Εισαγωγή στον σχεδιασμό και Ανάλυση Αλγορίθμων
1ο Πακέτο Ασκήσεων

Ενδεικτικές Λύσεις

5 Απριλίου 2010

1. Η πρώτη υπόθεση μας δίνει c_1, n_1 τέτοια ώστε $\forall n \geq n_1, f(n) \leq c_1 g(n)$. Ανάλογα η δεύτερη υπόθεση μας δίνει c_2, n_2 τέτοια ώστε $\forall n \geq n_2, g(n) \leq c_2 h(n)$.

   Συνδυάζοντας τα δύο αυτά, πέρνουμε $\forall n \geq max\{n_1, n_2\}$
   $f(n) \leq c_1 c_2 h(n)$

   Άρα ισχύει ο ορισμός με $n_0 = max\{n_1, n_2\}$ και $c_0 = c_1 c_2$

2. Η σωστή σειρά είναι: $loglogn, logn, n^{0.3}, n, nlogn, n^2, n^{logn}, 2^n, n2^n, 3^n, n!, n^n$

3. Το Κεντρικό Θεώρημα μας δίνει, πολύ εύκολα, Θ ή Ο (ανάλογα με την μορφή του Κ.Θ που χρησιμοποιούμε) φράγματα για τις 4 πρώτες περιπτώσεις

   (α΄) $\Theta(nlogn)$

   (β΄) $\Theta(n^{log5})$

   (γ΄) $\Theta(n^{log_3 2})$

   (δ΄) $\Theta(n^{log_4 5})$

   (ε΄) $T(n) = T(n-1) + 1 = (T(n-2) + 1) + 1 = \ldots = n = O(n)$

   (ϛ΄) Με αλλαγή μεταβλητής $m = logn$ παίρνουμε $T(2^n) = T(2^{n/2}) + 1$
   Θέτουμε $S(m) = T(2^n)$ και πέρνουμε την αναδρομική σχέση $S(m) = S(m/2) + 1$ η οποία έχει λύση $O(logm)$, άρα τελικά T(n)=($O(loglogn)$

4. (α΄) $n! = 1 \cdot 2 \ldots \cdot n \leq n \cdot n \ldots \cdot n = n^n$. Άρα κατ΄ ευθείαν $n! = O(n^n)$.

   (β΄) Χρησιμοποιώντας το παραπάνω και το γεγονός πως η συνάρτηση $logn$ είναι αύξουσα έχουμε πως $log(n!) \leq log(n^n) = nlogn$.

   (γ΄) Χρησιμοποιώντας την σχέση $n! \geq (n/2)^{n/2}$ (απόδειξτε την με επαγωγή), έχουμε πως $log(n!) \geq (n/2)(log(n) - log2)$, άρα $log(n!)$=$\Omega(nlogn)$.

5. (α΄) $2^{n+1} = 2 \cdot 2^n$ =$\Theta(2^n)$

   (β΄) $2^{2n} = (2^n)^2$ =$\Omega(2^n)$

(γ′) $n^2 log(n^{100})$=O(n^3)

(δ′) n=O(n^2)

(ε′) $2^{10000}n=\Theta(n)$