

**ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΟΝ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟ ΚΑΙ ΑΝΑΛΥΣΗ ΑΛΓΟΡΙΘΜΩΝ**  
**ΑΝΟΙΞΗ 2010**  
**2Ο ΠΑΚΕΤΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ**

**Οδηγίες:**

1. Ημερομηνία παράδοσης: **Τρίτη 20 Απριλίου, Στην αρχή του μαθήματος.**  
Δεν θα γίνουν δεκτές εκπρόθεσμες εργασίες.
2. Γράφετε **σύντομες** και **περιεκτικές** απαντήσεις.
3. **ΜΗΝ** γράψετε κώδικα! Τις ασκήσεις θα τις διορθώσει άνθρωπος, όχι υπολογιστής!  
Οι αλγόριθμοί σας να μην είναι φορτωμένοι με τεχνικές λεπτομέρειες, ούτε πολύ μεγάλοι!  
Το κυριότερο είναι να φανεί πως έχετε την σωστή ιδέα και ξέρετε τι πρέπει να κάνετε.
4. Συνιστάται η συζήτηση των ασκήσεων μεταξύ σας αλλά το γράψιμο των απαντήσεων είναι αυστηρά προσωπική υπόθεση.

**Ασκήσεις:**

1. **Ορισμός:** Ένα γράφημα  $G = (V, E)$  λέγεται διμερές αν:  
υπάρχουν  $U_1, U_2 \subseteq V$  τέτοια ώστε  $U_1 \cup U_2 = V, U_1 \cap U_2 = \emptyset$  και να μην  
υπάρχει ακμή που συνδέει δύο κορυφές μέσα στο ίδιο σύνολο.  
Δηλαδή, κάθε ακμή συνδέει κάποια κορυφή της  $U_1$  με κάποια της  $U_2$ .

Κατασκευάστε έναν αλγόριθμο που δέχεται σαν είσοδο ένα γράφημα και αποφασίζει σε γραμμικό χρόνο αν το γράφημα αυτό είναι διμερές.  
(**Υπόδειξη:** Λέξεις κλειδιά: Χρωματισμός, κύκλοι, αναζήτηση κατά...)

2. Έστω ο παρακάτω κώδικας που εκφράζει την λειτουργία της συνάρτησης  $Quiz(n)$ :

**συνάρτηση  $Quiz(n)$**

1. Αν  $n > 1$
2.      $Quiz(n/2)$
3.      $Quiz(n/2)$
4.     διαδικασία( $n$ )

όπου η συνάρτηση “διαδικασία( $n$ )” είναι μια συνάρτηση που παίρνει χρόνο γραμμικό ως προς το μέγεθος της εισόδου.

- (α') Βρέστε τον χρόνο εκτέλεσης του παραπάνω αλγορίθμου (σε συνάρτηση του μεγέθους της εισόδου), αφού γράψετε και λύσετε την αναδρομική σχέση που τον εκφράζει (Υποθέστε πως το  $n$  είναι δύναμη του 2).
- (β') Φτιάξτε το δένδρο αναδρομής του αλγορίθμου και βρέστε (με απόδειξη) πόσο θα είναι το βάθος του.
- (γ') Πόσα φύλλα έχει το δένδρο;
- (δ') Ποιον γνωστό σας αλγόριθμο σας θυμίζει;

3. **Συνεκτικό** λέγεται ένα γράφημα στο οποίο για κάθε δύο κορυφές, υπάρχει μονοπάτι που τις συνδέει.  
Μονοπάτι σε ένα γράφημα, είναι μια ακολουθία ακμών.  
(Για πιο τυπικούς ορισμούς ανατρέξτε στην βιβλιογραφία).

Κατασκευάστε έναν αλγόριθμο γραμμικού χρόνου, ο οποίος με είσοδο ένα (μη κατευθυνόμενο) γράφημα  $G$ , θα αποφασίζει αν είναι συνεκτικό ή όχι.

4. Εξηγήστε γιατί η πρόταση “Ο χρόνος εκτέλεσης του τάδε αλγορίθμου είναι τουλάχιστον  $O(n^2)$ ” δεν έχει νόημα.
5. Γράψτε ένα αλγόριθμο που να λύνει το παρακάτω πρόβλημα:  
**Είσοδος:** Ταξινομημένος πίνακας ακεραίων  $A = [a_1, a_2, \dots, a_n]$  και  $k$  ακέραιος.  
**Έρωτημα:** Υπάρχει ο  $k$  μέσα στον  $A$ ; (Ο αλγόριθμος πρέπει να επιστρέφει “Ναι” ή “Όχι” ανάλογα).  
Ο αλγόριθμός σας πρέπει να τρέχει σε χρόνο  $O(\log n)$ .