.3.11) \quad \langle N_u(q), r_v(q) \rangle + \langle (N \circ r)(q), r_{uv}(q) \rangle = 0.$$

Επειδή

$$(3.3.12) \quad \boxed{r_{uv}(q) = \frac{\partial^2 r}{\partial u \partial v} \Big|_q = \frac{\partial^2 r}{\partial v \partial u} \Big|_q = r_{vu}(q), \quad \forall q \in U,}$$

οι (3.3.10) και (3.3.11) οδηγούν στην

$$\langle N_u(q), r_v(q) \rangle = \langle N_v(q), r_u(q) \rangle = \langle r_u(q), N_v(q) \rangle,$$

που είναι η ζητούμενη. \square

Σύμφωνα με την γενική θεωρία των αυτοσυζυγών τελεστών, υπάρχει μια ορθοκανονική βάση $\{w_1, w_2\}$ του $T_p S$, τέτοια ώστε

$$(3.3.13) \quad -d_p N(w_1) = k_1 w_1, \quad -d_p N(w_2) = k_2 w_2,$$

με $k_1 \geq k_2$. Προφανώς τα w_1, w_2 είναι *ιδιοδιανύσματα* του $-d_p N$ και k_1, k_2 οι αντίστοιχες *ιδιοτιμές*. Επομένως, ο πίνακας του $-d_p N$, ως προς την ορθοκανονική βάση $\{w_1, w_2\}$ είναι ο

$$(3.3.14) \quad \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix}.$$

3.3.5 Ορισμός. Οι ιδιοτιμές k_1, k_2 καλούνται **κύριες καμπυλότητες της S στο p** (principal curvatures), ενώ οι κατευθύνσεις που προσδιορίζονται από τα ιδιοδιανύσματα w_1, w_2 καλούνται **κύριες κατευθύνσεις της S στο p** (principal directions). Ιδιαίτερος, καλείται **καμπυλότητα Gauss της S στο p** (Gaussian curvature) η ποσότητα

$$K(p) := k_1 k_2 = \det(-d_p N) = \det(d_p N)$$

και **μέση καμπυλότητα της S στο p** (mean curvature) η ποσότητα

$$H(p) := \frac{1}{2}(k_1 + k_2) = \frac{1}{2} \operatorname{tr}(-d_p N).$$

3.3.6 Παρατήρηση. Αν αντί του προσανατολισμού N πάρουμε τον $-N$, τότε ο τελεστής σχήματος είναι ο $d_p N$ με ιδιοτιμές $-k_1$ και $-k_2$. Συνεπώς η καμπυλότητα του Gauss θα μείνει ίδια, αλλά η μέση καμπυλότητα θα αλλάξει σημείο.

3.3.7 Ορισμός. Ένα σημείο $p \in S$ λέγεται

- **ελλειπτικό**, αν $K(p) > 0$
- **υπερβολικό**, αν $K(p) < 0$
- **παραβολικό**, αν $K(p) = 0$ με $d_p N \neq 0$
- **επιπεδικό**, αν $K(p) = 0$.

Η μελέτη των σημείων των προηγούμενων μορφών έχει ιδιαίτερη σημασία για την μελέτη της επιφάνειας, ξεφεύγει όμως από τους σκοπούς του παρόντος.

3.4 Η δεύτερη θεμελιώδης μορφή

3.4.1 Ορισμός. Έστω S μία προσανατολίσιμη κανονική επιφάνεια και N ένας προσανατολισμός της. Ονομάζουμε **δεύτερη θεμελιώδης μορφή της S στο p** (second fundamental form) την τετραγωνική μορφή που αντιστοιχεί στον αυτοσυζυγή τελεστή $-d_p N: T_p S \rightarrow T_p S$, δηλαδή την τετραγωνική μορφή

$$(3.4.1) \quad \Pi_p: T_p S \longrightarrow \mathbb{R}: w \mapsto \Pi_p(w) := \langle -d_p N(w), w \rangle = -\langle d_p N(w), w \rangle.$$

Θεωρούμε την ορθοκανονική βάση $\{w_1, w_2\}$ και τις ιδιοτιμές k_1, k_2 του αυτοσυζυγούς τελεστή $-d_p N$. Τότε, αν πάρουμε τυχόν διάνυσμα $w \in T_p S$ με $\|w\| = 1$, μπορούμε να το εκφράσουμε με την μορφή

$$w = w_1 \cdot \cos \theta + w_2 \cdot \sin \theta.$$

Επομένως, υπολογίζοντας την Π_p στο w , βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned} \Pi_p(w) &= -\langle d_p N(w), w \rangle \\ &= \langle -d_p N(w_1 \cdot \cos \theta + w_2 \cdot \sin \theta), w_1 \cdot \cos \theta + w_2 \cdot \sin \theta \rangle \\ &= \langle k_1 \cdot \cos \theta \cdot w_1 + k_2 \cdot \sin \theta \cdot w_2, w_1 \cdot \cos \theta + w_2 \cdot \sin \theta \rangle \\ &= k_1 \cdot \cos^2 \theta \cdot \langle w_1, w_1 \rangle + k_2 \cdot \sin \theta \cos \theta \langle w_2, w_1 \rangle \\ &\quad + k_1 \cdot \cos \theta \sin \theta \langle w_1, w_2 \rangle + k_2 \sin^2 \theta \langle w_2, w_2 \rangle \\ &= k_1 \cos^2 \theta + k_2 \sin^2 \theta. \end{aligned}$$

δηλαδή καταλήγουμε στην

$$(3.4.2) \quad \Pi_p(w) = k_1 \cos^2 \theta + k_2 \sin^2 \theta.$$

Η σχέση (3.4.2) είναι γνωστή ως **τύπος του Euler** (Euler's formula) και προσδιορίζει την τιμή της Π_p επί του μοναδιαίου κύκλου. Από την μορφή αυτή είναι φανερόν ότι οι k_1 και k_2 είναι οι ακρότατες τιμές της Π_p στα μοναδιαία διανύσματα.

Μιά άλλη έκφραση του Π_p προκύπτει με τον ακόλουθο τρόπο: Έστω τυχόν $w \in T_p S$. Επειδή $w = \lambda r_u(q) + \mu r_v(q)$, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \Pi_p(w) &= - \langle d_p N(w), w \rangle \\ &= - \langle \lambda d_p N(r_u(q)) + \mu d_p N(r_v(q)), \lambda r_u(q) + \mu r_v(q) \rangle \\ &= - \langle \lambda N_u(q) + \mu N_v(q), \lambda r_u(q) + \mu r_v(q) \rangle \\ &= -\lambda^2 \langle N_u(q), r_u(q) \rangle - \lambda\mu \langle N_u(q), r_v(q) \rangle - \\ &\quad - \lambda\mu \langle N_v(q), r_u(q) \rangle - \mu^2 \langle N_v(q), r_v(q) \rangle . \end{aligned}$$

Λόγω της (3.3.8), η προηγούμενη μετασχηματίζεται στην

$$(3.4.3) \quad \begin{aligned} \Pi_p(w) &= -\lambda^2 \langle N_u(q), r_u(q) \rangle - \\ &\quad - 2\lambda\mu \langle N_u(q), r_v(q) \rangle - \mu^2 \langle N_v(q), r_v(q) \rangle . \end{aligned}$$

Θέτοντας τώρα

$$(3.4.4) \quad \begin{aligned} e(q) &:= - \langle N_u(q), r_u(q) \rangle = - \langle d_p N(r_u(q)), r_u(q) \rangle, \\ f(q) &:= - \langle N_u(q), r_v(q) \rangle = - \langle d_p N(r_u(q)), r_v(q) \rangle \\ &:= - \langle N_v(q), r_u(q) \rangle = - \langle d_p N(r_v(q)), r_u(q) \rangle, \\ g(q) &:= - \langle N_v(q), r_v(q) \rangle = - \langle d_p N(r_v(q)), r_v(q) \rangle, \end{aligned}$$

η (3.4.3) παίρνει την τελική μορφή

$$(3.4.5) \quad \Pi_p(w) = \lambda^2 e(q) + 2\lambda\mu f(q) + \mu^2 g(q).$$

Οι διαφορίσιμες απεικονίσεις $e, f, g: U \rightarrow \mathbb{R}$ καλούνται **θεμελιώδη μεγέθη 2ης τάξης της S** (second fundamental coefficients) και εξαρτώνται από την παραμέτρηση (U, r, W) .

Για την πληρότητα θα αναφέρουμε και κάποιες άλλες εκφράσεις των e, f και g , που είναι πολλές φορές πιο εύχρηστες από αυτές των (3.4.4). Για τον σκοπό αυτό παραγωγίζουμε την $\langle N \circ r, r_u \rangle = 0$ ως προς u , οπότε παίρνουμε την

$$\left\langle \frac{\partial(N \circ r)}{\partial u}, r_u \right\rangle + \langle N \circ r, \frac{\partial r_u}{\partial u} \rangle = 0.$$

Θέτοντας

$$r_{uu} := \frac{\partial r_u}{\partial u},$$

έχουμε ότι

$$(3.4.6) \quad e = - \langle N_u, r_u \rangle = \langle N \circ r, r_{uu} \rangle .$$

Παρόμοια, παραγωγίζοντας την $\langle N \circ r, r_u \rangle = 0$ ως προς v , παίρνουμε

$$\left\langle \frac{\partial(N \circ r)}{\partial v}, r_u \right\rangle + \langle N \circ r, \frac{\partial r_u}{\partial v} \rangle = 0.$$

Λαμβάνοντας υπ' όψιν την (3.3.12) βρίσκουμε την

$$(3.4.7) \quad f = - \langle N_v, r_u \rangle = \langle N \circ r, r_{uv} \rangle = \langle N \circ r, r_{vu} \rangle .$$

Τέλος, παραγωγίζοντας την $\langle N \circ r, r_v \rangle = 0$ ως προς v , παίρνουμε

$$\left\langle \frac{\partial(N \circ r)}{\partial v}, r_v \right\rangle + \langle N \circ r, \frac{\partial r_v}{\partial v} \rangle = 0.$$

Θέτοντας

$$r_{vv} := \frac{\partial r_v}{\partial v}$$

βρίσκουμε ότι

$$(3.4.8) \quad g := - \langle N_v, r_v \rangle = \langle N \circ r, r_{vv} \rangle .$$

Επειδή το $N(p)$ είναι το (κανονικοποιημένο) εξωτερικό γινόμενο των $r_u(q)$ και $r_v(q)$, τα εσωτερικά γινόμενα τα οποία εμφανίζονται στους παραπάνω τύπους (3.4.6)–(3.4.8) είναι μικτά γινόμενα, άρα καταλήγουμε στην επόμενη μορφή των θεμελιωδών μεγεθών 2ης τάξης (όπου παραλείπουμε την μεταβλητή q):

$$(3.4.9) \quad \boxed{\begin{aligned} e = \langle N \circ r, r_{uu} \rangle &= \frac{[r_u \ r_v \ r_{uu}]}{\|r_u \times r_v\|} = \frac{[r_u \ r_v \ r_{uu}]}{\sqrt{EG - F^2}}, \\ f = \langle N \circ r, r_{uv} \rangle &= \frac{[r_u \ r_v \ r_{uv}]}{\|r_u \times r_v\|} = \frac{[r_u \ r_v \ r_{uv}]}{\sqrt{EG - F^2}}, \\ g = \langle N \circ r, r_{vv} \rangle &= \frac{[r_u \ r_v \ r_{vv}]}{\|r_u \times r_v\|} = \frac{[r_u \ r_v \ r_{vv}]}{\sqrt{EG - F^2}}. \end{aligned}}$$

Η διαφορά των τύπων (3.4.4) από τους (3.4.9) είναι προφανής: οι πρώτοι εμφανίζουν τις μερικές παραγώγους (1ης τάξης) του N και της r , ενώ οι τελευταίοι εμφανίζουν τις μερικές παραγώγους (1ης και 2ης τάξης) μόνο της r . Η προτίμηση για την χρήση της μιας ή της άλλης ομάδας εξαρτάται από το πόσο πολυπλοκή είναι η μορφή του N και των r_u, r_v (οπότε και ο υπολογισμός των αντιστοιχών παραγώγων τους είναι επίσης πολυπλοκός). Επομένως, θα επιλέξουμε τους τύπους εκείνους που προκύπτουν με την ευκολότερη δυνατή παραγωγή.

Οι θεμελιώδεις μορφές ουσιαστικά προσδιορίζουν τοπικά την επιφάνεια. Πιο συγκεκριμμένα (χωρίς να προχωρήσουμε σε λεπτομέρειες), ισχύει το **Θεμελιώδες Θεώρημα των Επιφανειών**, σύμφωνα με το οποίο αν δίνονται

τρεις συναρτήσεις E, F, G τάξης τουλάχιστον C^2 και τρεις συναρτήσεις e, f, g τάξης τουλάχιστον C^1 , με πεδίο ορισμού ένα ανοιχτό $U \subseteq \mathbb{R}^2$, έτσι ώστε

$$\text{i) } EG - F^2 > 0, E > 0, G > 0,$$

ii) τα $E, F, G; e, f, g$ ικανοποιούν κατάλληλες σχέσεις συμβιβασιμότητας (τις λεγόμενες εξισώσεις Gauss και Mainardi-Codazzi),

τότε υπάρχει σύστημα συντεταγμένων (U, r, W) , με r τάξης τουλάχιστον C^3 , τέτοιο ώστε τα $(E, F, G), (e, f, g)$ να είναι τα θεμελιώδη μεγέθη της 1ης και 2ης τάξης, αντιστοίχως, που ορίζονται από την r . Η εικόνα W είναι μονοσήμαντα ορισμένη, εκτός από την θέση της στον χώρο.

Για λεπτομέρειες παραπέμπουμε στη βιβλιογραφία.

3.5 Η καμπυλότητα μέσω των θεμελιωδών μεγεθών

Σκοπός μας στα επόμενα είναι να προσδιορίσουμε την καμπυλότητα μέσω των θεμελιωδών μεγεθών. Είδαμε προηγουμένως ότι αν θεωρήσουμε τον πίνακα του αυτοσυζυγούς τελεστή $-d_p N: T_p S \rightarrow T_p S$ ως προς την ορθοκανονική βάση $\{w_1, w_2\}$ των ιδιοδιανυσμάτων του, τότε έχει την διαγώνια μορφή (3.3.14), ενώ η καμπυλότητα Gauss και η μέση καμπυλότητα παίρνουν αντιστίχως τη μορφή

$$K(p) = k_1 k_2 = \det(-d_p N), \quad H(p) = \frac{k_1 + k_2}{2} = \frac{1}{2} \text{tr}(-d_p N).$$

Αν αλλάξουμε την βάση του $T_p S$, αλλάζει η μορφή του πίνακα (3.3.14) αλλά δεν επηρεάζεται η ορίζουσα $\det(-d_p N) = \det(d_p N)$, ούτε το ίχνος $\text{tr}(-d_p N) = -\text{tr}(d_p N)$. Θεωρούμε λοιπόν τον πίνακα $A(p)$ του $d_p N$ ως προς την βάση $\{r_u(q), r_v(q)\}$, που εισάγεται από μια παραμέτρηση (U, r, W) . Έστω

$$(3.5.1) \quad A(p) = \begin{pmatrix} a_{11}(q) & a_{12}(q) \\ a_{21}(q) & a_{22}(q) \end{pmatrix}.$$

Οι συντεταγμένες του πίνακα ορίζονται από τις ισότητες [βλ. σχέσεις (3.3.6)]

$$\begin{aligned} N_u(q) &= d_p N(r_u(q)) = a_{11}(q)r_u(q) + a_{21}(q)r_v(q), \\ N_v(q) &= d_p N(r_v(q)) = a_{12}(q)r_u(q) + a_{22}(q)r_v(q). \end{aligned}$$

Αφήνοντας το q να μεταβάλλεται μέσα στο U , παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned} -e &= \langle N_u, r_u \rangle = \langle a_{11}r_u + a_{21}r_v, r_u \rangle = a_{11}E + a_{21}F \\ -f &= \langle N_u, r_v \rangle = \langle a_{11}r_u + a_{21}r_v, r_v \rangle = a_{11}F + a_{21}G \\ -f &= \langle N_v, r_u \rangle = \langle a_{12}r_u + a_{22}r_v, r_u \rangle = a_{12}E + a_{22}F \\ -g &= \langle N_v, r_v \rangle = \langle a_{12}r_u + a_{22}r_v, r_v \rangle = a_{12}F + a_{22}G \end{aligned}$$

Οι προηγούμενες ισότητες αποτελούν ένα σύστημα τεσσάρων εξισώσεων με τέσσερεις αγνώστους, που έχει ακριβώς μία λύση [βλ. και Πρόταση 3.2.3(ii)]

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{fF - eG}{EG - F^2}, & a_{21} &= \frac{eF - fE}{EG - F^2}, \\ a_{12} &= \frac{gF - fG}{EG - F^2}, & a_{22} &= \frac{fF - gE}{EG - F^2}. \end{aligned}$$

Ένας απλός υπολογισμός αποδεικνύει ότι

$$(3.5.2) \quad A = - \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}.$$

Από την μορφή (3.5.2) του A προκύπτει αμέσως ότι

$$\begin{aligned} K &= \det(-A) = \det A \\ &= \det \left(\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \right) \det \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \\ &= \frac{\det \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}} = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}, \end{aligned}$$

δηλαδή έχουμε την επόμενη έκφραση της καμπυλότητας Gauss

$$(3.5.3) \quad \boxed{K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}.}$$

Παρόμοια,

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2} \operatorname{tr}(-A) = -\frac{1}{2} \operatorname{tr}(A) \\ &= -\frac{1}{2} (a_{11} + a_{22}) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2}, \end{aligned}$$

δηλαδή η μέση καμπυλότητα παίρνει τη μορφή

$$(3.5.4) \quad \boxed{H = \frac{1}{2} \cdot \frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2}.}$$

Αφού είναι γνωστή η μορφή των a_{ij} , μπορεί κανείς να επανέλθει στις εξισώσεις του ορισμού τους, και να πάρει τις σχέσεις

$$(3.5.5) \quad N_u = a_{11}r_u + a_{21}r_v = \frac{fF - eG}{EG - F^2}r_u + \frac{eF - fE}{EG - F^2}r_v,$$

$$(3.5.6) \quad N_v = a_{12}r_u + a_{22}r_v = \frac{gF - fG}{EG - F^2}r_u + \frac{fF - gE}{EG - F^2}r_v.$$

Οι τελευταίες είναι γνωστές ως **εξισώσεις Weingarten**.

Ας παρατηρήσουμε εδώ ότι, αν είναι γνωστές οι K και H , οι κύριες καμπυλότητες μπορούν να υπολογιστούν ως ρίζες της δευτεροβάθμιας εξίσωσης

$$x^2 - 2Hx + K = 0.$$

Ανακεφαλαιώνοντας, βλέπουμε ότι μπορούμε να προσδιορίσουμε την καμπυλότητα Gauss $K(p)$ και την μέση καμπυλότητα $H(p)$ με δύο τρόπους:

(α) Χρησιμοποιώντας τους τύπους (3.5.3) και (3.5.4), που εκφράζουν τα K και H μέσω των θεμελιωδών μεγεθών.

(β) Αν με κάποιο τρόπο βρίσκεται εύκολα ο πίνακας A της γραμμικής απεικόνισης $-d_p N$ [όπως π.χ. στην περίπτωση της σφαίρας ή του κυλίνδρου (βλ. Ασκήσεις 12, 13)], τότε εφαρμόζουμε τους τύπους $K(p) = \det(A)$ και $H(p) = \frac{1}{2}\text{tr}(A)$.

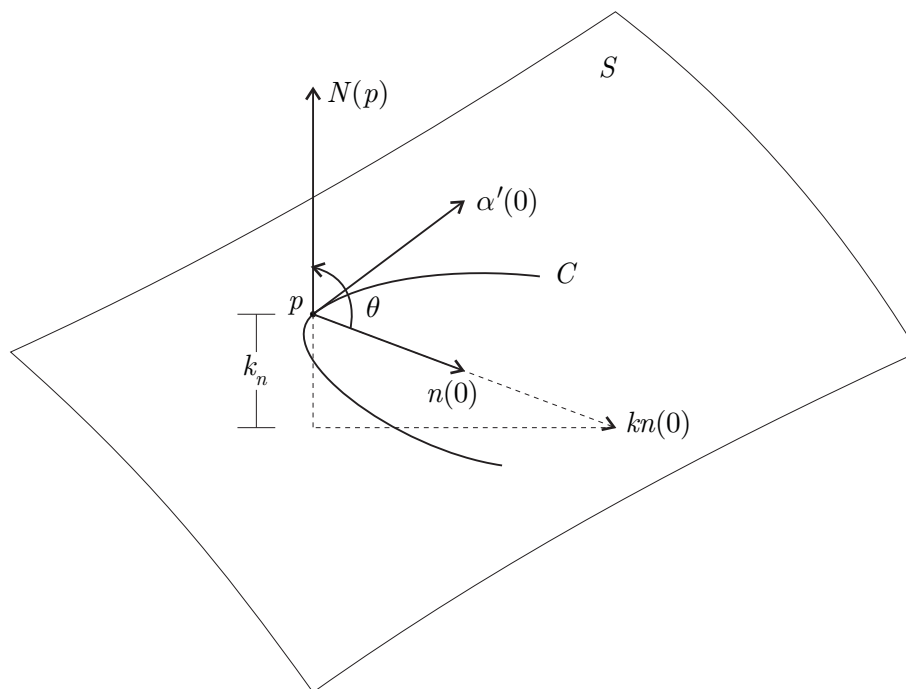
Αν αντί της βάσης $\{r_u, r_v\}$ χρησιμοποιήσουμε μια τυχούσα βάση του $T_p S$, ο προσδιορισμός των K , H είναι πολυπλοκότερος, όπως φαίνεται στις Ασκήσεις 20 και 21. Παρόμοια και ο προσδιορισμός των κυρίων κατευθύνσεων (βλ. Άσκηση 23).

3.6 Γεωμετρική ερμηνεία της καμπυλότητας

Εστω S κανονική επιφάνεια και $\alpha: I \rightarrow S$ μια καμπύλη *μοναδιαίας* ταχύτητας, όπου I ανοιχτό διάστημα με $0 \in I$. Έστω το σημείο $p = \alpha(0)$ στην εικόνα C της καμπύλης, $k = k(0)$ η καμπυλότητα της α στο p , $n(0)$ το πρώτο κάθετο διάνυσμα της α στο p , $N(p)$ το κάθετο διάνυσμα της επιφάνειας S στο ίδιο σημείο, και θ η γωνία των $n(0)$ και $N(p)$. Προφανώς $\cos \theta = \langle n(0), N(p) \rangle$ (βλ. και το παρακάτω Σχήμα 3.2).

3.6.1 Ορισμός. Ονομάζουμε **κάθετη καμπυλότητα της α στο p** (normal curvature) τον αριθμό

$$k_n := k \cos \theta.$$



Σχήμα 3.2

Από τον προηγούμενο ορισμό έχουμε ότι

$$k_n = k \cos \theta = \langle k \cdot n(0), N(p) \rangle,$$

άρα η k_n είναι η προβολή του διανύσματος $k \cdot n(0)$ επί της κάθετου ευθείας της επιφάνειας στο p .

3.6.2 Πρόταση. Έστω $\alpha: I \rightarrow S$ καμπύλη μοναδιαίας ταχύτητας επί της S , τέτοια ώστε $\alpha(0) = p \in S$. Αν $w := \alpha'(0)$, τότε η κάθετη καμπυλότητα της α στο p συμπίπτει με την τιμή της δεύτερης θεμελιώδους μορφής στο w , δηλαδή

$$(3.6.1) \quad k_n = \Pi_p(w) = \Pi_p(\alpha'(0)).$$

Απόδειξη. Από τον ορισμό του N και την σχέση (3.2.4)] προκύπτει ότι

$$N(\alpha(s)) \perp \alpha'(s) \in T_{\alpha(s)}S; \quad \forall s \in I,$$

δηλαδή $N \circ \alpha \perp \alpha'$, και ισοδύναμα $\langle N \circ \alpha, \alpha' \rangle = 0$. Παραγωγίζοντας την τελευταία έχουμε ότι

$$\langle (N \circ \alpha)', \alpha' \rangle + \langle N \circ \alpha, \alpha'' \rangle = 0,$$

απ' όπου προκύπτει η

$$(3.6.2) \quad - \langle (N \circ \alpha)', \alpha' \rangle = \langle N \circ \alpha, \alpha'' \rangle .$$

Επομένως έχουμε:

$$\begin{aligned} k_n &= k \cos \theta = k \langle N(p), n(0) \rangle \\ &= \langle (N \circ \alpha)(0), k(0)n(0) \rangle \\ &= \langle (N \circ \alpha)(0), T'(0) \rangle \\ &= \langle (N \circ \alpha)(0), \alpha''(0) \rangle \\ (\text{βλ. σχέση (3.6.2)}) &= - \langle (N \circ \alpha)'(0), \alpha'(0) \rangle \\ (\text{βλ. Ορισμό 2.7.2}) &= - \langle d_p N(\alpha'(0)), \alpha'(0) \rangle \\ (\text{βλ. σχέση (3.4.1)}) &= - \langle d_p N(w), w \rangle = \Pi_p(w), \end{aligned}$$

που είναι ακριβώς η ζητούμενη σχέση. \square

Μπορούμε τώρα να αποδείξουμε την επομένη παραλλαγή του Θεωρήματος του J. B. Meusnier.

3.6.3 Θεώρημα (Meusnier). *Όλες οι κανονικές καμπύλες επί μιας κανονικής επιφάνειας S , που διέρχονται από το ίδιο σημείο $p \in S$ και έχουν την ίδια εφαπτόμενη στο p , έχουν επίσης την ίδια κάθετη καμπυλότητα στο σημείο αυτό.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι όλες οι καμπύλες είναι μοναδιαίας ταχύτητας, αλλιώς παίρνουμε αναπαραμετρήσεις μέσω του μήκους τόξου. Η αναπαραμέτρηση δεν αλλάζει τις εφαπτόμενες.

Θεωρούμε την καμπύλη α , όπως στην Πρόταση 3.6.2, και μια οποιαδήποτε άλλη καμπύλη (μοναδιαίας ταχύτητας) $\bar{\alpha}: \bar{I} \rightarrow S$ με $\bar{\alpha}(0) = p$ και με την ίδια εφαπτομένη στο p . Προφανώς $\alpha'(0) = w = \bar{\alpha}'(0)$. Αν καλέσουμε \bar{k}_n (αντιστ. \bar{k}) την κάθετη καμπυλότητα (αντιστ. την καμπυλότητα) και $\bar{n}(0)$ το πρώτο κάθετο διάνυσμα της $\bar{\alpha}$ στο p , παρατηρούμε ότι

$$\cos \theta = \langle N(p), n(0) \rangle = \langle N(p), \bar{n}(0) \rangle .$$

Ακολουθώντας και για την $\bar{\alpha}$ την διαδικασία της απόδειξης της Πρότασης 3.6.2 βρίσκουμε ότι

$$\bar{k}_n = \Pi_p(w) = k_n,$$

που αποδεικνύει το θεώρημα. \square

Αν υποθέσουμε τώρα ότι δίνεται ένα τυχόν μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα $w \in T_p S$, μπορούμε πάντοτε να βρούμε (κάνοντας, αν είναι αναγκαίο, και μία αναπαραμέτρηση μέσω μήκους τόξου) μία καμπύλη μοναδιαίας ταχύτητας $\alpha: I \rightarrow S$ με $\alpha(0) = p$ και $\alpha'(0) = w$ (βλ. απόδειξη Θεωρήματος 2.6.2). Τότε

και πάλι ισχύει η σχέση (3.6.1). Επομένως, βάσει του Θεωρήματος Meusnier, έχουμε την επόμενη

Γεωμετρική ερμηνεία της δεύτερης θεμελιώδους μορφής Π_p στο p : η τιμή της σε ένα μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα $w \in T_p S$ συμπίπτει με την κάθετη καμπυλότητα οποιασδήποτε κανονικής καμπύλης (μοναδιαίας ταχύτητας) επί της S , η οποία διέρχεται από το p και έχει εφαπτόμενο διάνυσμα στο σημείο αυτό το w .

Από όσα είπαμε μέχρις εδώ προκύπτει και το εξής βασικό συμπέρασμα:

Η k_n δεν εξαρτάται τελικά από την καμπύλη α , αλλά μόνον από το διάνυσμα $w \in T_p S$.

Μπορούμε, επομένως, να γράφουμε ότι $k_n = k_n(w)$, δηλαδή η k_n είναι συνάρτηση των (μοναδιαίων) εφαπτομένων διανυσμάτων. Ο αριθμός $k_n(w)$ καλείται **κάθετη καμπυλότητα της S στην κατεύθυνση w** (normal curvature along the direction w).

Επειδή, όπως φαίνεται από την σχέση $k_n = k \cos \theta$, όλες οι καμπύλες α της επιφάνειας, που περνούν από το p με ταχύτητα w , έχουν καμπυλότητα $k \geq k_n(w)$, θα προσπαθήσουμε να προσδιορίσουμε μια καμπύλη που έχει την ελάχιστη δυνατή καμπυλότητα, δηλαδή έχει $k = k_n(w)$. Για το σκοπό αυτό προχωρούμε ως εξής:

Το κάθετο διάνυσμα $N(p)$ της S στο p και το $w \in T_p S$ ορίζουν ένα επίπεδο E που τέμνει την επιφάνεια κατά μήκος μιας γραμμής C , την οποίαν καλούμε **κάθετη τομή της S στο p στην κατεύθυνση w** (normal section of S at p along w). Η C μπορεί να θεωρηθεί εικόνα μιας επίπεδης καμπύλης α με $\alpha(0) = p$ και $\alpha'(0) = w$ (αυτό μπορεί να γίνει πάντοτε, τουλάχιστον σε μια περιοχή του p). Επειδή η α είναι επίπεδη, το κάθετο διάνυσμα της $n(0)$ στο p ανήκει στο επίπεδο E και είναι κάθετο στην ταχύτητα w , άρα $n(0) = \pm N(p)$, οπότε μπορούμε να θεωρήσουμε ότι $n(0) = N(p)$, εν ανάγκη αλλάζοντας τον προσανατολισμό από N σε $-N$. Επομένως, $\theta = 0$ και $k \equiv k(0) = k_n(w)$, όπου k είναι η καμπυλότητα της κάθετης τομής στο p .

Έτσι, η κάθετη τομή της S στο p στην κατεύθυνση w έχει την μικρότερη καμπυλότητα (στο p) από όλες τις καμπύλες που διέρχονται από το p και έχουν ταχύτητα w . Η μικρότερη αυτή καμπυλότητα συμπίπτει με την κάθετη καμπυλότητα στην κατεύθυνση του w .

Απ' το άλλο μέρος, αν αφήσουμε το διάνυσμα w να διατρέχει τον μοναδιαίο κύκλο μέσα στο $T_p S$, από τον τύπο του Euler (3.4.2), προκύπτει ότι η $\Pi_p(w) = k_n(w)$ παίρνει ακρότατες τιμές τις κύριες καμπυλότητες k_1 και k_2 .

Έστω S κανονική επιφάνεια και $p \in S$. Αν θεωρήσουμε το σύνολο

$$A := \{\alpha: I \rightarrow S : \text{καμπύλη μοναδιαίας ταχύτητας με } \alpha(0) = p\},$$

τα τελευταία συμπεράσματα συνοψίζονται ως εξής:

Για κάθε $w \in T_p S$ με $\|w\| = 1$, είναι

$$\begin{aligned} k_n(w) &= \min\{k_\alpha(0) : \alpha \in A \text{ με } \alpha'(0) = w\} \\ &= \text{καμπυλότητα της κάθετης τομής,} \end{aligned}$$

όπου k_α είναι η καμπυλότητα της καμπύλης α .

Επίσης, αφού $k_n(w) = \Pi_p(w)$ για $\|w\| = 1$ και οι κύριες καμπυλότητες k_1, k_2 είναι οι ακρότατες τιμές της Π_p πάνω στο μοναδιαίο κύκλο (βλ. τύπο του Euler), βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned} k_1 &= \max\{k_n(w) : w \in T_p S \text{ με } \|w\| = 1\}, \\ k_2 &= \min\{k_n(w) : w \in T_p S \text{ με } \|w\| = 1\}. \end{aligned}$$

Η σημασία των προηγουμένων έγκειται στο ότι μπορούμε να υπολογίσουμε τις κύριες καμπυλότητες k_1, k_2 (άρα και τις καμπυλότητες K και H) υπολογίζοντας τις καμπυλότητες μόνον καμπυλών που παίρνουν τιμές στην επιφάνεια. Αυτή είναι η προσέγγιση που ακολούθησε συστηματικά ο Euler. Όμως η μέθοδος του Gauss, που βασίζεται στη μεταβολή του καθέτου διανύσματος (βλ. Παράγραφο 3.3) αποδείχθηκε πιο γόνιμη και είχε πολύ σημαντικές συνέπειες για την εξέλιξη της Διαφορικής Γεωμετρίας εν γένει.

3.7 Ασκήσεις

Άσκηση 1. Θεωρούμε την παραμέτρηση του κυλίνδρου $K = S^1 \times \mathbb{R}$

$$r : (0, 2\pi) \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3 : (u, v) \mapsto (\cos u, \sin u, v)$$

[βλ. επίσης Παράδειγμα 3.2.5(1)] και την καμπύλη

$$\alpha : (0, 2\pi) \longrightarrow K : t \mapsto (\cos t, \sin t, t).$$

Να βρεθεί το μήκος της α μέσω στοιχείων του K .

Λύση. Παρατηρούμε ότι η α μπορεί να γραφτεί με την μορφή $\alpha = r \circ \beta$, όπου β είναι η (επίπεδη) καμπύλη

$$\beta : (0, 2\pi) \longrightarrow (0, 2\pi) \times \mathbb{R} : t \mapsto (t, t).$$

Επίσης, για την β είναι $\beta(t) = (u(t), v(t))$, όπου $u(t) = v(t) = t$. Επομένως $u = v = id_{(0, 2\pi)}$, οπότε $u'(t) = v'(t) = 1$, για κάθε $t \in (0, 2\pi)$.

Απ' το άλλο μέρος, για την θεωρούμενη παραμέτρηση του κυλίνδρου, έχουμε βρει ότι $E = G = 1$ και $F = 0$. Άρα,

$$\begin{aligned} L(\alpha) &= \int_0^{2\pi} \sqrt{u'(t)^2 E(\beta(t)) + 2u'(t)v'(t)F(\beta(t)) + v'(t)^2 G(\beta(t))} dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + 0 + 1} dt = 2\pi\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Άσκηση 2. Να αποδειχθεί ότι ο κύλινδρος $K = S^1 \times \mathbb{R}$ είναι προσανατολισίμος.

Λύση. Χρησιμοποιώντας την παραμέτρηση της προηγούμενης άσκησης

$$r(u, v) = (\cos u, \sin u, v); \quad (u, v) \in (0, 2\pi) \times \mathbb{R},$$

βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned} r_u &= (-\sin u, \cos u, 0) \\ r_v &= (0, 0, 1) \\ r_u \times r_v &= (\cos u, \sin u, 0) \\ \|r_u \times r_v\| &= 1 \end{aligned}$$

Άρα σε ένα σημείο $p = r(u, v) = (\cos u, \sin u, v)$, είναι $N(\cos u, \sin u, v) = (\cos u, \sin u, 0)$. Η απεικόνιση αυτή επεκτείνεται σε ένα ολικό διαφορίσιμο μοναδιαίο κάθετο διανυσματικό πεδίο

$$N: K \longrightarrow S^2 \subseteq \mathbb{R}^3: (x, y, z) \mapsto (x, y, 0).$$

Παρατηρούμε ότι η επέκταση αυτή είναι διαφορίσιμη, ως περιορισμός επί της επιφάνειας K της διαφορίσιμης απεικόνισης $\mathbb{R}^3 \ni (x, y, z) \mapsto (x, y, 0) \in \mathbb{R}^3$.

Άσκηση 3. Δίνεται μία κανονική επιφάνεια της μορφής $S = f^{-1}(c)$. Να υπολογιστεί το $N(p)$ μέσω της f , για τυχόν $p \in S$. Είναι η S προσανατολισίμη;

Λύση. Α' τρόπος [χρήσιμο τέχνασμα]: Σύμφωνα με την Άσκηση 16 του Κεφαλαίου 2, για κάθε $w = (w_1, w_2, w_3) \in T_p S$ είναι

$$w_1 \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_p + w_2 \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_p + w_3 \frac{\partial f}{\partial z} \Big|_p = 0.$$

Επομένως,

$$\nabla f(p) := \left(\frac{\partial f}{\partial x} \Big|_p, \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_p, \frac{\partial f}{\partial z} \Big|_p \right) \perp (w_1, w_2, w_3),$$

για κάθε $w = (w_1, w_2, w_3) \in T_p S$. Άρα το διάνυσμα

$$N(p) := \frac{\nabla f(p)}{\|\nabla f(p)\|}$$

είναι ένα μοναδιαίο διάνυσμα, κάθετο στον $T_p S$, για κάθε $p \in S$. Η αντίστοιχη απεικόνιση $N: S \rightarrow \mathbb{R}^3$ ορίζει έναν προσανατολισμό της S .

Β' Τρόπος [μέσω του Θεωρήματος των πεπλεγμένων συναρτήσεων]: Ας υποθέσουμε ότι (U, r, W) είναι ένα σύστημα συντεταγμένων με $r(u, v) =$

$(u, v, g(u, v))$, τέτοιο ώστε $p \in W$ και $f_z(p) \neq 0$ (βλ. Θεώρημα 2.2.1). Τότε, για το $q = r^{-1}(p)$, έχουμε ότι

$$r_u(q) = (1, 0, g_u(q)), \quad r_v(q) = (0, 1, g_v(q)),$$

οπότε

$$(*) \quad r_u(q) \times r_v(q) = (-g_u(q), -g_v(q), 1),$$

όπου, κατά τα γνωστά, έχουμε θέσει

$$g_u(q) := \frac{\partial g}{\partial u}(q), \quad g_v(q) := \frac{\partial g}{\partial v}(q).$$

Σύμφωνα με το Θεώρημα Πεπλεγμένης Συνάρτησης, οι μερικές παράγωγοι $g_u(q)$, $g_v(q)$ συνδέονται με τις μερικές παραγώγους της f με τις ακόλουθες σχέσεις

$$(A) \quad \begin{aligned} f_x(p) + f_z(p) \cdot g_u(q) &= 0, \\ f_y(p) + f_z(p) \cdot g_v(q) &= 0. \end{aligned}$$

από τις οποίες, λόγω της $f_z(p) \neq 0$, βρίσκουμε τις

$$g_u(q) = -f_x(p)/f_z(p), \quad g_v(q) = -f_y(p)/f_z(p).$$

Μέσω των τελευταίων, η (*) μετασχηματίζεται στην

$$r_u(q) \times r_v(q) = \frac{1}{f_z(p)} (f_x(p), f_y(p), f_z(p)) = \frac{\nabla f(p)}{f_z(p)}.$$

Επομένως,

$$N(p) = \frac{\frac{\nabla f(p)}{f_z(p)}}{\frac{\|\nabla f(p)\|}{|f_z(p)|}} = \pm \frac{\nabla f(p)}{\|\nabla f(p)\|}.$$

Η σχέση αυτή ισχύει για κάθε $p \in W$. Μπορούμε να επιλέξουμε

$$N(p) = \frac{\nabla f(p)}{\|\nabla f(p)\|}$$

και να ορίσουμε έναν αντίστοιχο προσανατολισμό N , επεκτείνοντας την προηγούμενη σχέση σ' ολόκληρη την επιφάνεια S .

ΣΗΜΕΙΩΣΗ. Για διευκόλυνση του αναγνώστη αποδεικνύουμε τις σχέσεις (A): Επειδή $f(u, v, g(u, v)) = c$, για κάθε $(u, v) \in U$, μπορούμε να γράψουμε ότι

$f(r(u, v)) = c$, για κάθε $(u, v) \in U$, δηλαδή $f \circ r = c$. Παραγωγίζοντας την τελευταία σχέση στο $q = r^{-1}(p)$, βρίσκουμε ότι

$$0 = D(f \circ r)(q) = Df(p) \circ Dr(q),$$

από την οποία προκύπτει η αντίστοιχη σχέση των πινάκων Jacobi

$$(J_p f) \cdot (J_q r) = 0.$$

Επειδή $f \equiv f(x, y, z)$ και $g \equiv g(u, v)$, έχουμε ότι

$$J_p f = (f_x(p), f_y(p), f_z(p)),$$

$$J_q r = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ g_u(q) & g_v(q) \end{pmatrix}.$$

Ο πολλαπλασιασμός των πινάκων αυτών οδηγεί στις ζητούμενες σχέσεις.

Άσκηση 4. Υποθέτουμε ότι S είναι μία *συνεκτική* κανονική επιφάνεια, της οποίας όλες οι κάθετοι διέρχονται από ένα δεδομένο σταθερό σημείο A του χώρου. Να αποδειχθεί ότι η επιφάνεια κείται επι σφαίρας.

Λύση. Ας καλέσουμε a το διάνυσμα θέσης του σημείου A . Θεωρούμε μία παραμέτρηση (U, r, W) . Αν $p \in W$ είναι τυχόν σημείο, η κάθετος της επιφάνειας σ' αυτό είναι η ευθεία

$$\eta_p(t) = p + tN(p), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Επομένως, υπάρχει κάποιο $t_p \in \mathbb{R}$, τέτοιο ώστε

$$p + t_p N(p) = a.$$

Ανάλογα ισχύουν και για τα υπόλοιπα σημεία της W , οπότε η συνθήκη της εκφώνησης περιγράφεται από την σχέση

$$(1) \quad p + \lambda(p)N(p) = a; \quad p \in W,$$

όπου $\lambda: W \rightarrow \mathbb{R}$. Η συνάρτηση λ είναι διαφορίσιμη: Πράγματι, αν «πολλαπλασιάσουμε εσωτερικά» την (1) με $N(p)$, έχουμε ότι

$$\lambda(p) = \langle p - a, N(p) \rangle,$$

που αποδεικνύει το ζητούμενο, αφού το δεξιό μέλος είναι σύνθεση της διαφορίσιμης απεικόνισης

$$W \ni p \mapsto (p - a, N(p)) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$$

με το εσωτερικό γινόμενο $\langle \cdot, \cdot \rangle: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, που είναι επίσης διαφορίσιμη απεικόνιση ως διγραμμική.

Επειδή $p = r(q)$, $q \in U$, από την (1) παίρνουμε την ισοδύναμη σχέση

$$r(q) + (\lambda \circ r)(q) \cdot (N \circ r)(q) = a; \quad q \in U,$$

την οποίαν μπορούμε να παραγωγίσουμε με τον συνήθη τρόπο (για συναρτήσεις μεταξύ ευκλειδείων χώρων). Επομένως, χρησιμοποιώντας συμβολισμούς ανάλογους προς τους (3.3.5), βρίσκουμε:

$$\begin{aligned} -r_u(q) &= \left. \frac{\partial(\lambda \circ r)}{\partial u} \right|_q \cdot (N \circ r)(q) + (\lambda \circ r)(q) \cdot \left. \frac{\partial(N \circ r)}{\partial u} \right|_q \\ (2) \quad &= \left. \frac{\partial(\lambda \circ r)}{\partial u} \right|_q \cdot N(p) + \lambda(p) \cdot N_u(q), \end{aligned}$$

και, παρόμοια,

$$(3) \quad -r_v(q) = \left. \frac{\partial(\lambda \circ r)}{\partial v} \right|_q \cdot N(p) + \lambda(p) \cdot N_v(q).$$

Παίρνοντας το εσωτερικό γινόμενο των (2) και (3) με το $N(p)$, έχουμε:

$$\begin{aligned} -\langle r_u(q), N(p) \rangle &= \left. \frac{\partial(\lambda \circ r)}{\partial u} \right|_q \langle N(p), N(p) \rangle + \lambda(p) \langle N_u(q), N(p) \rangle, \\ -\langle r_v(q), N(p) \rangle &= \left. \frac{\partial(\lambda \circ r)}{\partial v} \right|_q \langle N(p), N(p) \rangle + \lambda(p) \langle N_v(q), N(p) \rangle. \end{aligned}$$

Λαμβάνοντας τώρα υπ' όψιν τις (3.3.8) και ότι $N \perp N_u, N_v$ (από την παραγωγή της $\langle N \circ r, N \circ r \rangle = 1$ ως προς u και v), οι παραπάνω σχέσεις μετασχηματίζονται στην

$$\left. \frac{\partial(\lambda \circ r)}{\partial u} \right|_q = \left. \frac{\partial(\lambda \circ r)}{\partial v} \right|_q = 0,$$

απ' όπου προκύπτει ότι $D(\lambda \circ r)(q) = 0$, $\forall q \in U$, άρα η $\lambda \circ r$ είναι σταθερή στο U , οπότε και η λ είναι σταθερή στο W . Λόγω της συνεκτικότητας της S , τελικά η λ είναι σταθερή σ' ολόκληρη την επιφάνεια, δηλαδή $\lambda = c$. Επανερχόμενοι τώρα στην (1) έχουμε ότι

$$\|p - a\| = |c| \cdot \|N(p)\| = |c|; \quad \forall p \in S,$$

η οποία αποδεικνύει τον ισχυρισμό της άσκησης.

Άσκηση 5. Να αποδειχθεί ότι σε κάθε σημείο μιας γενέτειρας του κυλίνδρου το εφαπτόμενο επίπεδο μένει σταθερό (βλ. επίσης και την Άσκηση 15 του Κεφαλαίου 2).

Λύση. Όπως στις Ασκήσεις 1 και 2, και την Άσκηση 15 του Κεφαλαίου 2, θεωρούμε την παραμέτρηση του κυλίνδρου K

$$r(u, v) = (\cos u, \sin u, v), \quad (u, v) \in (0, 2\pi) \times \mathbb{R}.$$

Θυμίζουμε μια γενέτειρα είναι το σύνολο των σημείων

$$\Gamma = \{r(u_o, v) : v \in \mathbb{R}\},$$

για ένα σταθερό u_o . Επειδή $T_p K \perp N(p)$, για να δείξουμε ότι το $T_p K$ παραμένει σταθερό όταν το $p = r(u_o, v)$ διατρέχει το Γ , αρκεί να δείξουμε ότι $N(p)$ παραμένει σταθερό. Επειδή

$$r_u(u_o, v) = (-\sin u_o, \cos u_o, 0), \quad r_v(u_o, v) = (0, 0, 1)$$

βρίσκουμε αμέσως ότι

$$N(p) = (\cos u_o, \sin u_o, 0),$$

που είναι ανεξάρτητο του v .

Άσκηση 6. Δίνεται η παραμέτρηση

$$r(u, v) = (g(u), h(u) \cos v, h(u) \sin v); \quad (u, v) \in (a, b) \times (0, 2\pi),$$

με $h(u) > 0$, $g'(u) \neq 0$ και $(g'(u))^2 + (h'(u))^2 = 1$, $\forall u \in (a, b)$. Να αποδειχθεί ότι όλες οι κάθετοι της επιφάνειας, που παράγεται από την r , τέμνουν τον άξονα των x .

Λύση. Η παραγόμενη επιφάνεια είναι η επιφάνεια εκ περιστροφής, περι τον άξονα των x , της καμπύλης (μοναδιαίας ταχύτητας) $\alpha(u) = (g(u), h(u), 0)$. Κατά τα γνωστά, έχουμε:

$$\begin{aligned} r_u &= (g'(u), h'(u) \cos v, h'(u) \sin v), \\ r_v &= (0, -h(u) \sin v, h(u) \cos v), \\ r_u \times r_v &= (h(u)h'(u), -g'(u)h(u) \cos v, -g'(u)h(u) \sin v), \\ \|r_u \times r_v\|^2 &= h(u)^2 \Rightarrow \|r_u \times r_v\| = h(u). \end{aligned}$$

Άρα, το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα σε τυχόν σημείο $p_o = r(u_o, v_o)$ της επιφάνειας είναι το

$$\begin{aligned} N(p_o) &= \frac{1}{h(u_o)} (h(u_o)h'(u_o), -g'(u_o)h(u_o) \cos v_o, -g'(u_o)h(u_o) \sin v_o) \\ &= (h'(u_o), -g'(u_o) \cos v_o, -g'(u_o) \sin v_o). \end{aligned}$$

Η κάθετη ευθεία στο σημείο p_o είναι η ευθεία

$$\eta_{p_o}(t) = p_o + tN(p_o) = (g(u_o) + th'(u_o), (h(u_o) - g'(u_o)t) \cos v_o, (h(u_o) - g'(u_o)t) \sin v_o).$$

Παρατηρούμε ότι, για

$$t = \frac{h(u_o)}{g'(u_o)},$$

παίρνουμε το σημείο

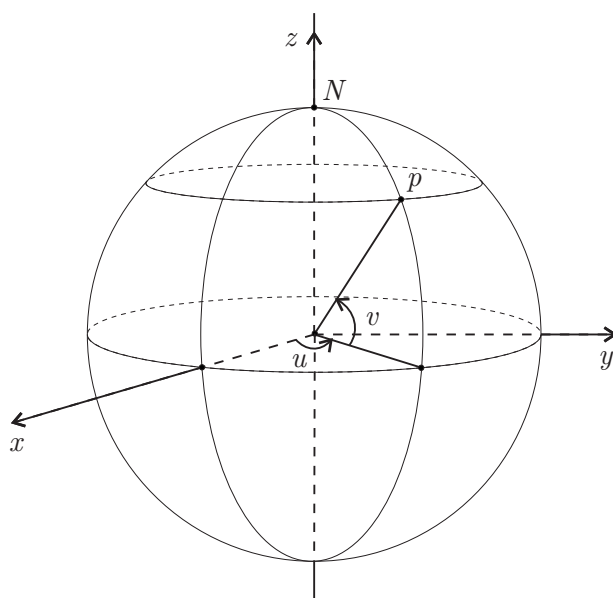
$$\left(g(u_o) + h'(u_o) \frac{h(u_o)}{g'(u_o)}, 0, 0 \right)$$

της κάθετης ευθείας, που ανήκει στον άξονα των x .

Άσκηση 7. Να βρεθεί το εμβαδόν της σφαίρας με κέντρο 0 και ακτίνα r .

Λύση. Εδώ θα χρησιμοποιήσουμε την παραμέτρηση με γεωγραφικές συντεταγμένες (U, χ, W) , όπου

$$\begin{aligned} \chi: U = (0, 2\pi) \times (-\pi/2, \pi/2) &\longrightarrow \mathbb{R}^3: \\ (u, v) &\mapsto (r \cos v \cos u, r \cos v \sin u, r \sin v). \end{aligned}$$



Σχήμα 3.3

Το W καλύπτει όλη την σφαίρα πλην ενός μεγίστου ημικυκλίου. Όπως φαίνεται και στο προηγούμενο σχήμα, η παραπάνω παραμέτρηση αποτελεί παραμέτρηση μιας επιφάνειας εκ περιστροφής, η οποία προκύπτει αν περιστρέψουμε περί τον άξονα των z ένα ημικύκλιο. Η γωνία u μετρά το γεωγραφικό μήκος, άρα προσδιορίζει τον μεσημβρινό ενός τόπου, ενώ η γωνία v μετρά το γεωγραφικό πλάτος, άρα προσδιορίζει το γεωγραφικό πλάτος του τόπου.

Η απόδειξη ότι η αναφερόμενη τριάδα (U, χ, W) αποτελεί πραγματικά μία παραμέτρηση επιφάνειας είναι στοιχειώδης.

Επειδή, όπως είπαμε, με την παραπάνω παραμέτρηση καλύπτεται ολόκληρη η σφαίρα εκτός ενός μεγίστου ημικυκλίου, του οποίου το εμβαδόν είναι 0, το εμβαδόν της σφαίρας συμπίπτει με το εμβαδόν του W (βλ. και Παρατηρήσεις 3.2.4). Για το τελευταίο, υπολογίζουμε τα θεμελιώδη μεγέθη 1ης τάξης:

$$\begin{aligned}\chi_u &= (-r \cos v \sin u, r \cos v \cos u, 0), \\ \chi_v &= (-r \sin v \cos u, -r \sin v \sin u, r \cos v), \\ E &= \langle \chi_u, \chi_u \rangle = r^2 \cos^2 v, \\ F &= \langle \chi_u, \chi_v \rangle = 0, \\ G &= \langle \chi_v, \chi_v \rangle = r^2,\end{aligned}$$

οπότε προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}A(S^2) &= \iint_U \sqrt{EG - F^2} \, du \, dv = \iint_U \sqrt{r^4 \cos^2 v} \, du \, dv \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2\pi} r^2 \cos v \, du \, dv = r^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\int_0^{2\pi} du \right) \cos v \, dv \\ &= 2\pi r^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos v \, dv = 2\pi r^2 \sin v \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = 4\pi r^2.\end{aligned}$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ. 1) Όπως φάνηκε στην προτεινόμενη λύση, η παραμέτρηση που χρησιμοποιήθηκε οδηγεί σε εύκολους υπολογισμούς, αφού δεν εμπλέκει τους πολύπλοκους τύπους των στερεογραφικών προβολών ή των ημισφαιρίων.

2) Θα μπορούσαμε επίσης να βρούμε το εμβαδόν, υπολογίζοντας, αντί των θεμελιωδών μεγεθών, το $\|\chi_u \times \chi_v\|$ (βλ. Πρόταση 3.2.3).

Άσκηση 8. Να υπολογιστεί το εμβαδόν της σπείρας (torus) T (βλ. το Παράδειγμα στο τέλος της Παραγράφου 2.4).

Λύση. Η απεικόνιση

$$\chi(u, v) = ((a + \rho \cos v) \cos u, (a + \rho \cos v) \sin u, \rho \sin v),$$

με $0 < \rho < a$ και $0 < u, v < 2\pi$, ορίζει μία παραμέτρηση που καλύπτει την επιφάνεια της σπείρας πλην ενός συνόλου μηδενικού εμβαδού. Με το σκεπτικό της προηγούμενης άσκησης, υπολογίζουμε τα μεγέθη:

$$\begin{aligned}\chi_u &= (- (a + \rho \cos v) \sin u, (a + \rho \cos v) \cos u, 0), \\ \chi_v &= (-\rho \sin v \cos u, -\rho \sin v \sin u, \rho \cos v), \\ E &= \langle \chi_u, \chi_u \rangle = (a + \rho \cos v)^2, \\ F &= \langle \chi_u, \chi_v \rangle = 0, \\ G &= \langle \chi_v, \chi_v \rangle = \rho^2, \\ \sqrt{EG - F^2} &= \rho(a + \rho \cos v),\end{aligned}$$

οπότε βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned}A(T) &= \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \rho(a + \rho \cos v) du dv \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{2\pi} du \right) \rho(a + \rho \cos v) dv \\ &= 2\pi \int_0^{2\pi} \rho(a + \rho \cos v) dv = \\ &= 2\pi \rho a \int_0^{2\pi} dv + 2\pi \rho^2 \int_0^{2\pi} \cos v dv = \\ &= 4\pi^2 \rho a + 0 = 4\pi^2 \rho a.\end{aligned}$$

Άσκηση 9. Να υπολογιστεί το εμβαδόν του τμήματος K του παραβολοειδούς $z = x^2 + y^2$, το οποίο (τμήμα) καθορίζεται από τις συνθήκες $x, y \geq 0$ και $z \in [0, 1]$.

Λύση. Ολόκληρη η επιφάνεια του δοθέντος παραβολοειδούς καλύπτεται από την εικόνα της παραμέτρησης

$$\chi(u, v) = (u, v, u^2 + v^2), \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2.$$

Για την παραμέτρηση αυτή έχουμε:

$$\begin{aligned}\chi_u &= (1, 0, 2u), \quad \chi_v = (0, 1, 2v), \\ E &= \langle \chi_u, \chi_u \rangle = 1 + 4u^2, \\ F &= \langle \chi_u, \chi_v \rangle = 4uv \\ G &= \langle \chi_v, \chi_v \rangle = 1 + 4v^2, \\ EG - F^2 &= 1 + 4u^2 + 4v^2.\end{aligned}$$

Απ' το άλλο μέρος,

$$D = \chi^{-1}(K) = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u, v \geq 0, 0 \leq u^2 + v^2 \leq 1\},$$

δηλαδή το D είναι το πρώτο (άνω δεξιά) τεταρτημόριο του μοναδιαίου δίσκου. Επομένως,

$$A(K) = \iint_D \sqrt{EG - F^2} \, du \, dv = \iint_D \sqrt{1 + 4u^2 + 4v^2} \, du \, dv.$$

Για να υπολογίσουμε το τελευταίο ολοκλήρωμα θα χρησιμοποιήσουμε *πολικές συντεταγμένες*. Έτσι θέτουμε

$$u = \rho \cos \theta, \quad v = \rho \sin \theta, \quad \text{με } 0 \leq \rho \leq 1, \quad 0 \leq \theta \leq \pi/2,$$

οπότε

$$\begin{aligned} A(K) &= \int_0^1 \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 + 4\rho^2 \cos^2 \theta + 4\rho^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial(u, v)}{\partial(\rho, \theta)} \, d\rho \, d\theta \\ &= \int_0^1 \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 + 4\rho^2} \, \rho \, d\rho \, d\theta = \int_0^1 \left(\int_0^{\pi/2} d\theta \right) \sqrt{1 + 4\rho^2} \, \rho \, d\rho \\ &= \frac{\pi}{2} \int_0^1 \frac{1}{12} \left((1 + 4\rho^2)^{3/2} \right)' \, d\rho = \frac{\pi}{24} (1 + 4\rho^2)^{3/2} \Big|_0^1 \\ &= \frac{\pi}{24} (5\sqrt{5} - 1). \end{aligned}$$

Άσκηση 10. Δίνεται μία κανονική επιφάνεια S και ένα σύστημα συντεταγμένων $(\mathbb{R}^2, \chi, \chi(\mathbb{R}^2))$ αυτής, με αντίστοιχα θεμελιώδη μεγέθη

$$E(u, v) = 1 + u^2, \quad F(u, v) = -uv, \quad G(u, v) = 1 + v^2; \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2.$$

(i) Θεωρούμε την καμπύλη $\alpha(t) := \chi(t, 2t)$. Να αποδειχθεί ότι, για $t_0 = 0$, το μήκος τόξου της α δίνεται από την ισότητα

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{5 + 9w^2} \, dw.$$

(ii) Αν $D = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u^2 + v^2 < 2\}$, να υπολογιστεί το εμβαδόν του $\chi(D)$.

(iii) Να βρεθεί η γωνία που σχηματίζει η προηγούμενη καμπύλη α με την καμπύλη $\beta(s) = \chi(1, s)$.

Λύση. (i) Η α γράφεται μονοσήμαντα ως $\alpha = \chi \circ \bar{\alpha}$, όπου $\bar{\alpha} = (u, v)$ επίπεδη καμπύλη. Από την υπόθεση, $\bar{\alpha}(t) = (u(t), v(t)) = (t, 2t)$. Άρα

$$\begin{aligned} s(t) &= \int_0^t \|\alpha'(w)\| dw \\ &= \int_0^t \sqrt{u'(w)^2 E(\bar{\alpha}(w)) + 2u'(w)v'(w)F(\bar{\alpha}(w)) + v'(w)^2 G(\bar{\alpha}(w))} dw \\ &= \int_0^t \sqrt{1 \cdot E(w, 2w) + 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot F(w, 2w) + 4 \cdot G(w, 2w)} dw \\ &= \int_0^t \sqrt{1 + w^2 - 8w^2 + 4 + 16w^2} dw = \int_0^t \sqrt{5 + 9w^2} dw. \end{aligned}$$

(ii) Επειδή $EG - F^2 = 1 + u^2 + v^2$, έχουμε ότι

$$A(\chi(D)) = \iint_D \sqrt{EG - F^2} du dv = \iint_D \sqrt{1 + u^2 + v^2} du dv.$$

Όπως στην προηγούμενη άσκηση, χρησιμοποιούμε πολικές συντεταγμένες. Θέτοντας

$$u = \rho \cos \theta, \quad v = \rho \sin \theta, \quad \text{με } 0 \leq \rho \leq 2, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi,$$

βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned} A(\chi(D)) &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 \sqrt{1 + \rho^2 \cos^2 \theta + \rho^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial(u, v)}{\partial(\rho, \theta)} d\rho d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 \rho \sqrt{1 + \rho^2} d\rho d\theta = \pi \int_0^2 2\rho \sqrt{1 + \rho^2} d\rho \\ &= \pi \int_0^2 \frac{2}{3} \left((1 + \rho^2)^{3/2} \right)' d\rho = \frac{2\pi}{3} (1 + \rho^2)^{3/2} \Big|_0^2 \\ &= \frac{2\pi}{3} (5\sqrt{5} - 1). \end{aligned}$$

(iii) Η β γράφεται επίσης μονοσήμαντα με την μορφή $\beta = \chi \circ \bar{\beta}$, όπου $\bar{\beta}$ επίπεδη καμπύλη. Από την υπόθεση, $\bar{\alpha}(s) = (1, s)$. Ας προσδιορίσουμε το σημείο p στο οποίο τέμνονται οι καμπύλες α και β . Θα πρέπει να υπάρχουν t και s (στα πεδία ορισμού των α και β αντιστοίχως), τέτοια ώστε

$$\begin{aligned} p = \alpha(t) = \beta(s) &\Leftrightarrow \chi(t, 2t) = \chi(1, s) \\ &\Leftrightarrow (t, 2t) = (1, s) \\ &\Leftrightarrow t = 1 \text{ και } s = 2, \end{aligned}$$

άρα

$$p = \alpha(1) = \beta(2) = \chi(1, 2)$$

Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} \alpha'(t) &= (\chi \circ \bar{\alpha})'(t) = [D\chi(\bar{\alpha}(t))](\bar{\alpha}'(t)) \\ &= [D\chi(t, 2t)](1, 2) = [D\chi(t, 2t)](e_1 + 2e_2) \\ &= \left. \frac{\partial \chi}{\partial u} \right|_{(t, 2t)} + 2 \left. \frac{\partial \chi}{\partial v} \right|_{(t, 2t)} \\ &= \chi_u(t, 2t) + 2\chi_v(t, 2t), \end{aligned}$$

συνεπώς

$$\begin{aligned} \|\alpha'(1)\| &= \|\chi_u(1, 2) + 2\chi_v(1, 2)\| \\ &= \langle \chi_u(1, 2) + 2\chi_v(1, 2), \chi_u(1, 2) + 2\chi_v(1, 2) \rangle^{1/2} \\ &= (\langle \chi_u(1, 2), \chi_u(1, 2) \rangle + 4 \langle \chi_u(1, 2), \chi_v(1, 2) \rangle + \\ &\quad + 4 \langle \chi_v(1, 2), \chi_v(1, 2) \rangle)^{1/2} \\ &= (E(1, 2) + 4F(1, 2) + 4G(1, 2))^{1/2} = \sqrt{14}. \end{aligned}$$

Παρόμοια, για την καμπύλη β , έχουμε

$$\begin{aligned} \beta'(s) &= (\chi \circ \bar{\beta})'(s) = [D\chi(\bar{\beta}(s))](\bar{\beta}'(s)) = [D\chi(1, s)](0, 1) \\ &= [D\chi(1, s)](e_2) = \left. \frac{\partial \chi}{\partial v} \right|_{(1, s)} = \chi_v(1, s), \end{aligned}$$

οπότε

$$\begin{aligned} \|\beta'(2)\| &= \|\chi_v(1, 2)\| = \langle \chi_v(1, 2), \chi_v(1, 2) \rangle^{1/2} \\ &= G(1, 2)^{1/2} = \sqrt{5}. \end{aligned}$$

Επίσης,

$$\begin{aligned} \langle \alpha'(1), \beta'(2) \rangle &= \langle \chi_u(1, 2) + 2\chi_v(1, 2), \chi_v(1, 2) \rangle \\ &= \langle \chi_u(1, 2), \chi_v(1, 2) \rangle + 2 \langle \chi_v(1, 2), \chi_v(1, 2) \rangle \\ &= F(1, 2) + 2G(1, 2) = -2 + 10 = 8. \end{aligned}$$

Άρα, τελικά,

$$\cos \theta = \frac{\langle \alpha'(1), \beta'(2) \rangle}{\|\alpha'(1)\| \|\beta'(2)\|} = \frac{8}{\sqrt{14}\sqrt{5}} = \frac{8}{\sqrt{70}}.$$

Άσκηση 11. Σε μια παραμέτρηση r είναι $E = 1$ και $F = 0$. Να αποδειχθεί ότι οι v -παραμετρικές καμπύλες αποκόπτον από τις u -παραμετρικές καμπύλες ίσα τμήματα.

Λύση. Θεωρούμε δύο v -παραμετρικές καμπύλες $\beta_1(t) = r(u_1, t)$ και $\beta_2(t) = r(u_2, t)$, καθώς και την u -παραμετρική καμπύλη $\alpha(t) = r(t, v_0)$. Επειδή η α γράφεται με την μορφή $\alpha = r \circ (u, v)$, όπου $u(t) = t$ και $v(t) = v_0$, το μήκος της α ανάμεσα στις β_1 και β_2 είναι το

$$\begin{aligned} L(\alpha) &= \int_{u_1}^{u_2} \sqrt{u'(t)^2 E + 2u'(t)v'(t)F + v'(t)^2 G} dt \\ &= \int_{u_1}^{u_2} \sqrt{1 + 0 + 0} dt = u_2 - u_1, \end{aligned}$$

που είναι σταθερό για όλες τις α . Στον παραπάνω τύπο εννοείται ότι

$$E = E(u(t), v(t)), \quad F = F(u(t), v(t)), \quad G = G(u(t), v(t)).$$

Άσκηση 12. Να αποδειχθεί ότι στην (μοναδιαία σφαίρα κέντρου 0) S^2 η πρώτη και η δεύτερη θεμελιώδεις μορφές συμπίπτουν.

Λύση. Η επιφάνεια S^2 δέχεται τον ολικό προσανατολισμό $N(p) = -p$, $p \in S^2$ (βλ. Παράδειγμα 3.1.3). Εδώ αξίζει να σημειώσουμε ότι η επιλογή του αρνητικού σημείου γίνεται για να έχουμε μέση καμπυλότητα θετική. Επομένως, θεωρώντας το N ως απεικόνιση με τιμές επίσης στην S^2 , έχουμε ότι $-N = id_{S^2} = id_{\mathbb{R}^3}|_{S^2}$. Οπότε (βλ. και Άσκηση 23 του Κεφαλαίου 2)

$$-d_p N = d_p id_{S^2} = id_{T_p S^2},$$

συνεπώς, για κάθε $w \in T_p S$, είναι

$$\Pi_p(w) = \langle -d_p N(w), w \rangle = \langle w, w \rangle = I_p(w).$$

Άσκηση 13. Να βρεθούν η καμπυλότητα Gauss και η μέση καμπυλότητα της επιφάνειας της σφαίρας $S(0, r)$ με κέντρο 0 και ακτίνα r .

Λύση. Θα επιλύσουμε την άσκηση με δύο τρόπους, προκειμένου να έχουμε ένα πλήρες υπόδειγμα.

Κατ' αρχάς, εργαζόμενοι όπως στην περίπτωση της μοναδιαίας σφαίρας με κέντρο 0, βλέπουμε ότι μπορούμε να παραμετρήσουμε το βόρειο ημισφαίριο μέσω της απεικόνισης

$$\chi(u, v) = (u, v, w); \quad (u, v) \in D(0, r),$$

όπου, για ευκολία, έχουμε θέσει $w = \sqrt{r^2 - u^2 - v^2}$. Ανάλογες παραμετρήσεις ορίζονται και για τα υπόλοιπα ημισφαίρια. Επομένως βρίσκουμε ότι

$$(1) \quad \begin{aligned} \chi_u &= \left(1, 0, -\frac{u}{w}\right), & \chi_v &= \left(0, 1, -\frac{v}{w}\right), \\ \chi_v \times \chi_u &= \frac{1}{w}(u, v, w), & \|\chi_u \times \chi_v\| &= \frac{r}{w}. \end{aligned}$$

Στο ημισφαίριο αυτό επιλέγουμε τον προσανατολισμό

$$N(p) = -\frac{\chi_u(q) \times \chi_v(q)}{\|\chi_u(q) \times \chi_v(q)\|} = -\frac{1}{r}(u, v, w) = -\frac{1}{r}p,$$

όπου $p = (u, v, w)$, ο οποίος επεκτείνεται σ' ολόκληρη την σφαίρα.

Για τον υπολογισμό των καμπυλοτήτων προχωρούμε τώρα ως εξής.

Α' τρόπος. Μέσω του πίνακα του διαφορικού:

Στο βόρειο ημισφαίριο (παρόμοια και στα άλλα) έχουμε την σχέση

$$(N \circ \chi)(u, v) = -\frac{1}{r}(u, v, w); \quad (u, v) \in D(0, r),$$

από την οποία βρίσκουμε ότι, για κάθε $q = (u, v) \in D(0, r)$,

$$(2) \quad N_u(q) = -\frac{1}{r} \left(1, 0, -\frac{u}{w}\right) = -\frac{1}{r}\chi_u(q),$$

$$(3) \quad N_v(q) = -\frac{1}{r} \left(0, 1, -\frac{v}{w}\right) = -\frac{1}{r}\chi_v(q).$$

Συνεπώς, για $p = \chi(q)$,

$$d_p N(\chi_u(q)) = N_u(q) = -\frac{1}{r}\chi_u(q) + 0\chi_v(q),$$

$$d_p N(\chi_v(q)) = N_v(q) = 0\chi_u(q) - \frac{1}{r}\chi_v(q),$$

οπότε ο πίνακας του διαφορικού $-d_p N$ είναι

$$A = \begin{pmatrix} 1/r & 0 \\ 0 & 1/r \end{pmatrix}$$

που έχει ιδιοτιμές $k_1 = k_2 = 1/r$. Τις ίδιες τιμές βρίσκουμε για όλα τα σημεία p της σφαίρας. Άρα

$$\begin{aligned} K &= \det A = k_1 k_2 = \frac{1}{r^2}, \\ H &= \frac{1}{2} \operatorname{tr} A = \frac{1}{2}(k_1 + k_2) = \frac{1}{r}. \end{aligned}$$

Β' τρόπος. Μέσω των θεμελιωδών μεγεθών:

Επειδή έχουμε ήδη υπολογίσει τα μεγέθη χ_u, χ_v, N_u, N_v , μας συμφέρει να χρησιμοποιήσουμε τους τύπους (3.4.4). Άλλωστε, οι τύποι (3.4.9) απαιτούν να παραγωγίσουμε τα χ_u, χ_v , πράγμα που (εδώ) είναι πολυπλοκότερο από την παραγωγή της $N \circ \chi$. Στην παρούσα περίπτωση, επίσης, δεν είναι απαραίτητο να εκτελέσουμε και όλες τις πράξεις, λόγω των παραπάνω σχέσεων (2) και (3). Έτσι βρίσκουμε:

$$\begin{aligned} e &= - \langle N_u, \chi_u \rangle = - \left\langle -\frac{1}{r} \chi_u, \chi_u \right\rangle = \frac{1}{r} E, \\ f &= - \langle N_u, \chi_v \rangle = - \left\langle -\frac{1}{r} \chi_u, \chi_v \right\rangle = \frac{1}{r} F, \\ g &= - \langle N_v, \chi_v \rangle = - \left\langle -\frac{1}{r} \chi_v, \chi_v \right\rangle = \frac{1}{r} G. \end{aligned}$$

Επομένως,

$$\begin{aligned} K &= \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = \frac{1}{r^2} \frac{EG - F^2}{EG - F^2} = \frac{1}{r^2}, \\ H &= \frac{1}{2} \frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2} = \frac{1}{2r} \frac{EG - 2FF + GE}{EG - F^2} = \frac{1}{r}. \end{aligned}$$

Άσκηση 14. Να υπολογιστούν η καμπυλότητα Gauss και η μέση καμπυλότητα της σπείρας, (torus) T και να γίνει σχετική διερεύνηση της μεταβολής της πρώτης.

Λύση. Θεωρούμε την συνήθη παραμέτρηση της σπείρας

$$\chi(u, v) = ((a + \rho \cos v) \cos u, (a + \rho \cos v) \sin u, \rho \sin v),$$

όπου $0 < \rho < a$ και $0 < u < 2\pi, 0 < v < 2\pi$. Ήδη γνωρίζουμε (βλ. Άσκηση 8) ότι

$$\begin{aligned} \chi_u &= (-(a + \rho \cos v) \sin u, (a + \rho \cos v) \cos u, 0), \\ \chi_v &= (-\rho \sin v \cos u, -\rho \sin v \sin u, \rho \cos v), \\ E &= \langle \chi_u, \chi_u \rangle = (a + \rho \cos v)^2, \\ F &= \langle \chi_u, \chi_v \rangle = 0, \\ G &= \langle \chi_v, \chi_v \rangle = \rho^2. \end{aligned}$$

Για να βρούμε το μοναδιαίο κάθετο διανυσματικό πεδίο, που ορίζεται από την ανωτέρω παραμέτρηση, έχουμε

$$\begin{aligned} \chi_u \times \chi_v &= \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -(a + \rho \cos v) \sin u & (a + \rho \cos v) \cos u & 0 \\ -\rho \sin v \cos u & -\rho \sin v \sin u & \rho \cos v \end{vmatrix} \\ &= (\rho(a + \rho \cos v) \cos u \cos v, \rho(a + \rho \cos v) \sin u \sin v, \rho(a + \rho \cos v) \sin v), \end{aligned}$$

και

$$\|\chi_u \times \chi_v\| = \rho(a + \rho \cos v),$$

οπότε

$$N \circ \chi = \frac{\chi_u \times \chi_v}{\|\chi_u \times \chi_v\|} = (\cos u \cos v, \sin u \cos v, \sin v).$$

Υπολογίζοντας τώρα τις μερικές παραγώγους των χ_u, χ_v , παίρνουμε

$$\begin{aligned}\chi_{uu} &= (-(a + \rho \cos v) \cos u, -(a + \rho \cos v) \sin u, 0), \\ \chi_{uv} &= (\rho \sin v \sin u, -\rho \sin v \cos u, 0), \\ \chi_{vv} &= (-\rho \cos v \cos u, -\rho \cos v \sin u, -\rho \sin v).\end{aligned}$$

Συμπεπώς,

$$\begin{aligned}e &= \langle N \circ \chi, \chi_{uu} \rangle = -(a + \rho \cos v) \cos v, \\ f &= \langle N \circ \chi, \chi_{uv} \rangle = 0, \\ g &= \langle N \circ \chi, \chi_{vv} \rangle = -\rho.\end{aligned}$$

Άρα

$$\begin{aligned}K &= \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = \frac{\cos v}{\rho(a + \rho \cos v)}, \\ H &= \frac{1}{2} \frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2} = -\frac{a + 2\rho \cos v}{2\rho(a + \rho \cos v)}.\end{aligned}$$

Ας δούμε την μεταβολή της καμπυλότητας K σε σχέση με την μεταβολή του $v \in (0, 2\pi)$. Κρατώντας το $v = \frac{\pi}{2}$ σταθερό, διαγράφουμε τον "επάνω" οριζόντιο κύκλο της σπείρας, ενώ για $v = \frac{3\pi}{2}$, διαγράφουμε τον "κάτω" οριζόντιο κύκλο. Σε όλα τα σημεία των δύο αυτών κύκλων είναι $\cos v = 0$ και $K = 0$.

Για $0 < v < \frac{\pi}{2}$ και για $\frac{3\pi}{2} < v < 2\pi$, έχουμε $\cos v > 0$, άρα $K > 0$. Το ημικύκλιο με $\cos v > 0$ είναι το εξωτερικό μέρος της σπείρας. Αντιστοίχως το ημικύκλιο με $\frac{\pi}{2} < v < \frac{3\pi}{2}$, και $\cos v < 0$, οπότε $K < 0$, διαγράφει το εσωτερικό μέρος της σπείρας.

Άσκηση 15. Έστω ότι για μία παραμέτρηση επιφάνειας r είναι $F = f = 0$. Να βρεθούν οι κύριες καμπυλότητες της επιφάνειας ως προς την r .

Λύση. Η καμπυλότητα Gauss και η μέση καμπυλότητα δίνονται τώρα από τις αντίστοιχες σχέσεις

$$K = \frac{eg}{EG}, \quad H = \frac{1}{2} \frac{eG + gE}{EG},$$

στις οποίες έχουμε παραλείψει την μεταβλητή p . Αντικαθιστώντας τις προηγούμενες εκφράσεις στην εξίσωση

$$x^2 - 2Hx + K = 0$$

παίρνουμε την

$$x^2 - \left(\frac{e}{E} + \frac{g}{G}\right)x + \frac{e}{E} \cdot \frac{g}{G} = 0,$$

από την οποία προκύπτουν οι κύριες καμπυλότητες

$$k_1 = \frac{e}{E} \quad \text{και} \quad k_2 = \frac{g}{G}.$$

Άσκηση 16. Να βρεθούν η καμπυλότητα Gauss και η μέση καμπυλότητα του γραφήματος Γ_h μιας διαφορίσιμης απεικόνισης $h: U \rightarrow \mathbb{R}$, όπου $U \subseteq \mathbb{R}^2$ ανοιχτό.

Λύση. Το Γ_h καλύπτεται από την μοναδική παραμέτρηση (βλ. Παράδειγμα 4 της Παραγράφου 2.2 και την Άσκηση 19 του Κεφαλαίου 2)

$$\chi(u, v) = (u, v, h(u, v)), \quad (u, v) \in U.$$

Επομένως βρίσκουμε:

$$\begin{aligned} \chi_u &= (1, 0, h_u), \quad \chi_v = (0, 1, h_v), \\ E &= 1 + h_u^2, \quad F = h_u h_v, \quad G = 1 + h_v^2, \\ \chi_u \times \chi_v &= (-h_u, -h_v, 1), \\ \|\chi_u \times \chi_v\| &= \sqrt{h_u^2 + h_v^2 + 1}, \\ N(\chi(u, v)) &= \frac{1}{\sqrt{1 + h_u^2 + h_v^2}}(-h_u, -h_v, 1). \end{aligned}$$

Επειδή η παραγωγή του $N \circ \chi$ είναι αρκετά περίπλοκη, εδώ μας συμφέρει να χρησιμοποιήσουμε τους τύπους (3.4.9) για τον υπολογισμό των θεμελιωδών μεγεθών 2ης τάξης.

Έτσι έχουμε:

$$\begin{aligned} \chi_{uu} &= (0, 0, h_{uu}), \quad \chi_{uv} = (0, 0, h_{uv}), \quad \chi_{vv} = (0, 0, h_{vv}), \\ [\chi_u \chi_v \chi_{uu}] &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & h_u \\ 0 & 1 & h_v \\ 0 & 0 & h_{uu} \end{vmatrix} = h_{uu}, \end{aligned}$$

$$[\chi_u \chi_v \chi_{uv}] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & h_u \\ 0 & 1 & h_v \\ 0 & 0 & h_{uv} \end{vmatrix} = h_{uv},$$

$$[\chi_u \chi_v \chi_{vv}] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & h_u \\ 0 & 1 & h_v \\ 0 & 0 & h_{vv} \end{vmatrix} = h_{vv},$$

οπότε

$$e = \frac{h_{uu}}{\sqrt{1+h_u^2+h_v^2}}, \quad f = \frac{h_{uv}}{\sqrt{1+h_u^2+h_v^2}}, \quad g = \frac{h_{vv}}{\sqrt{1+h_u^2+h_v^2}}.$$

Στοιχειώδεις υπολογισμοί δίνουν τώρα ότι

$$K = \frac{h_{uu}h_{vv} - h_{uv}^2}{(1+h_u^2+h_v^2)^2},$$

$$H = \frac{(1+h_v^2)h_{uu} - 2h_{uv}^2 + (1+h_u^2)h_{vv}}{2(1+h_u^2+h_v^2)^{3/2}}.$$

Άσκηση 17. Θεωρούμε την επιφάνεια S που παράγεται από την περιστροφή, περι τον άξονα των z και κατά γωνία $v \in (0, 2\pi)$, της καμπύλης μοναδιαίας ταχύτητας $\gamma(u) = (a(u), 0, b(u))$ με $a(u) > 0$ και $u \in (-\epsilon, \epsilon)$. Να βρεθεί η καμπυλότητα Gauss, η μέση καμπυλότητα, καθώς και οι κύριες καμπυλότητες της S .

Λύση. Η άσκηση περιέχει στοιχειώδεις υπολογισμούς "ρουτίνας", όπως και σε προηγούμενες παρόμοιες, γι' αυτό και παραλείπουμε τις λεπτομέρειες των υπολογισμών.

Θεωρούμε την παραμέτρηση

$$r(u, v) = (a(u) \cos v, a(u) \sin v, b(u)); \quad (u, v) \in (-\epsilon, \epsilon) \times (0, 2\pi),$$

οπότε, σε τυχόν $q = (u, v)$ είναι:

$$\begin{aligned} r_u(q) &= (a'(u) \cos v, a'(u) \sin v, b'(u)), \\ r_v(q) &= (-a(u) \sin v, a(u) \cos v, 0), \\ r_{uu}(q) &= (a''(u) \cos v, a''(u) \sin v, b''(u)), \\ r_{uv}(q) &= (-a'(u) \sin v, a'(u) \cos v, 0), \\ r_{vv}(q) &= (-a(u) \cos v, -a(u) \sin v, 0), \\ r_u(q) \times r_v(q) &= (-a(u)b'(u) \cos v, -a(u)b'(u) \sin v, a(u)a'(u)) \\ \|r_u(q) \times r_v(q)\| &= a(u) \\ E &= 1, \quad F = 0, \quad G = a^2, \\ e &= a'b'' - a''b', \quad f = 0, \quad g = ab'. \end{aligned}$$

όπου έχουμε χρησιμοποιήσει συστηματικά την σχέση $a'(u)^2 + b'(u)^2 = 1$, η οποία προκύπτει από την υπόθεση ότι η γ είναι μοναδιαίας ταχύτητας.

Η καμπυλότητα Gauss τώρα δίνεται από την σχέση

$$K = \frac{eg}{EG} = \frac{(a'b'' - a''b')b'}{a}.$$

Παραγωγίζοντας την $a'(u)^2 + b'(u)^2 = 1$, βρίσκουμε ότι $a'a'' + b'b'' = 0$, επομένως η προηγούμενη έκφραση της καμπυλότητας μετασχηματίζεται στην

$$K = \frac{eg}{EG} = \frac{(a'b'' - a''b')b'}{a} = -\frac{a''(a'(u)^2 + b'(u)^2)}{a} = -\frac{a''}{a}.$$

Ανάλογα, η μέση καμπυλότητα, είναι

$$H = \frac{1}{2} \left[\frac{b'}{a} + (a'b'' - a''b') \right].$$

Τέλος, επειδή $f = F = 0$, μπορούμε να εφαρμόσουμε την Άσκηση 15, βάσει της οποίας οι κύριες καμπυλότητες είναι οι

$$k_1 = a'b'' - a''b', \quad k_2 = \frac{b'}{a}.$$

Άσκηση 18. Να βρεθεί η κάθετη καμπυλότητα $k_n(w)$ στην κατεύθυνση του διανύσματος $w \in T_p S$, αν το w δεν είναι μοναδιαίο.

Λύση. Στην περίπτωση αυτή μπορούμε να γράψουμε ότι $w = \beta'(0)$, όπου $\beta: (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow S$ είναι μία διαφορίσιμη καμπύλη, όχι αναγκαία μοναδιαίας ταχύτητας, με $\beta(0) = p$.

Όπως και στην περίπτωση του μοναδιαίου διανύσματος (βλ. Παράγραφο 2.6), θα είναι

$$k_n(w) = k(0) \cdot \cos \theta; \quad \theta = \angle(n(0), N(p)),$$

όπου τώρα $k(0)$ και $n(0)$ είναι αντιστοίχως η καμπυλότητα και το πρώτο κάθετο διάνυσμα της β στο $\beta(0) = p$. Επίσης, με την ίδια συλλογιστική της περίπτωσης του μοναδιαίου διανύσματος, ισχύει και η σχέση

$$\langle N(\beta(t)), T(t) \rangle = 0, \quad \text{με} \quad T(t) = \frac{\beta'(t)}{\|\beta'(t)\|}.$$

Η παραγωγή του παραπάνω εσωτερικού γινομένου (στο σημείο 0), μαζί με τον ορισμό του διαφορικού του N , δίνει ότι

$$\begin{aligned} & \langle (N \circ \beta)'(0), T(0) \rangle + \langle (N \circ \beta)(0), T'(0) \rangle = 0 \\ \Rightarrow & \langle (N \circ \beta)'(0), T(0) \rangle + \langle (N(p), T'(0) \rangle = 0 \\ \Rightarrow & \langle d_p N(w), T(0) \rangle + \langle (N(p), T'(0) \rangle = 0. \end{aligned}$$

Επομένως, εφαρμόζοντας τους γενικευμένους τύπους Frenet-Serret και τους ορισμούς των θεμελιωδών μορφών, έχουμε:

$$\begin{aligned}
 k_n(w) &= k(0) \cdot \cos \theta = k(0) \langle N(p), n(0) \rangle \\
 (: v = \|\beta'(0)\|) \quad &= \langle N(p), k(0)n(0) \rangle = \left\langle N(p), \frac{T'(0)}{v} \right\rangle \\
 &= \frac{1}{v} \langle N(p), T'(0) \rangle = \frac{1}{v} \left\langle -d_p N(w), \frac{\beta'(0)}{\|\beta'(0)\|} \right\rangle \\
 &= \frac{1}{v^2} \langle -d_p N(w), w \rangle = \frac{1}{\|w\|^2} \Pi_p(w) = \frac{\Pi_p(w)}{I_p(w)},
 \end{aligned}$$

δηλαδή καταλήγουμε στη σχέση

$$k_n(w) = \frac{1}{\|w\|^2} \Pi_p(w) = \frac{\Pi_p(w)}{I_p(w)}.$$

► Στις επόμενες ασκήσεις, για ευκολία, χρησιμοποιούμε τον ακόλουθο συμβολισμό για τον τελεστή στο σημείο p :

$$\boxed{\Sigma_p = -d_p N.}$$

Άσκηση 19. Δίνεται η παραμέτρηση μιας επιφάνειας (U, r, W) και τα σημεία $q \in U$, $p = r(q)$. Αν $F \equiv 0$, να αποδειχθούν οι σχέσεις:

$$\begin{aligned}
 \Sigma_p(r_u) &= \frac{e}{E} r_u + \frac{f}{G} r_v, \\
 \Sigma_p(r_v) &= \frac{f}{E} r_u + \frac{g}{G} r_v,
 \end{aligned}$$

όπου σε όλες τις εμφανιζόμενες συναρτήσεις έχουν παραλειφθεί τα αντίστοιχα q και p .

Λύση. Ακολουθώντας την διαδικασία της Παραγράφου 3.5, θέτουμε:

$$(1) \quad -N_u = \Sigma_p(r_u) = a_{11}r_u + a_{21}r_v,$$

$$(2) \quad -N_v = \Sigma_p(r_v) = a_{12}r_u + a_{22}r_v.$$

Παίρνοντας το εσωτερικό γινόμενο των (1) και (2) διαδοχικά με r_u και r_v , έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
 \langle -N_u, r_u \rangle &= a_{11} \langle r_u, r_u \rangle + a_{21} \langle r_v, r_u \rangle \\
 &\Rightarrow e = a_{11}E + a_{21}F = a_{11}E,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle -N_u, r_v \rangle &= a_{11} \langle r_u, r_v \rangle + a_{21} \langle r_v, r_v \rangle \\ &\Rightarrow f = a_{11}F + a_{21}G = a_{21}G, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle -N_v, r_u \rangle &= a_{12} \langle r_u, r_u \rangle + a_{22} \langle r_v, r_u \rangle \\ &\Rightarrow f = a_{12}E + a_{22}F = a_{12}E, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle -N_v, r_v \rangle &= a_{12} \langle r_u, r_v \rangle + a_{22} \langle r_v, r_v \rangle \\ &\Rightarrow g = a_{12}F + a_{22}G = a_{22}G, \end{aligned}$$

επομένως

$$a_{11} = \frac{e}{E}, \quad a_{21} = \frac{f}{G}, \quad a_{12} = \frac{f}{E}, \quad a_{22} = \frac{g}{G},$$

με τις οποίες καταλήγουμε στις ζητούμενες σχέσεις.

Άσκηση 20. Δίνεται μία κανονική επιφάνεια S και ο εφαπτόμενος χώρος της $T_p S$ στο $p \in S$. Αν υποθέσουμε ότι $w_1, w_2 \in T_p S$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα, τότε ισχύουν οι σχέσεις

$$(1) \quad \Sigma_p(w_1) \times \Sigma_p(w_2) = K(p)(w_1 \times w_2),$$

$$(2) \quad \Sigma_p(w_1) \times w_2 + w_1 \times \Sigma_p(w_2) = 2H(p)(w_1 \times w_2).$$

Λύση. Σύμφωνα με την υπόθεση, τα w_1, w_2 αποτελούν βάση του $T_p S$, οπότε μπορούμε να γράψουμε ότι

$$\Sigma_p(w_1) = \lambda_1 w_1 + \mu_1 w_2, \quad \Sigma_p(w_2) = \lambda_2 w_1 + \mu_2 w_2,$$

οπότε ο πίνακας του Σ_p (ως προς την προηγούμενη βάση) είναι ο

$$B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \mu_1 & \mu_2 \end{pmatrix}.$$

Επομένως,

$$K(p) = \det(\Sigma_p) = \det(B) = \lambda_1 \mu_2 - \lambda_2 \mu_1,$$

$$H(p) = \frac{1}{2} \operatorname{tr}(\Sigma_p) = \frac{1}{2} \operatorname{tr}(B) = \frac{1}{2} (\lambda_1 + \mu_2),$$

οπότε

$$\begin{aligned} \Sigma_p(w_1) \times \Sigma_p(w_2) &= (\lambda_1 w_1 + \mu_1 w_2) \times (\lambda_2 w_1 + \mu_2 w_2) \\ &= \lambda_1 \lambda_2 (w_1 \times w_1) + \lambda_1 \mu_2 (w_1 \times w_2) \\ &\quad + \lambda_2 \mu_1 (w_2 \times w_1) + \mu_1 \mu_2 (w_2 \times w_2) \\ &= (\lambda_1 \mu_2 - \lambda_2 \mu_1) (w_1 \times w_2) \\ &= K(p) (w_1 \times w_2). \end{aligned}$$

Ανάλογα έχουμε ότι

$$\begin{aligned} & \Sigma_p(w_1) \times w_2 + w_1 \times \Sigma_p(w_2) = \\ & = (\lambda_1 w_1 + \mu_1 w_2) \times w_2 + w_1 \times (\lambda_2 w_1 + \mu_2 w_2) = \\ & = (\lambda_1 + \mu_2)(w_1 \times w_2) = 2H(p)(w_1 \times w_2). \end{aligned}$$

Άσκηση 21. Θεωρώντας γνωστή την ταυτότητα **Lagrange**

$$(a \times b) \cdot (c \times d) = \begin{vmatrix} a \cdot c & a \cdot d \\ b \cdot c & b \cdot d \end{vmatrix}; \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}^3,$$

να επιλυθούν οι (1) και (2) της προηγούμενης άσκησης, ως προς $K(p)$ και $H(p)$ αντιστοίχως.

• Στην παραπάνω σχέση, για ευκολία, έχουμε συμβολίσει με " \cdot " το εσωτερικό γινόμενο, δηλαδή γράφουμε $a \cdot c := \langle a, c \rangle$ κλπ.

Λύση. Επειδή w_1, w_2 είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, $w_1 \times w_2 \neq 0$. Πολλαπλασιάζοντας εσωτερικά και τα δύο μέλη της (1) με $w_1 \times w_2$, έχουμε ότι

$$(\Sigma_p(w_1) \times \Sigma_p(w_2)) \cdot (w_1 \times w_2) = K(p)(w_1 \times w_2) \cdot (w_1 \times w_2).$$

Άρα, εφαρμόζοντας την ταυτότητα Lagrange και στα δύο μέλη της προηγούμενης, βρίσκουμε ότι

$$\begin{vmatrix} \Sigma_p(w_1) \cdot w_1 & \Sigma_p(w_1) \cdot w_2 \\ \Sigma_p(w_2) \cdot w_1 & \Sigma_p(w_2) \cdot w_2 \end{vmatrix} = K(p) \begin{vmatrix} w_1 \cdot w_1 & w_1 \cdot w_2 \\ w_2 \cdot w_1 & w_2 \cdot w_2 \end{vmatrix},$$

οπότε

$$K(p) = \frac{\begin{vmatrix} \Sigma_p(w_1) \cdot w_1 & \Sigma_p(w_1) \cdot w_2 \\ \Sigma_p(w_2) \cdot w_1 & \Sigma_p(w_2) \cdot w_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} w_1 \cdot w_1 & w_1 \cdot w_2 \\ w_2 \cdot w_1 & w_2 \cdot w_2 \end{vmatrix}}.$$

Με ανάλογο τρόπο, από την (2) προκύπτει ότι

$$H(p) = \frac{1}{2} \frac{\begin{vmatrix} \Sigma_p(w_1) \cdot w_1 & \Sigma_p(w_1) \cdot w_2 \\ w_2 \cdot w_1 & w_2 \cdot w_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} w_1 \cdot w_1 & w_1 \cdot w_2 \\ \Sigma_p(w_2) \cdot w_1 & \Sigma_p(w_2) \cdot w_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} w_1 \cdot w_1 & w_1 \cdot w_2 \\ w_2 \cdot w_1 & w_2 \cdot w_2 \end{vmatrix}}.$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ. Για $w_1 = r_u(q)$ και $w_2 = r_v(q)$, οι προηγούμενοι τύποι, μέσω της (3.3.6) και των ορισμών των θεμελιωδών μεγεθών 1ης και 2ης τάξης, οδηγούν στους τύπους καμπυλοτήτων (3.5.3) και (3.5.4).

Άσκηση 22. Με τους συμβολισμούς των προηγουμένων ασκήσεων, να δειχθεί ότι, για κάθε $w = \lambda r_u(q) + \mu r_v(q) \in T_p S$, ισχύει η σχέση

$$\Sigma_p(w) \times w = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \mu^2 & -\lambda\mu & \lambda^2 \\ E & F & G \\ e & f & g \end{vmatrix} = 0.$$

Λύση. Πρώτα παρατηρούμε ότι ισχύει η ισοδυναμία

$$(I) \quad \Sigma_p(w) \times w = 0 \Leftrightarrow (\Sigma_p(w) \times w) \cdot (r_u \times r_v) = 0,$$

όπου, για ευκολία, παραλείπουμε το $q = r^{-1}(p)$ στις ποσότητες του εξωτερικού γινομένου.

Πράγματι, η κατεύθυνση \Rightarrow είναι προφανής. Αντιστρόφως, επειδή $w, \Sigma_p(w) \in T_p S$, το διάνυσμα $\Sigma_p(w) \times w$ είναι κάθετο στο επίπεδο που βρίσκονται τα $w, \Sigma_p(w)$, άρα είναι κάθετο στο επίπεδο των r_u, r_v . Αλλά στο ίδιο επίπεδο είναι κάθετο και το $r_u \times r_v$. Επομένως, $\Sigma_p(w) \times w = \lambda(r_u \times r_v)$, άρα η σχέση $(\Sigma_p(w) \times w) \cdot (r_u \times r_v) = 0$ συνεπάγεται ότι $\lambda(r_u \times r_v) \cdot (r_u \times r_v) = 0$, απ' όπου προκύπτει ότι $\lambda = 0$ και $\Sigma_p(w) \times w = 0$.

Εφαρμόζοντας τώρα την ταυτότητα Lagrange στο δεύτερο μέλος της ισοδυναμίας (I), βρίσκουμε ότι

$$(II) \quad \begin{vmatrix} \Sigma_p(w) \cdot r_u & \Sigma_p(w) \cdot r_v \\ w \cdot r_u & w \cdot r_v \end{vmatrix} = 0.$$

Αλλά

$$\begin{aligned} \Sigma_p(w) \cdot r_u &= (\lambda \Sigma_p(r_u) + \mu \Sigma_p(r_v)) \cdot r_u \\ &= \lambda \langle -d_p N(r_u), r_u \rangle + \mu \langle -d_p N(r_v), r_u \rangle \\ &= \lambda e + \mu f, \end{aligned}$$

και παρόμοια

$$\Sigma_p(w) \cdot r_v = (\lambda \Sigma_p(r_u) + \mu \Sigma_p(r_v)) \cdot r_v = \lambda f + \mu g.$$

Επίσης,

$$\begin{aligned} w \cdot r_u &= (\lambda r_u + \mu r_v) \cdot r_u \\ &= \lambda \langle r_u, r_u \rangle + \mu \langle r_v, r_u \rangle \\ &= \lambda E + \mu F, \end{aligned}$$

και

$$w \cdot r_v = (\lambda r_u + \mu r_v) \cdot r_v = \lambda F + \mu G.$$

Αντικαθιστώντας τις προηγούμενες στην (II), έχουμε τελικά ότι

$$\begin{aligned} \Sigma_p(w) \times w = 0 &\Leftrightarrow \begin{vmatrix} \lambda e + \mu f & \lambda f + \mu g \\ \lambda E + \mu F & \lambda F + \mu G \end{vmatrix} = 0 \\ &\Leftrightarrow \lambda^2 \begin{vmatrix} e & f \\ E & F \end{vmatrix} + \lambda \mu \begin{vmatrix} e & g \\ E & G \end{vmatrix} + \mu^2 \begin{vmatrix} f & g \\ F & G \end{vmatrix} = 0 \\ &\Leftrightarrow \lambda^2 \begin{vmatrix} E & F \\ e & f \end{vmatrix} + \lambda \mu \begin{vmatrix} E & G \\ e & g \end{vmatrix} + \mu^2 \begin{vmatrix} F & G \\ f & g \end{vmatrix} = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{vmatrix} \mu^2 & -\lambda \mu & \lambda^2 \\ E & F & G \\ e & f & g \end{vmatrix} = 0. \end{aligned}$$

Άσκηση 23 Ένα μη μηδενικό διάνυσμα $w \in T_p S$ καλείται **κύριο διάνυσμα** του τελεστή σχήματος $\Sigma_p = -d_p N$, αν $\Sigma_p(w) = \lambda w$, για ένα $\lambda \in \mathbb{R}_*$, δηλαδή το w είναι ιδιοδιάνυσμα του Σ_p . Να αποδειχθεί ότι

$$\text{το } w \text{ είναι κύριο διάνυσμα} \Leftrightarrow \Sigma_p(w) \times w = 0.$$

Λύση. Γνωρίζουμε ότι $\Sigma(w) \times w = 0$ τότε και μόνον τότε αν τα διανύσματα $\Sigma_p(w)$, w είναι γραμμικώς εξηρητημένα, δηλαδή υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}_*$, έτσι ώστε $\Sigma_p(w) = \lambda w$, άρα το w είναι κύριο διάνυσμα.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ. 1) Αν $w = \lambda r_u + \mu r_v$, τότε, σύμφωνα και με την προηγούμενη άσκηση,

$$\text{το } w \text{ είναι κύριο διάνυσμα} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \mu^2 & -\lambda \mu & \lambda^2 \\ E & F & G \\ e & f & g \end{vmatrix} = 0.$$

2) Τα κύρια διανύσματα ορίζουν, προφανώς, αντίστοιχες κύριες κατευθύνσεις.

Άσκηση 24 Υποθέτουμε ότι $f: S \rightarrow \bar{S}$ είναι μία αμφιδιαφόριση μεταξύ δύο κανονικών επιφανειών, η οποία ικανοποιεί την συνθήκη

$$(1) \quad \langle d_p f(w_1), d_p f(w_2) \rangle_{f(p)} = \langle w_1, w_2 \rangle_p,$$

για κάθε $p \in S$ και κάθε $w_1, w_2 \in T_p S$. Να αποδειχθούν τα επόμενα:

α) Αν (U, r, W) είναι μία παραμέτρηση της S , τότε και η $(U, f \circ r, f(W))$ είναι παραμέτρηση της \bar{S} .

β) Η (1) ισοδυναμεί με την

$$(2) \quad I_{f(p)}(d_p f(w)) = I_p(w),$$

για κάθε $p \in S$ και $w \in T_p S$.

γ) Αν E, F, G και $\bar{E}, \bar{F}, \bar{G}$ είναι τα θεμελιώδη μεγέθη 1ης τάξης, ως προς τις παραμετρήσεις (U, r, W) και $(U, f \circ r, f(W))$ των S και \bar{S} αντιστοίχως, τότε

$$\bar{E} = E, \bar{F} = F, \bar{G} = G.$$

Λύση. Η απόδειξη του ερωτήματος α) είναι άμεση, επειδή η f είναι αμφιδιαφόριση (άρα και ομοιομορφισμός).

β) Η συνεπαγωγή (1) \Rightarrow (2) είναι προφανής. Αντιστρόφως, επειδή το εσωτερικό γινόμενο ικανοποιεί την γενική σχέση

$$\langle a + b, a + b \rangle - \langle a, a \rangle - \langle b, b \rangle = 2 \langle a, b \rangle,$$

η (2) συνεπάγεται ότι

$$\begin{aligned} 2 \langle w_1, w_2 \rangle &= I_p(w_1 + w_2) - I_p(w_1) - I_p(w_2) \\ &= I_{f(p)}(d_p f(w_1 + w_2)) - I_{f(p)}(d_p f(w_1)) - I_{f(p)}(d_p f(w_2)) \\ &= I_{f(p)}(d_p f(w_1) + d_p f(w_2)) - I_{f(p)}(d_p f(w_1)) - I_{f(p)}(d_p f(w_2)) \\ &= 2 \langle d_p f(w_1), d_p f(w_2) \rangle, \end{aligned}$$

απ' όπου προκύπτει η (1).

γ) Ας θέσουμε, για ευκολία, $\bar{r} = f \circ r$. Τότε, σύμφωνα με την Άσκηση 27 του Κεφαλαίου 2,

$$\bar{r}_u(q) = \frac{\partial \bar{r}}{\partial u} \Big|_q = \frac{\partial (f \circ r)}{\partial u} \Big|_q = d_p f(r_u(q)), \quad \forall q \in U.$$

Συνεπώς, για κάθε $q \in U$, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \bar{E}(q) &= \langle \bar{r}_u, \bar{r}_u \rangle_{f(p)} \\ &= \langle d_p f(r_u), d_p f(r_u) \rangle_{f(p)} \\ &= \langle r_u, r_u \rangle_p = E(q), \end{aligned}$$

δηλαδή $\bar{E} = E$. Ανάλογα αποδεικνύονται και οι σχέσεις των υπολοίπων θεμελιωδών μεγεθών 1ης τάξης.

Παράρτημα Α΄

Διαφορικός Λογισμός

Υπενθυμίζουμε εδώ μερικά βασικά συμπεράσματα του Διαφορικού Λογισμού, τα οποία είναι χρήσιμα στις Σημειώσεις αυτές.

Α΄.1 Ορισμός. Θεωρούμε ένα $U \subset \mathbb{R}^m$ ανοιχτό, $a \in U$ και μία απεικόνιση $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$. Λέμε ότι η f **είναι διαφορίσιμη στο a** , ή ότι η f **παραγωγίζεται στο a** , αν υπάρχει γραμμική απεικόνιση $Df(a): \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ [δηλαδή $Df(a) \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$], έτσι ώστε

$$(A. 1) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|f(a+h) - f(a) - Df(a)(h)\|}{\|h\|} = 0.$$

Η γραμμική απεικόνιση $Df(a)$ λέγεται **διαφορικό της f στο σημείο a** .

Στον αριθμητή του παραπάνω πηλίκου εμφανίζεται η νόρμα του \mathbb{R}^n , ενώ στον παρονομαστή αυτή του \mathbb{R}^m .

Η σχέση (A. 1) είναι ισοδύναμη με τη σχέση

$$(A. 2) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a) - Df(a)(h)}{\|h\|} = 0,$$

αλλά η νόρμα του παρονομαστή δεν μπορεί να παραλειφθεί, για $m \geq 2$.

Επίσης, αξίζει να παρατηρήσουμε ότι ο προηγούμενος ορισμός έχει έννοια για οποιουδήποτε **χώρους με νόρμα**, και όχι μόνο για ευκλείδειους.

Α΄.2 Εφαρμογή. Ας υποθέσουμε ότι $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, όπου I είναι ένα ανοιχτό διάστημα του \mathbb{R} , και έστω ότι η f παραγωγίζεται σε ένα t_0 . Τότε, επειδή το

διαφορικό της f στο t_o

$$Df(t_o) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},$$

είναι γραμμική απεικόνιση, ικανοποιεί τη σχέση

$$Df(t_o)(t) = tDf(t_o)(1), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Οπότε, από τον ορισμό της διαφορίσιμης συνάρτησης, έχουμε ότι

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{|f(t_o + t) - f(t_o) - tDf(t_o)(1)|}{|t|} = 0.$$

ή, ισοδύναμα,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t_o + t) - f(t_o)}{t} = Df(t_o)(1).$$

Επομένως, σ' αυτήν την περίπτωση είναι

$$(A. 3) \quad f'(t_o) = Df(t_o)(1),$$

όπου στο πρώτο μέλος έχουμε τη συνήθη παράγωγο μιάς πραγματικής συνάρτησης με πραγματική μεταβλητή. Επιπλέον, ισχύει η σχέση

$$(A. 4) \quad Df(t_o)(t) = t \cdot f'(t_o), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Αν η $f : U \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ είναι διαφορίσιμη στο $a \in U$, όπου το U είναι ανοιχτό, τα επόμενα τρία συμπεράσματα είναι άμεσα :

Α'. 3 Πρόταση. Το διαφορικό της f στο a είναι μονοσήμαντα ορισμένο.

Α'. 4 Πρόταση. Η f είναι συνεχής στο a .

Α'. 5 Πρόταση. Ο περιορισμός της f σε κάθε ανοιχτό $V \subset U$ με $x \in V$ είναι διαφορίσιμη απεικόνιση στο x και $D(f|_V)(x) = Df(x)$.

Α'. 6 Ορισμός. Αν $U \subset \mathbb{R}^m$ ανοιχτό και $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$, τότε η f λέγεται **διαφορίσιμη στο U** , αν είναι διαφορίσιμη σε κάθε σημείο $x \in U$.

Οι τρεις προτάσεις που ακολουθούν εξασφαλίζουν την διαφορισιμότητα ορισμένων απλών απεικονίσεων :

Α'. 7 Πρόταση. Αν $U \subset \mathbb{R}^m$ ανοιχτό και $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ σταθερή, τότε η f είναι διαφορίσιμη στο U , και $Df(x) = 0$, για κάθε $x \in U$. Αντιστρόφως, αν για μία διαφορίσιμη $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ είναι $Df(x) = 0$, για κάθε $x \in U$, τότε η f είναι σταθερή σε κάθε συνεκτική συνιστώσα του U . Ιδιαίτερος, αν το U είναι συνεκτικό σύνολο, τότε η f είναι σταθερή σε ολόκληρο το U .

Α'. 8 Πρόταση. Αν η $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ είναι γραμμική απεικόνιση, δηλαδή $f \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$, τότε η f είναι διαφορίσιμη και

$$(A. 5) \quad Df(x) = f,$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}^m$.

Α'. 9 Πρόταση. Αν η $f: \mathbb{R}^{m_1} \times \cdots \times \mathbb{R}^{m_k} \rightarrow \mathbb{R}^n$ είναι k -πλειογραμμική απεικόνιση, δηλαδή είναι γραμμική ως προς κάθε μεταβλητή, οπότε γράφουμε ότι

$$f \in L_k(\mathbb{R}^{m_1}, \dots, \mathbb{R}^{m_k}; \mathbb{R}^n),$$

τότε η f είναι διαφορίσιμη και

$$\begin{aligned} Df(x)(h) &= f(h_1, x_2, \dots, x_k) + f(x_1, h_2, x_3, \dots, x_k) + \cdots \\ &\quad + f(x_1, \dots, x_{k-2}, h_{k-1}, x_k) + f(x_1, \dots, x_{k-1}, h_k), \end{aligned}$$

για κάθε $x = (x_1, x_2, \dots, x_k)$, $h = (h_1, h_2, \dots, h_k) \in \mathbb{R}^{m_1} \times \cdots \times \mathbb{R}^{m_k}$.

Α'. 10 Πρόσημα. (i) Κάθε εσωτερικό γινόμενο

$$\langle, \rangle : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$$

είναι διαφορίσιμο, ως διγραμμική απεικόνιση, και

$$(A. 6) \quad [D \langle, \rangle (x, y)](h, k) = \langle h, y \rangle + \langle x, k \rangle,$$

για κάθε $x, y, h, k \in \mathbb{R}^m$.

(ii) Το εξωτερικό γινόμενο

$$\times : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

είναι διαφορίσιμο, ως διγραμμική απεικόνιση, και

$$(A. 7) \quad [D \times (x, y)](h, k) = h \times y + x \times k,$$

για κάθε $x, y, h, k \in \mathbb{R}^3$.

(iii) Η εκτιμήτρια απεικόνιση

$$ev: L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n: (f, x) \mapsto ev(f, x) := f(x)$$

είναι διαφορίσιμη, ως διγραμμική, και

$$(A. 8) \quad [Dev(f_o, x_o)](f, x) = f(x_o) + f_o(x),$$

για κάθε $x_o, x \in \mathbb{R}^m$ και $f_o, f \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$.

(iv) Η σύνθεση

$$co: L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) \times L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p) \longrightarrow L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^p): (f, g) \mapsto co(f, g) := g \circ f$$

είναι διαφορίσιμη, ως διγραμμική απεικόνιση, και

$$(A. 9) \quad [Dco(f_o, g_o)](f, g) = g_o \circ f + g \circ f_o,$$

για κάθε $f_o, f \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ και $g_o, g \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$.

Σε σχέση με τη σύνθεση διαφορίσιμων απεικονίσεων, ισχύει το επόμενο

Α'. 11 Θεώρημα (Κανόνας της Αλυσίδας). Υποθέτουμε ότι $f: U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ και $g: V \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ είναι διαφορίσιμες απεικονίσεις στα σημεία $a \in U$ και $f(a) \in V$ αντιστοίχως, και $f(U) \subset V$. Τότε και η σύνθεση $g \circ f: U \rightarrow \mathbb{R}^k$ είναι διαφορίσιμη στο a και

$$D(g \circ f)(a) = Dg(f(a)) \circ Df(a).$$

Οι επόμενες τρεις προτάσεις αφορούν σε απεικονίσεις που ορίζονται ή παίρνουν τιμές σε καρτεσιανά γινόμενα ευκλείδειων χώρων.

Α'. 12 Πρόταση. Αν $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ και θέσουμε $f_i := u_i \circ f$, όπου $u_i: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ είναι η i -προβολή (δηλαδή $u_i(x_1, \dots, x_m) = x_i$), τότε η f είναι διαφορίσιμη στο $a \in U$ εάν και μόνον εάν f_i είναι διαφορίσιμη στο a , για κάθε $i = 1, \dots, m$. Στην περίπτωση αυτή είναι

$$Df(a) = (Df_1(a), \dots, Df_m(a)).$$

Ιδιαίτερώς, αν $U = I \subset \mathbb{R}$, από την $f'(a) = Df(a)(1)$, προκύπτει ότι

$$f'(a) = (f'_1(a), f'_2(a), \dots, f'_n(a)).$$

Α'. 13 Πρόταση. Οι απεικονίσεις $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ και $g: V \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ είναι διαφορίσιμες στα σημεία $a \in U$ και $b \in V$, αντιστοίχως, αν και μόνον αν η απεικόνιση

$$f \times g: U \times V \longrightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^q: (x, y) \mapsto (f(x), g(y))$$

είναι διαφορίσιμη στο (a, b) . Στην περίπτωση αυτή είναι

$$D(f \times g)(a, b) = Df(a) \times Dg(b).$$

Έστω ένα σύνολο της μορφής $U \times V$, όπου $U \subseteq \mathbb{R}^m$, $V \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοιχτά, $a \in U$ και $b \in V$. Θεωρούμε μίαν απεικόνιση $f : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$. Οι απεικονίσεις

$$\begin{aligned} f_a: \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^p : v \mapsto f_a(v) := f(a, v) \\ f_b: \mathbb{R}^m &\longrightarrow \mathbb{R}^p : u \mapsto f_b(u) := f(u, b) \end{aligned}$$

ονομάζονται **μερικές απεικονίσεις της f στο (a, b)** . Ισχύει το επόμενο

Α'. 14 Θεώρημα Αν μία f , όπως προηγουμένως, είναι διαφορίσιμη στο $(a, b) \in U \times V$, δηλ. υπάρχει η $Df(a, b) \in L(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ τότε οι f_a και f_b είναι διαφορίσιμες στα b και a , αντιστοίχως, και ισχύει ο **τύπος του Leibniz**:

$$Df(a, b)(h, k) = Df_a(b)(k) + Df_b(a)(h),$$

για κάθε $(h, k) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$.

Α'. 15 Ορισμός. Έστω $f = (f_1, \dots, f_n): U \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ διαφορίσιμη απεικόνιση στο $a \in U$, δηλ. υπάρχει η $Df(a) \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$. Η προηγούμενη γραμμική απεικόνιση ταυτίζεται με ένα πίνακα $(a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$, μέσω της σχέσης

$$(A. 10) \quad a_{ij} := pr_j(Df(a)(e_i)) = D(pr_j \circ f)(a)(e_i) = Df_j(a)(e_i).$$

Ο ανάστροφος του πίνακα (A. 10) λέγεται **πίνακας Jacobi** ή **Ιακωβιανός πίνακας της f στο a** , και συμβολίζεται με $J_a f$ (βλ. και τη σχέση (A. 14) παρακάτω). Όπως βλέπει κανείς από την προηγούμενη κατασκευή,

ο $J_a f$ είναι ακριβώς ο πίνακας που αντιστοιχεί στη γραμμική απεικόνιση $Df(a)$, ως προς τις φυσικές βάσεις.

Στις περισσότερες περιπτώσεις υπολογίζουμε τον Ιακωβιανό πίνακα και αναγόμαστε κατόπιν στη γραμμική απεικόνιση $Df(a)$, μέσω της σχέσης

$$(A. 11) \quad Df(a)(h_1, \dots, h_m) = (J_a f) \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_m \end{pmatrix},$$

για κάθε $h = (h_1, \dots, h_m) \in \mathbb{R}^m$.

Α'. 16 Ορισμός. Έστω $f: U \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ (U ανοικτό) και $a = (a_1, \dots, a_m) \in U$. Υπάρχουν ανοικτά διαστήματα $I_i \subseteq \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, m$, με $a \in I_1 \times \dots \times I_m \subseteq U$. Λέμε ότι η f **παραγωγίζεται κατά την i -μεταβλητή στο $a \in U$** , ή ότι

υπάρχει η i -μερική παράγωγος της f στο $a \in U$, αν υπάρχει η παράγωγος της μερικής απεικόνισης

$$I_i \longrightarrow \mathbb{R}^n : t \mapsto f(a_1, \dots, a_{i-1}, t, a_{i+1}, \dots, a_m)$$

στο σημείο a_i .

Σύμφωνα με την Εφαρμογή Α' 2 και την Πρόταση Α' 12, το διαφορικό της τελευταίας απεικόνισης μπορεί να ερμηνευτεί είτε ως μία γραμμική απεικόνιση, που συμβολίζεται με $D_i f(a)$, είτε ως ένα διάνυσμα του \mathbb{R}^n , που συμβολίζεται με $\frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_a$. Τα $\frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_a$ και $D_i f(a)$ σχετίζονται μέσω της ισότητας

$$(A. 12) \quad \frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_a = D_i f(a)(1).$$

Η διαφορισμότητα της f στο a , που εξ ορισμού ισοδυναμεί με την σχέση (A. 1), συνεπάγεται την

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\|f(a + te_i) - f(a) - Df(a)(te_i)\|}{\|te_i\|} = 0,$$

η οποία, με τη σειρά της, ισοδυναμεί με την

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + te_i) - f(a)}{t} = Df(a)(e_i),$$

απ' όπου προκύπτει η

$$(A. 13) \quad \frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_a = Df(a)(e_i).$$

Συνδυάζοντας την τελευταία ισότητα με την (A. 10), βρίσκουμε ότι ο πίνακας Jacobi της f στο a παίρνει πλέον τη μορφή

$$(A. 14) \quad J_a f = \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i} \Big|_a \right)^t = (Df_j(e_i))^t,$$

όπου ο εκθέτης t συμβολίζει, κατά τα γνωστά, ανάστροφο πίνακα.

Α'. 17 Ορισμός. Εστω ότι μία απεικόνιση $f: U \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ είναι **διαφορίσιμη στο U** , δηλαδή υπάρχει το διαφορικό $Df(a)$, για κάθε $a \in U$. Τότε ορίζεται η απεικόνιση

$$Df: U \longrightarrow L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n): x \mapsto Df(x)$$

που λέγεται **(ολικό) διαφορικό** ή **(ολική) παράγωγος της f** .

Αφού ο χώρος $L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ είναι ευκλείδειος, και μάλιστα

$$L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) \cong \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{m \cdot n},$$

έχει έννοια το ερώτημα αν η Df είναι συνεχής, ή διαφορίσιμη. Έτσι, θα λέμε ότι η f είναι **διαφορίσιμη τάξης C^1** (ή απλούστερα: **η f είναι τάξης C^1**), αν η f είναι διαφορίσιμη στο U και η Df είναι συνεχής.

Αν επιπλέον η Df είναι διαφορίσιμη στο $a \in U$, το διαφορικό της Df στο a , δηλ. η γραμμική απεικόνιση

$$D^2f(a) := D(Df)(a): \mathbb{R}^m \longrightarrow L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$$

ονομάζεται **δεύτερη παράγωγος της f στο a** . Μιά τέτοια απεικόνιση, αν υπάρχει, ικανοποιεί την

$$D^2f(a) \in L(\mathbb{R}^m, L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)) \cong L_2(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^n),$$

όπου $L_2(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^n)$ συμβολίζει τον χώρο όλων των διγραμμικών απεικονίσεων της μορφής $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$. Αν η $D^2f(a)$ υπάρχει για κάθε $a \in U$, τότε ορίζεται το **διαφορικό (ή παράγωγος) δεύτερης τάξης της f** , δηλαδή η απεικόνιση

$$D^2f: U \longrightarrow L_2(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^n).$$

Ιδιαίτερος, αν η D^2f είναι συνεχής, τότε η f λέγεται **διαφορίσιμη απεικόνιση τάξης C^2** .

Με ανάλογο τρόπο ορίζεται η **k -τάξης παράγωγος της f στο a** , δηλαδή η

$$D^k f(a) \in L(\mathbb{R}^m, L(\mathbb{R}^m, L(\mathbb{R}^m, \dots) \dots)) \cong L_k(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^n)$$

και το διαφορικό $D^k f: U \rightarrow L_k(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^n)$. Αν η $D^k f$ είναι συνεχής, τότε η f λέγεται **διαφορίσιμη τάξης C^k** . Ιδιαίτερος, αν η f είναι τάξης C^k , για κάθε $k = 1, 2, \dots$, τότε λέμε ότι **η f είναι διαφορίσιμη τάξης C^∞** .

Α'. 18 Πρόταση. Για μία διαφορίσιμη απεικόνιση $f: U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ τάξης C^k , η $D^k f(a) \in L_k(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^n)$ είναι **συμμετρική** απεικόνιση. Δηλαδή, για κάθε $(h_1, \dots, h_k) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$, είναι

$$D^k f(a)(h_1, \dots, h_k) = D^k f(a)(h_{\sigma(1)}, \dots, h_{\sigma(k)}),$$

για κάθε μετάθεση σ των δεικτών.

Αν μία απεικόνιση $f: U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ παραγωγίζεται στο $a \in U$, λαμβάνοντας υπ' όψιν την Πρόταση Α' 13, διαπιστώνουμε ότι υπάρχουν όλες οι μερικές παράγωγοι $\frac{\partial f_j}{\partial x_i}|_a$, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$. Ιδιαίτερος, αν η f είναι C^1 , τότε και οι προηγούμενες μερικές παράγωγοι είναι συνεχείς. Αντιστρόφως, όμως,

η ύπαρξη των μερικών παραγώγων δεν συνεπάγεται την ύπαρξη της $Df(a)$. Αλλά, αν υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι και είναι συνεχείς, τότε υπάρχει η $Df(a)$, και η f είναι της τάξης C^1 .

Επειδή κάθε $f_j: U \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ είναι απεικόνιση m μεταβλητών, αν η f διαφορίζεται παντού, θα ορίζεται και η απεικόνιση

$$\frac{\partial f_j}{\partial x_i}: U \ni a \mapsto \left. \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \right|_a \in \mathbb{R},$$

οπότε μπορεί κανείς να διερωτηθεί για την k -μερική παράγωγο της τελευταίας σε οποιοδήποτε σημείο $a \in U$, δηλαδή για την

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \left(\left. \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \right|_a \right) \equiv \left. \frac{\partial^2 f_j}{\partial x_k \partial x_i} \right|_a, \quad k = 1, \dots, n.$$

Αν η f είναι διαφορίσιμη τάξης 2 (αντιστ. διαφορίσιμη τάξης C^2), τότε υπάρχουν όλες οι **μερικές παράγωγοι τάξης 2**, δηλαδή όλες οι

$$\left. \frac{\partial^2 f_j}{\partial x_k \partial x_i} \right|_a, \quad i, k = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n,$$

για κάθε $a \in U$ (αντιστ. υπάρχουν όλες οι μερικές παράγωγοι τάξης 2 και είναι συνεχείς). Αντιστρόφως, αν οι 2-τάξης μερικές παράγωγοι υπάρχουν και είναι συνεχείς, τότε και η f είναι διαφορίσιμη τάξης C^2 .

Ανάλογα έχουμε τις μερικές παραγώγους τάξης p , για κάθε $p = 1, 2, \dots$. Ιδιαίτερώς, ισχύει το επόμενο

Α'. 19 Θεώρημα. Εστω $f: U \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ (U ανοιχτό) και $a \in U$. Η f είναι διαφορίσιμη τάξης C^∞ τότε και μόνον τότε αν υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι κάθε τάξης και είναι συνεχείς.

Α'. 20 Θεώρημα (της Αντίστροφης Απεικόνισης). Εστω $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ($U \subset \mathbb{R}^n$ ανοιχτό) διαφορίσιμη απεικόνιση τάξης C^p ($p \geq 1$). Αν η παράγωγος $Df(a_o)$ της f στο a_o είναι γραμμικός ισομορφισμός (δηλ. 1-1, επί και γραμμική), τότε υπάρχει (ανοιχτή) περιοχή U_o του a_o με $a_o \in U_o \subset U$ και (ανοιχτή) περιοχή V_o του $f(a_o)$, έτσι ώστε να ισχύουν τα εξής:

i) Ο περιορισμός της f επί του U_o είναι απεικόνιση 1-1 και $f(U_o) = V_o$ (άρα η $f|_{U_o}: U_o \rightarrow V_o$ είναι 1-1 και επί απεικόνιση).

ii) Η αντίστροφη απεικόνιση της $f|_{U_o}$

$$(f|_{U_o})^{-1}: V_o \longrightarrow U_o$$

είναι διαφορίσιμη τάξης C^p (άρα η $f|_{U_o}$ είναι μία C^p -αμφιδιαφόριση).

iii) Για κάθε $a \in U_0$, ισχύει η σχέση

$$(A. 15) \quad Df^{-1}(f(a)) = [Df(a)]^{-1}.$$

Διευκρινίζουμε ότι, αν U, V είναι ανοιχτά υποσύνολα του \mathbb{R}^n , μία απεικόνιση $f: U \rightarrow V$ θα λέγεται C^k -**αμφιδιαφόριση**, αν είναι C^k -διαφορίσιμη και αντιστρέψιμη, και η αντίστροφή της $f^{-1}: V \rightarrow U$ είναι επίσης C^k -διαφορίσιμη.

Θυμίζουμε ακόμη ότι (στο παραπάνω θεώρημα), για να είναι η $Df(a_0): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ γραμμικός ισομορφισμός, αρκεί να είναι γραμμική και (λόγω της πεπερασμένης διάστασης) 1-1 ή επί.

Ισχύει η επόμενη

Α'. 21 Πρόταση. Αν $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοιχτά, μία $f: U \rightarrow V$ είναι C^k -αμφιδιαφόριση, αν είναι C^k -διαφορίσιμη, 1-1 και επί και $Df(x)$ είναι αντιστρέψιμη, για κάθε $x \in U$.

Για τη διατύπωση ενός άλλου θεμελιώδους αποτελέσματος του Διαφορικού Λογισμού εισάγουμε τον εξής συμβολισμό: Αν $f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \supseteq A \rightarrow \mathbb{R}^m$, τότε μπορούμε να γράψουμε ότι

$$f \equiv f(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m).$$

Α'. 22 Θεώρημα (της Πεπλεγμένης Συνάρτησης). Έστω $f: A \rightarrow \mathbb{R}^m$ μία διαφορίσιμη απεικόνιση τάξης C^k , όπου $A \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ είναι ανοιχτό υποσύνολο, και ένα σημείο $(a, b) \in A$, τέτοιο ώστε $f(a, b) = 0$ και ο (μερικός) πίνακας Jacobi

$$J_{(a,b)} \begin{pmatrix} f_1, \dots, f_m \\ y_1, \dots, y_m \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} \Big|_{(a,b)} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial y_m} \Big|_{(a,b)} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_m}{\partial y_1} \Big|_{(a,b)} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial y_m} \Big|_{(a,b)} \end{pmatrix}$$

να είναι αντιστρεπτός (ισοδύναμα: η ορίζουσά του δεν μηδενίζεται). Τότε υπάρχει ανοιχτή περιοχή (ανοιχτή «μπάλλα») $U \subseteq \mathbb{R}^n$ του a , ανοιχτή περιοχή (ανοιχτή «μπάλλα») $V \subseteq \mathbb{R}^m$ του b , με $U \times V \subseteq A$, και μία μοναδική διαφορίσιμη απεικόνιση $g: \mathbb{R}^n \supseteq U \rightarrow V \subseteq \mathbb{R}^m$ τάξης C^k , τέτοια ώστε:

$$g(a) = b; \quad f(x, g(x)) = 0, \quad \forall x \in U,$$

και ο πίνακας $J_{(x,g(x))} \begin{pmatrix} f_1, \dots, f_m \\ y_1, \dots, y_m \end{pmatrix}$ να είναι αντιστρεπτός, για κάθε $x \in U$.

Επιπλέον, ο πίνακας Jacobi της g , στο τυχόν σημείο $x \in U$, δίνεται από τη σχέση (χρησιμοποιώντας την ανάλογη συμβολική μορφή των πινάκων μερικών παραγώγων, όπως πιο πάνω):

$$\begin{aligned} J_x g &:= J_{(x, f(x))} \begin{pmatrix} f_1, \dots, f_m \\ y_1, \dots, y_m \end{pmatrix} \\ &= - \left[J_{(x, f(x))} \begin{pmatrix} f_1, \dots, f_m \\ y_1, \dots, y_m \end{pmatrix} \right]^{-1} \cdot J_{(x, f(x))} \begin{pmatrix} f_1, \dots, f_m \\ x_1, \dots, x_n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Απο την τελευταία σχέση μπορούν να υπολογιστούν και οι μερικές παράγωγοι της g . Θα δούμε μια ευκολότερη περίπτωση στη συνέχεια.

Α'.23 Πρόρισμα Έστω $f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \supseteq A \rightarrow \mathbb{R}$ (A ανοιχτό) μία διαφορίσιμη απεικόνιση τάξης C^k , οπότε $f \equiv f(x_1, \dots, x_n, y)$. Αν $(a, b) \in A$ είναι σημείο, τέτοιο ώστε $f(a, b) = 0$ και

$$f_y(a, b) := \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{(a, b)} \neq 0,$$

τότε υπάρχει ανοιχτή περιοχή (ανοιχτή «μπάλλα») $U \subseteq \mathbb{R}^n$ του a , ανοιχτή περιοχή (ανοιχτό διάστημα) $V \subseteq \mathbb{R}$ του b , με $U \times V \subseteq A$, και μία μοναδική διαφορίσιμη απεικόνιση $g: \mathbb{R}^n \supseteq U \rightarrow V \subseteq \mathbb{R}$ τάξης C^k , τέτοια ώστε:

$$\begin{aligned} g(a) &= b, \\ f(x, g(x)) &= 0 \quad \text{και} \quad f_y(x, g(x)) \neq 0, \quad \forall x \in U. \end{aligned}$$

Επιπλέον, ισχύει ότι

$$(g_{x_1}(x), \dots, g_{x_n}(x)) = - \frac{(f_{x_1}(x, f(x)), \dots, f_{x_n}(x, f(x)))}{f_y(x, f(x))}; \quad \forall x \in U,$$

απ' όπου προκύπτουν οι σχέσεις

$$g_{x_i}(x) = - \frac{f_{x_i}(x, f(x))}{f_y(x, f(x))}; \quad \forall x \in U \quad \text{και} \quad i = 1, \dots, n.$$

Βιβλιογραφία

- [1] M. P. Do CARMO: *Differential geometry of Curves and Surfaces*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey , 1976.
- [2] P. DOMBROWSKI: *150 Years after Gauss' "disquisitiones generales circa superficies curvas"*, Astérisque 62, Soc. Math. de France, Paris, 1979.
- [3] C. C. HSIUNG: *A First Course in Differential Geometry*, John Wiley, New York, 1981.
- [4] W. KLINGENBERG: *A Course in Differential Geometry*, Springer, New York, 1978.
- [5] Δ. ΚΟΥΤΡΟΥΦΙΩΤΗ: *Στοιχειώδης Διαφορική Γεωμετρία*, Leader Books, Αθήνα, 2006.
- [6] W. KÜHNEL: *Differential Geometry*, American Math. Society, Providence, Rhode Island, 2006.
- [7] M. LIPSCHUTZ: *Differential Geometry*, Schaum's Outline Series, McGraw Hill, New York, 1974. Ελληνική μετάφραση: *Διαφορική Γεωμετρία*, ΕΣΠΙ, Ε. Περούδης, Αθήνα, 1981.
- [8] J. McCLEARY: *Geometry from a Differential Point of View*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1994 .
- [9] Μ. ΜΠΡΙΚΑ : *Μαθήματα Θεωρίας Επιφανειών*, Αθήνα, 1958.
- [10] Β. Ο' NEIL: *Elementary Differential Geometry*, Academic Press, New York, 1997. Ελληνική μετάφραση: *Στοιχειώδης Διαφορική Γεωμετρία*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2002.
- [11] J. OPREA: *Differential Geometry and its Applications*, Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 1997.

-
- [12] Π. ΠΑΠΑΖΟΓΛΟΥ: *Σημειώσεις Διαφορικής Γεωμετρίας και Ασκήσεις*, <http://users.uoa.gr/~ppapazog>.
- [13] Β. ΠΑΠΑΝΤΩΝΙΟΥ: *Διαφορική Γεωμετρία I: Θεωρία Καμπυλών*, Πάτρα, 1996.
- [14] Β. ΠΑΠΑΝΤΩΝΙΟΥ: *Διαφορική Γεωμετρία II: Θεωρία Επιφανειών*, Πάτρα, 1997.
- [15] A. PRESSLEY: *Elementary Differential Geometry*, Springer, London, 2001.
- [16] C. REID: *Ο προκλητικός Κος Χίλμπερτ*, Εκδοτικός Οικος Τραυλός, Αθήνα, 2007.
- [17] M. B. W. TENT: *Καρλ Φρίντριχ Γκάους, Ο Πρίγκηπας των Μαθηματικών*, Εκδοτικός Οικος Τραυλός, Αθήνα, 2007.

Πίνακας εννοιών

- ακτίνα καμπυλότητας, 10
- αμφidiaφόριση, 110
- αναπαραμέτρηση
 - καμπύλης, 7
 - μέσω μήκους τόξου, 9
- αντίθετη καμπύλη, 56
- άξονας
 - έλικας, 64
 - περιστροφής, 102
- απεικόνιση
 - Gauss, 150
 - αλλαγής συντεταγμένων, 100
 - διαφορίσιμη, 107
 - διαφορίσιμη στο p , 107
 - μεταφοράς (χαρτών), 100
 - συμμετρίας, 142
- άτλαντας, 85
- βάσεις προσανατολισμένες
 - αρνητικά, 24
 - θετικά, 24
- γενέτειρα
 - καμπύλη, 102
 - κυλίνδρου, 130
- γεωγραφικές συντεταγμένες, 91
- γωνία καμπυλών, 148
- διάνυσμα
 - Darboux, 61
 - δεύτερο κάθετο, 11
 - εφαπτόμενο, 5, 9
 - κάθετο (επιφάνειας), 142
 - κύριο, 186
 - πρωτεύον κάθετο, 10
 - πρώτο κάθετο, 10
 - ταχύτητας, 5, 9
- διανυσματικό πεδίο, 142
- διαφορικό (σημειακό), 117
- εγγύτατος κύκλος, 33
- έλικα
 - γενικευμένη, 64
 - κυκλική, 53
 - κυλινδρική, 64
- ελλειψοειδές, 94
- εμβαδόν (επιφανείας), 148
- επίπεδο
 - εγγύτατο, 12
 - ευθειοποιούν, 12
 - εφαπτόμενο, 115
 - κάθετο, 12
- επιφάνεια
 - εκ περιστροφής, 102
 - κανονική, 85
 - παραμετρημένη, 82
 - προσανατολίσιμη, 143
- επιτάχυνση, 5
- εσωτερικές εξισώσεις, 40
- εφαπτομένη ευθεία, 4
- εφαπτόμενο διάνυσμα
 - επιφάνειας, 113
 - καμπύλης, 5
- εφαπτόμενος χώρος, 113
- ευθεία
 - εφαπτομένη, 4
 - κάθετη, 142
- εξισώσεις

- Weingarten, 159
- εσωτερικές, 40
- φυσικές, 40
- Θεμελιώδη μεγέθη
 - 1ης τάξης, 146
 - 2ης τάξης, 155
- Θεμελιώδης μορφή
 - δεύτερη, 154
 - πρώτη, 145
- Θεώρημα
 - Αντίστροφης
 - Συνάρτησης, 121, 196
 - Θεμελιώδεις
 - των Επιφανειών, 156
 - των Καμπυλών, 36
 - Πεπλεγμένης
 - Συνάρτησης, 197
 - Meusnier, 161
- κάθετη
 - δεύτερη (καμπύλης), 63
 - ευθεία (επιφάνειας), 142
 - καμπυλότητα, 159
 - πρώτη (καμπύλης), 62
 - τομή, 162
- κάθετο διάνυσμα
 - δεύτερο, 11
 - επιφάνειας, 142
 - πρωτεύον, 10
 - πρώτο, 10
- καμπύλες
 - παραμετρικές, 85
 - συντεταγμένων, 85
- καμπύλη, 2
 - αντίθετη, 56
 - απλή, 4
 - γενέτειρα, 102
 - επίπεδη, 2
 - κανονική, 4
 - κατατομής, 102
 - μοναδιαίας ταχύτητας, 9
- ομαλή, 4
- παραμετρημένη, 2
- στο χώρο, 2
- παράλληλη, 77
- σφαιρική, 71
- καμπυλότητα
 - Gauss, 153
 - κάθετη, 159
 - καμπύλης, 10, 20
 - επίπεδη, 41
 - προσημασμένη, 41
 - κύρια, 153
 - μέση, 153
- Κανόνας της Αλυσίδας, 120
- κανονική
 - καμπύλη, 4
 - μορφή καμπύλης, 28
 - παράσταση καμπύλης, 28
- κυκλοειδής, 59
- κυλινδρος (κατακόρυφος), 149
- κύρια
 - καμπυλότητα, 153
 - κατεύθυνση, 153
- κύριο διάνυσμα, 186
- κώνος τετραγωνικός, 94
- λογαριθμική σπείρα, 57
- μησημβρινοί, 102
- μεταφορά, 34
- μέτρο ταχύτητας, 5
- μήκος καμπύλης, 5, 148
- ορθογώνια παραμέτρηση, 148
- παράλληλοι (κύκλοι), 102
- παραβολοειδές
 - ελλειπτικό, 94
 - υπερβολικό, 94
- παραμέτρηση
 - (τύπου) Monge, 92
 - επιφανείας, 82, 84
 - ορθογώνια, 148

- παράμετρος
- φυσική, 9
 - μήκος τόξου, 9
- προσανατολισμός
- βάσεων, 24
 - επιφανειών, 143
 - καμπυλών, 25
- προσέγγιση καμπύλης, 28
- σημείο
- ανωμαλίας, 4
 - ιδιάζον, 10
- σπείρα
- torus, 106
 - λογαριθμική, 57
- στερεά κίνηση, 35
- στερεογραφική προβολή
- από τον βόρειο πόλο, 90
 - από τον νότιο πόλο, 91
- στρέψη, 13, 20
- στροφή, 34
- συμμετρία (απεικόνιση), 142
- σύστημα συντεταγμένων, 82
- σφαιρική δείκτρια, 75
- ταινία του Möbius, 143
- ταυτότητα Lagrange, 184
- τελεστής
- αυτοσυζυγής, 152
 - σχήματος, 151
- τετραγωνικός κώνος, 94
- τοπική παράσταση, 109
- τόρος, 106
- τρίεδρο
- Frenet, 11, 20, 22
 - κατά μήκος καμπύλης, 12
 - συνοδεύον, 11
 - κατά μήκος καμπύλης, 12
- τύπος Euler, 154
- τύποι Frenet-Serret, 15
- γενικευμένοι, 24
- υπερβολοειδές
- δίχωνο, 94
 - μονόχωνο, 94
- φυσικές εξισώσεις, 40
- χάρτης, 82

