# Εισαγωγη στον Σχεδιασμο και Αναλυση αλγοριθμων
# Κεντρικο Θεωρημα

Η λύση αναδρομικών σχέσεων είναι βασικό εργαλείο στην ανάλυση των αλγορίθμων μας (πολλές φορές είναι πιο δύσκολο να αναλύσουμε έναν αλγόριθμο πάρα να τον βρούμε!!).
Το Κεντρικό Θεώρημα μας παρέχει ένα ισχυρό εργαλείο για να μας βοήθησει να λύνουμε γρήγορα αναδρομικές σχέσεις.
Το παρουσιάζουμε εδώ σε δύο μορφές, όπως παρουσιάζονται στα βιβλία "Εισαγωγή στους Αλγορίθμους " των $Cormen, Leiserson, Rivest, Stein$ και $Algorithms$ των $Papadimitriou, Varizani, Dasgupta$ στα οποία και παραπέμπουμε για περισσότερες πληροφορίες!

**Κεντρικό Θεώρημα** (Μορφή 1)
Έστω $a \geq 1$,$b > 1$ σταθερές, $f(n)$ συνάρτηση και $T(n)$ μια συνάρτηση που ορίζεται επί των φυσικών με βάση την αναδρομική σχέση:
$T(n) = aT(n/b) + f(n)$.
Τότε
1. Αν $f(n) = O(n^{log_b a - \epsilon})$ για κάποια σταθερά $\epsilon > 0$, τότε $T(n) =\Theta(n^{log_b a})$
2. Αν $f(n) =\Theta(n^{log_b a})$, τότε $T(n) =\Theta(n^{log_b a} logn)$
3. Αν $f(n) =\Omega(n^{log_b a + \epsilon})$ για κάποια σταθερά $\epsilon > 0$ και αν $af(n/b) \leq cf(n)$ για κάποια σταθερά $c > 1$ και όλα τα $n$ από κάποια τιμή και πάνω,
τότε $T(n) =\Theta(f(n))$

Μια πιο απλή (ίσως) μορφή είναι η παρακάτω

**Κεντρικό Θεώρημα** (Μορφή 2)
Έστω η αναδρομική σχέση
$T(n) = aT(n/b) + O(n^d)$, για σταθερές $a > 0, b > 1, d \geq 0$, Τότε
1. $T(n) = O(n^d)$, αν $d > log_b a$
2. $T(n) = O(n^d logn)$, αν $d = log_b a$
3. $T(n) = O(n^{log_b a})$, αν $d < log_b a$

**Παραδείγματα:**

1. $T(n) = 2T(n/2) + n$, (Η αναδρομική σχέση που εκφράζει την συγχωνευτική ταξινόμηση).
   Έχουμε $a = 2, b = 2, f(n) = n = O(n)$. Και
   $log_b a = log_2 2 = 1, n^{log_2 2} = n =\Theta(n)$. Άρα είμαστε στην δεύτερη περίπτωση και $T(n) = O(n^{log_2 2} logn) =\Theta(nlogn)$.

2. $T(n) = 27T(n/5) + n^2$
   Έχουμε $a = 27, b = 5, f(n) = n^2 = O(n^2)$.
   $log_b a = log_5 27 > 2$. Άρα υπάρχει $\epsilon > 0$ ώστε $n^2 = O(n^{log_5 27-\epsilon})$.
   Έτσι είμαστε στην πρώτη περίπτωση και έχουμε πως $T(n) =\Theta(n^{log_5 27})$
   Με βάση την δεύτερη μορφή του Κ.Θ. έχουμε πως $T(n) = O(n^{log_5 27})$ μιας και $d = 2 < log_5 27$

Το Κεντρικό Θεώρημα αφορά μόνο αναδρομικές σχέσεις της συγκεκριμένης μορφής. Για όλες τις άλλες, υπάρχουν πολλές τεχνικές. Εδώ αναφέρουμε δύο.

1. Η μέθοδος της αντικατάστασης.

   **Παράδειγματα:**

   (α΄) $T(n) = T(n-1)+1 = (T(n-2)+1)+1 = \cdots = (T(1)+1)+n-1 = O(n)$.

   (β΄) $T(n) = 2T(n-1)+1 = 2(2T(n-2)+1)+1 = 2^2T(n-2)+1+2 = 2^3T(n-3)+1+2+4 = \cdots = 2^nT(1)+\sum_{k=1}^{n} 2^k = O(2^n)$

   (γ΄) $T(n) = T(n/2)+1 = (T(n/4)+1)+1 = \cdots = T(n/2^k)+k$,
   με $k$ τέτοιο ώστε $n/2^k = 1 \Rightarrow n = 2^k \Rightarrow k = logn$.
   Άρα $T(n) = O(logn)$

2. Η μέθοδος της αλλαγής μεταβλητής.

   **Παράδειγματα:**

   (α΄) $T(2n) = T(n) + 1$. Θέτουμε $m = 2n$ και η σχέση γίνεται $T(m) = T(m/2) + 1$ που έχει λύση (από το Κ.Θ) $O(logm)$. Προσοχή, δεν έχουμε τελειώσει μιας και έχουμε βρει λύση συναρτήση του $m$ ενώ εμείς θέλουμε του $n$. Έτσι μετασχηματίζουμε το $m$ πίσω στο $n$ και παίρνουμε πως $T(n) = O(log(2n))$

(β′) $T(n+1) = T(n) + 1$. Με μία απλή αλλαγή μεταβλητής $m = n + 1$, η σχέση μετατρέπεται στην σχέση του παραδείγματος (α′) στην μέθοδο της αντικατάστασης. Άρα $T(m) = O(m) = O(n+1) = O(n)$