Εισαγωγη στον Σχεδιασμο και Αναλυση Αλγοριθμων
Ασυμπτωτικος Συμβολισμος

Ορισμός: $O(f(n)) = \{g(n)|$ Υπάρχουν θετικές σταθερές c και n_0 τέτοιες ώστε για κάθε $n \geq n_0$: $0 \leq g(n) \leq cf(n)\}$

Διαισθητικά ο ορισμός μας λέει πως η συνάρτηση $f(n)$ είναι ένα ‘‘άνω φράγμα’’ της $g(n)$ και πως ασυμπωτικά (δηλαδή για αρκετά μεγάλα n) η f αυξάνει γρηγορότερα από την g.

Παράδειγματα

1. $3n = O(n)$, με $n_0 = 1$ και $c = 3$
2. $n^2 = O(n^k)$, για κάθε $k \geq 2$ με σταθερά $c = 1$
3. $n^2 + 10n = O(n^2)$. Ο όρος $10n$ χάνεται από ένα σημείο και μετά και η τιμή της παράστασης παίρνει ‘‘σχεδόν’’ την τιμή του μεγιστοβάθμιου όρου.

Αντίστοιχος ορισμός είναι και ο επόμενος.

Ορισμός: $\Omega(f(n)) = \{g(n)|$ Υπάρχουν θετικές σταθερές c και n_0 τέτοιες ώστε για κάθε $n \geq n_0$: $0 \leq cf(n) \leq g(n)\}$

Διαισθητικά η συνάρτηση $f(n)$ είναι ένα ‘‘κάτω φράγμα’’ της $g(n)$.

Και τελικά ένας τρίτος συμβολισμός συνδυάζει και τα δύο παραπάνω:

Ορισμός: $\Theta(f(n)) = \{g(n)|$ Υπάρχουν θετικές σταθερές c_1, c_2 και n_0 τέτοιες ώστε για κάθε $n \geq n_0$: $0 \leq c_1 f(n) \leq g(n) \leq c_2 f(n)\}$

Είναι εύκολο να δείξει κανείς πως
$f(n)=\Theta(g(n)) \Leftrightarrow f(n) = O(g(n))$ και $f(n) =\Omega(g(n))$

ΠΡΟΣΟΧΗ: Το $O(f(n))$ είναι **σύνολο**! Ο συμβολισμός $3n^2 = O(n^2)$ είναι τυπικά λάθος και ο σωστός είναι $3n^2 \in O(n^2)$ (απλά ο πρώτος είναι πιο βολικός και συνηθισμένος).

Πιο ίσχυροι (αν και τελειώς ανάλογοι με τους παραπάνω) είναι οι εξής συμβολισμοί:

Ορισμός: $o(f(n) = \{g(n)|$ Για οποιαδήποτε θετική σταθερά c υπάρχει σταθερά $n_0 > 0$ τέτοια ώστε για κάθε $n \geq n_0$: $0 \leq g(n) < cf(n)\}$

Ορισμός: $\omega(f(n) = \{g(n)|$ Για οποιαδήποτε θετική σταθερά c υπάρχει σταθερά $n_0 > 0$ τέτοια ώστε για κάθε $n \geq n_0$: $0 \leq cf(n) < g(n)\}$

Είναι εύκολο να αποδείξει κανείς τις παρακάτω ιδιότητες:

1. **Μεταβατικότητα** Αν $f(n) = O(g(n))$ και $g(n) = O(h(n))$ τότε $f(n) = O(h(n))$.

   Το ίδιο ισχύει και για όλα τα υπόλοιπα σύμβολα.

2. **Αυτοπάθεια** $f(n)$=O,Θ,Ω$(f(n))$.

   Αυτό δεν ισχύει για τους συμβολισμούς ο και ω.

3. **Συμμετρία** $f(n)$ =Θ$(g(n))$ αν και μόνο αν $g(n)$ =Θ$(f(n))$

4. **Αντιστροφική Συμμετρία** $f(n) = O(g(n))$ αν και μόνο αν $g(n)$ =Ω$(f(n))$

   $f(n)$ =ο$(g(n))$ αν και μόνο αν $g(n)$ =ω$(f(n))$

Είναι απαραίτητο για την εξοικείωση και κατανόηση των ορισμών να προσπαθήσετε να αποδείξετε μερικές από τις παραπάνω ιδιότητες.

Για περισσότερες πληροφορίες ανατρέξτε εκτός από τα βιβλία και στο διαδίκτυο. Θα βρείτε τεράστια μάζα πληροφοριών σε αρκετά ευανάγνωστη μορφή.