ΙΣΤΟΡΙΑ ΝΕΩΤΕΡΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ (896)

Σύντομη περίληψη του Κεφ. 1

1. ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΑ ΚΑΙ ΜΗ ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΕΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΕΣ

1.1 ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΑΝΑΔΡΟΜΗ (Σύντομη και ατελής)

Στην καθημερινή μας εμπειρία παρατηρούμε μιά πληθώρα γεωμετρικών μορφών και αντιλαμβανόμαστε ένα είδος γεωμετρικής δομής στη φύση που μας περιβάλλει. Η αντίληψη αυτή ενισχύεται από τη σημερινή επιστήμη, η οποία μας αποκαλύπτει ότι παντού μέσα στη φύση υπάρχει μια "Γεωμετρία", η τάξη της οποίας υπόκειται της δομής όλων των πραγμάτων, από τα μόρια μέχρι τους γαλαξίες, από το μικρότερο στο μεγαλύτερο.

Στους αρχαιότατους χρόνους, τότε που επιστήμη ήταν ένα με τη θρησκεία και τη μαγεία, η βασική γνώση ήταν συγκεντρωμένη στους ιερείς. Τα μαθηματικά (αριθμητική και γεωμετρία) της εποχής αυτής αποτελούν μέρος της μυστικής γνώσης και συχνά συνδέονται με το μυστικισμό. Αργότερα, η αρμονία, που ενυπάρχει μέσα στη γεωμετρία, θεωρήθηκε έκφραση ενός θεϊκού σχεδίου που διέπει τον κόσμο ("Αεί ο Θεός ο Μέγας Γεωμετρεί").

Ο χειρισμός των γεωμετρικών μορφών και η μελέτη τους όμως απαιτεί μιά ιδεατή αναπαράσταση τους. Έτσι, ο κύκλος μπορεί να θεωρηθεί σαν η ιδεατή αποτύπωση του ηλιακού δίσκου ή των περάτων του φυσικού ορίζοντα. Η (μαθηματική) σφαίρα μπορεί να θεωρηθεί μιά αναπαράσταση του ουράνιου θόλου κλπ.

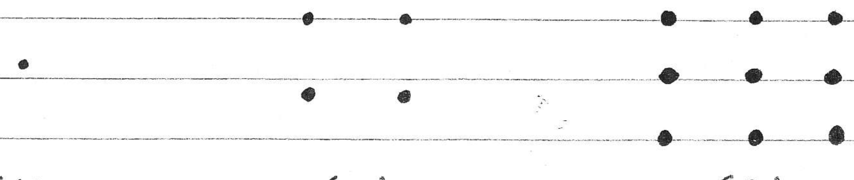
Η αφαίρεση της καθημερινής εμπειρίας και η μελέτη των γεωμετρικών μορφών (δηλ. η μεταφορά της απλής παρατήρησης στο επίπεδο μιάς διεργασίας νοητικής) αρχικά εξυπηρέτησε πρακτικούς σκοπούς. Στην αρχαία Αίγυπτο η Γεωμετρία χρησιμοποιήθηκε στην οριοθέτηση και καταμέτρηση της γης, δηλ. στη "μέτρηση της γης", εξ ού και ο όρος Γεωμετρία. Αυτό ήταν απαραίτητο μετά τις ετήσιες πλημμύρες του Νείλου ποταμού, προκειμένου να αποδοθούν οι ιδιοκτησίες στους φορείς τους και να επιμετρηθούν οι φορολογικές τους υποχρεώσεις προς τον Φαραώ. Πιό προχωρημένοι υπολογισμοί (πάντοτε εμπειρικοί και πρακτικοί) αργότερα χρησιμοποιήθηκαν και στην κατασκευή των πυραμίδων. Πρακτικοί ανάγκες κάλυπτε η Γεωμετρία και σε άλλους λαούς (Βαβυλωνίους, Κινέζους), όπως προκύπτει από νεώτερες αρχαιολογικές ανακαλύψεις.

Σε κάθε περίπτωση, όλη η αναμφισβήτητη πρόοδος στον τομέα αυτό παρέμεινε καθαρά εμπειρική. Δηλ. το εμβαδόν του τετραγώνου ή του παραλληλογράμμου κτλ. υπολογίζεται εμπειρικά, χωρίς να υπάρχει κάποιος συγκεκριμένος τύπος ή αλγόριθμος για άλλες αριθμητικές πράξεις ή υπολογισμούς. Επομένως, οι πολιτισμοί της Αιγύπτου και της Βαβυλωνίας δεν έδωσαν στους Έλληνες με τους οποίους ήρθαν σ'επαφή, κάτι το θεωρητικό αλλά μιά τεράστια συλλογή συγκεκριμένων μαθηματικών δεδομένων με τη μορφή υπολογισμών ή απλών καταγραφών (βλ. μαθηματικούς πίνακες από τις ανασκαφές της Νινευή, τον πάπυρο Rhind και τον πάπυρο της Μόσχας). Όπως, πολύ επιτυχημένα, σχολιάζει ο L.Mlodinow, οι Αιγύπτιοι και Βαβυλώνιοι μοιάζουν με τους κλασσικούς βιολόγους που με μεγάλη υπομονή καταλογογράφησαν τα είδη, κι όχι με τους σύγχρονους γενετιστές που προσπαθούν να κατανοήσουν πώς αναπτύσσονται και λειτουργούν οι οργανισμοί.

Το "γιατί" και "πώς" ακριβώς ήταν εκείνο που αναζήτησαν οι αρχαίοι Έλληνες. Η μελέτη της γεωμετρίας (και των μαθηματικών γενικότερα) σαν θεωρητικό πρόβλημα, πέρα από τις πρακτικές ανάγκες, είναι κατάκτηση του Ελληνικού πνεύματος· Ενός πνεύματος, που μέσω του ορθολογισμού του προσπαθεί να βάλει τάξη στον κόσμο και να τον ερμηνεύσει.

Ο Θαλής ο Μιλήσιος, Γεωμέτρης και φιλόσοφος, ένας εκ των 7 Σοφών, είναι από τους πρώτους που αντελήφθησαν ότι τα μαθηματικά είναι κάτι πιό πέρα από τους λογαριασμούς και τους αλγορίθμους για λογαριασμούς. Σίγουρα προετοίμασε και τους Πυθαγορείους και τα Στοιχεία του Ευκλείδη. Είναι γνωστή η πρόβλεψη της έκλειψης του ήλιου το 585 π.χ., πράγμα που τον τοποθέτησε στο βάθρο του πρώτου επιστήμονα και μαθηματικού. Με τα όμοια τρίγωνα προσδιόρισε το ύψος των πυραμίδων, κάτι που απασχολούσε πολύ τους Αιγύπτιους μηχανικούς, για το οποίον μόνον εμπειρικούς υπολογισμούς μπορούσαν να κάνουν (και κατάφερναν να έχουν μια αρκετά καλή προσέγγιση, που εξυπηρετούσε τις κατασκευαστικές τους ανάγκες). Ο Θαλής ακριβώς μέσα στις εμπειρικές παρατηρήσεις των Αιγυπτίων προσπάθησε να δώσει θεωρητική εξήγηση, να βρεί τη μαθηματική ουσία που ενυπάρχει, να διατυπώσει την αφηρημένη αρχή που κρυβόταν στους υπολογισμούς. Αργότερα ο Θαλής διετύπωσε και απέδειξε, πρώτος αυτός, πολλά θεωρήματα που περιέλαβε ο Ευκλείδης στα Στοιχεία του. Εδώ απόδειξη εννοείται μία λογική διεργασία που εξηγεί/δικαιολογεί τα συμπεράσματα μιάς πρότασης σαν αναγκαίες συνέπειες των υποθέσεων μας. Στο Θαλή αποδίδεται επίσης η έννοια της ισότητας δύο σχημάτων (congruence) βάσει της οποίας 2 σχήματα είναι ίσα αν με κατάλληλη κίνηση (μεταφορά & στροφή) το ένα μπορεί να συμπέσει με το άλλο. Φυσικά οι μαθηματικές απόψεις και επιδόσεις του Θαλή δεν είναι άσχετες και με τη φιλοσοφική του θέση ότι η φύση έχει νόμους και μπορούμε να τους ανακαλύψουμε, όπως και να εξηγήσουμε τι συμβαίνει στη φύση, μέσω της παρατήρησης και της λογικής.

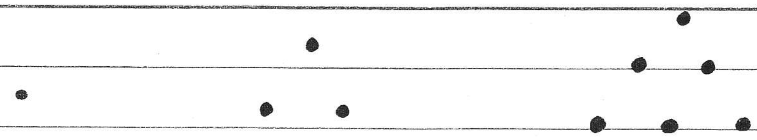
Σταθμό στη μαθηματική σκέψη αποτελεί το έργο του Πυθαγόρα και της Σχολής του. Αναμφισβήτητος μέντορας του Πυθαγόρα υπήρξε ο Θαλής. Ανάμεσα σ' άλλα ανακάλυψε τους νόμους της αρμονίας και ασχολήθηκε ιδιαίτερα με την αριθμοθεωρία. Οι αριθμοί χωρίζονται τετραγωνικούς, τριγωνικούς κλπ. Αν τους φανταστούμε σαν πετραδάκια *) ή τελείες και τους τοποθετήσουμε σε κατάλληλους σχηματισμούς έχουμε μια εικόνα της ταξινόμησης αυτής.



(1) (4) (9)

παραδείγματα τετραγωνικών αριθμών

*) και σε ίσες αποστάσεις μεταξύ τους



(1) (3) (6)

παραδείγματα τριγωνικών αριθμών

Το περίφημο πυθαγόρειο θεώρημα προέκυψε και πάλι από αριθμητικές θεωρήσεις, δηλ. τη μελέτη τριάδων αριθμών, που ικανοποιούν τη σχέση $a^2=\beta^2+\gamma^2$. Τριάδες τέτοιων αριθμών γνώριζαν οι Βαβυλώνιοι αλλά απόδειξη του θεωρήματος για πρώτη φορά δόθηκε από τους Πυθαγόρειους. Η ίδια Σχολή μελέτησε και τα κανονικά σχήματα και πολύγωνα. Γενικά στο πυθαγόρειο έργο έχουμε μια σύζευξη της αριθμητικής με τη γεωμετρία, κάτι που θα επαναληφθεί αργότερα (σε άλλη μορφή και με άλλο στόχο) από τον Descartes (καρτέσιο). Φυσικά ο συσχετισμός αυτός οδήγησε στην ανακάλυψη των αρρήτων (βλ. Τε) που ανέτρεψε τις φιλοσοφικές δοξασίες των Πυθαγορείων περί των ακεραίων αριθμών και ουσιαστικά οδήγησε τη σχολή στην παρακμή της αν όχι στην κατάρρευσή της.

Τα Μαθηματικά (όρος που οφείλεται κι αυτός στους Πυθαγορείους, όπως και ο όρος Κόσμος) φυσικά σχετίζονται και με τις φιλοσοφικές δοξασίες της Σχολής του Πυθαγόρα. Μέσω αυτών και ειδικότερα της Γεωμετρίας αποκαλύπτεται η ύπαρξη ενός θεϊκού σχεδίου, το οποίον εκφράζεται κατά τρόπον γεωμετρικό. Η κατανόηση του γεωμετρικού αυτού σχεδίου είναι αδύνατη από τον άνθρωπο. Η γεωμετρία εκφράζει κάτι το "άρρητο". Ίσως εδώ ο αριθμός να αποτελεί την κατάλληλη γέφυρα ανάμεσα στον άνθρωπο και τη φύση, προκειμένου να προσεγγίσουμε – κατά το δυνατόν – την κατανόησή της. Δεν θα επεκταθούμε στις μυστικιστικές δοξασίες των Πυθαγορείων σχετικά με τους αριθμούς.

Δεν θα αναφερθούμε σε άλλους Μαθηματικούς της αρχαιότητας (αφού σκοπός μας δεν είναι η ιστορική αναδρομή) αλλά θα έρθουμε κατ' ευθείαν στον Μαθηματικό εκείνο που σφράγισε την εξέλιξη της γεωμετρίας, όπως και των μαθηματικών και πλείστων άλλων επιστημών, τον Ευκλείδη.

1.2 Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ ΚΑΙ ΤΑ "ΣΤΟΙΧΕΙΑ" ΤΟΥ

Ο Ευκλείδης έζησε στην Αλεξάνδρεια και η ακμή του τοποθετείται περί το 300 π.Χ. Στο περίφημο έργο του "ΣΤΟΙΧΕΙΑ", οργάνωσε τη γεωμετρία κατά τρόπον αυστηρό, όπως απαιτούσε το πνεύμα της λογικής και της ενότητας το οποίον του κληροδότησαν οι προηγούμενες γενιές των μαθηματικών και των φιλοσόφων. Τα "Στοιχεία" είναι το δεύτερο έργο που τυπώθηκε, μετά την Αγ. Γραφή, και το δεύτερο σε πλήθος εκδόσεων και εκτυπώσεων (και πάλι μετά την Αγ. Γραφή). Καθόρισε ουσιαστικά τα μαθηματικά μέχρι τον 19ο αιώνα, χωρίς φυσικά να έχει καταργηθεί σήμερα. Η ανακάλυψη του έργου αυτού στους Μεσαίους χρόνους υπήρξε η αφετηρία της αναγέννησης και των επιστημών αλλά και του πνεύματος γενικότερα. Τον τρόπο της διατύπωσης και επεξεργασίας της γεωμετρίας του Ευκλείδη μιμήθηκε στο φιλοσοφικό του έργο ο Σπινόζα. Την ευκλείδεια γεωμετρία υπερασπίστηκε και υποστήριξε ως αναγκαία για την κατανόηση του κόσμου ο Kant (ακριβώς αυτόν φοβόταν ο Gauss και γι' αυτό δεν δημοσίευσε ποτέ τα συμπεράσματά του για τη μη ευκλείδεια γεωμετρία!). Ανάλογη σημασία είχε η γεωμετρία (πριν και μετά τον Ε.) και στην Πλατωνική φιλοσοφία.

Τα "Στοιχεία" του Ευκλείδη, που αποτελούνται από 13 βιβλία, περιέχουν τη μαθηματική γνώση της εποχής του, αφού μαζί με τη γεωμετρία υπάρχουν και αριθμητικές γνώσεις. Όπως είπαμε και πριν, ο Ευκλείδης οργάνωσε και συστηματοποίησε την μέχρι τότε γεωμετρική (και μαθηματική) γνώση σύμφωνα με την αντίληψη του Ελληνικού πνεύματος. Υπήρξε ο δημιουργός και αρχιτέκτονας της θεώρησης του 2-διάστατου χώρου μέσω της καθαρής σκέψης, χωρίς αναφορά στον φυσικό κόσμο. Η αξιωματική μέθοδος την οποίαν εισήγαγε, μέθοδο ριζοσπαστική και πρωτόγνωρη για την εποχή του, είναι σταθμός στην ανθρώπινη σκέψη και αφετηρία της ανάπτυξης της λογικής και της μαθηματικής επιστήμης όπως τη γνωρίζουμε σήμερα.

Όπως είπαμε, τα "Στοιχεία" κατανέμονται σε 13 βιβλία. Περιέχουν:

- 23 όρους (ορισμούς)
- 5 αιτήματα
- 7 (ή 9) κοινές έννοιες.

Μέσω αυτών αποδεικνύονται 465 θεωρήματα.

Οι όροι περιέχουν ορισμούς εννοιών όπως η ευθεία γραμμή, το σημείο, γωνία, κύκλος, ορθή γωνία, επίπεδο, επιφάνεια κλπ. Μερικοί όροι είναι ακριβείς (π.χ κύκλος, παράλληλες ευθείες) ενώ άλλοι είναι ασαφείς και χωρίς ιδιαίτερη αξία (όπως π.χ η έννοια του σημείου, της ευθείας).

Τα αιτήματα αναφέρονται σε γεωμετρικές προτάσεις ή ιδιότητες των οποίων η αλήθεια γίνεται αποδεκτή χωρίς απόδειξη. Συνήθως απορρέει από την παρατήρηση και συμφωνεί με τα πειραματικά ή πρακτικά δεδομένα σε ένα μικρό μέρος της καθημερινής εμπειρίας ή πρακτικής. Γιά παράδειγμα, η διαπίστωση, ότι ανάμεσα σε δύο σημεία του εδάφους ή ενός φύλλου χαρτιού χαράσσεται μία ευθεία γραμμή, οδηγεί στη διατύπωση του 1ου αιτήματος (θα το δούμε πιό κάτω).

Οι κοινές έννοιες είναι προτάσεις (που δεχόμαστε - όπως και στα αιτήματα - την αλήθεια τους) οι οποίες αναφέρονται σε μη γεωμετρικές ιδιότητες, αλλά κυρίως είναι προτάσεις της λογικής (π.χ. "τα τω αυτώ ίσα και αλλήλοις εστίν ίσα", "όλον είναι μεγαλύτερον του μέρους", κλπ.).

Τα θεωρήματα πλέον είναι προτάσεις των οποίων η αλήθεια συνάγεται με λογική διαδικασία από τα αιτήματα, τις κοινές έννοιες και από άλλα ήδη αποδειχθέντα θεωρήματα.

Σήμερα χρησιμοποιούμε τον όρο "αξίωμα" (αναφέρεται από τον Αριστοτέλη) γιά τα αιτήματα και τις κοινές έννοιες. Οι αποδεικτικές μέθοδοι που ακολουθούνται στα "Στοιχεία" είναι 3: Η συνθετική, η αναλυτική και η απαγωγή εις άτοπον. Στη συνθετική μέθοδο, προκειμένου να αποδείξουμε μιά πρόταση, χρησιμοποιούμε τους ορισμούς, τα αξιώματα και άλλες, ήδη γνωστές προτάσεις (που κι αυτές απορρέουν από τα αξιώματα και τους ορισμούς και καταλήγουμε, με λογικούς συλλογισμούς, στην προς απόδειξη. Η αναλυτική μέθοδος βασίζεται στην εξής μεθοδολογία. Δεχόμαστε προς στιγμήν ότι η προς απόδειξη πρόταση είναι αληθής. Απ'αυτήν συνάγουμε την αλήθεια μιάς δεύτερης ή και περισσοτέρων άλλων προτάσεων. Αν κάποια απ'αυτές ήδη είναι γνωστή (δηλ. γνωρίζουμε ότι έχει ήδη αποδειχθεί), τότε είναι αληθής και η αρχική πρόταση. Τέλος, στην εις άτοπο απαγωγή δεχόμαστε ότι αληθεύει η αντίθετη της πρότασης που ζητάμε να δείξουμε. Χρησιμοποιώντας τώρα άλλες γνωστές προτάσεις και τα αξιώματα καταλήγουμε σε μία πρόταση η οποία όμως είναι αντίθετη μιάς πρότασης η οποία ήδη αληθεύει στο σύστημά μας. Η αντίφαση αυτή αίρεται, προφανώς, αν δεχτούμε την αλήθεια της αρχικής πρότασης, την οποίαν αρχικά είχαμε αρνηθεί.

Από την ευκλείδεια μεθοδολογία, δηλ. τη χρήση βασικών ορισμών και αξιωμάτων, ταυτόχρονα με τη διαπίστωση ότι πολλοί ορισμοί (π.χ γιά το σημείο, την ευθεία κλπ.) είναι ουσιαστικά χωρίς αξία, προκύπτει το συμπέρασμα ότι: ενώ αγνοούμε τις θεμελιώδεις έννοιες "σημείο", "ευθεία", "επίπεδο", "χώρος" (που είναι και η βάση της γεωμετρίας), μέσω των αξιωμάτων ουσιαστικά καθορίζονται οι "σχέσεις" που υπάρχουν μεταξύ αυτών. Ίσως αυτή να είναι ακριβώς η ουσία της μαθηματικής διεργασίας, που διαχωρίζεται από την αντίστοιχη φιλοσοφική, της οποίας ο στόχος είναι κάτι το εντελώς διαφορετικό. Δηλ. η εύρεση των σχέσεων και όχι η "ουσία" των αντικειμένων μας.

Θα διατυπώσουμε τα αξιώματα (αιτήματα) των Στοιχείων γιά να κάνουμε μιά πολύ σύντομη κριτική που θα δικαιολογήσει τις νεώτερες αναθεωρήσεις. Θα τα διατυπώσουμε με τον πιό απλό τρόπο, χωρίς την ακριβή μετάφραση του πρωτοτύπου, γιά λόγους ευκολίας.

Αξίωμα 1. Από ένα σημείο άγεται σε ένα άλλο μία ευθεία γραμμή

Αξίωμα 2. Κάθε πεπερασμένη ευθεία μπορεί να επεκτείνεται συνεχώς και ευθυγράμμως.

Αξίωμα 3. Μπορούμε να γράψουμε κύκλο με οποιοδήποτε κέντρο και οποιαδήποτε ακτίνα.

Αξίωμα 4. Όλες οι ορθές γωνίες είναι ίσες

Αξίωμα 5. Αν μία ευθεία, που τέμνει δύο άλλες ευθείες, σχηματίζει τις εντός και επί τα αυτά γωνίες με άθροισμα μικρότερο των δύο ορθών, τότε οι δύο ευθείες, προεκτεινόμενες επ' άπειρον θα συμπέσουν (θα τμηθούν) και μάλιστα πρός το μέρος όπου βρίσκονται οι γωνίες με το μικρότερο των 2 ορθών άθροισμα.

Τα 2 πρώτα αξιώματα φαίνονται απλά και συμφωνούν με τη συνήθη εμπειρία. Το 3° είναι λίγο πιό λεπτό και συνεπάγεται ότι δεχόμαστε το αναλλοίωτο του κύκλου καθώς κινούμαστε από σημείο σε σημείο όταν χαράζουμε τον κύκλο. Δηλ. η απόσταση ορίζεται με τέτοιο τρόπο στο χώρο ώστε να εξασφαλίζεται κάτι τέτοιο. Το 4° αξίωμα κι αυτό φαίνεται απλό και προφανές. Αλλά αν μπορεί να διαπιστωθεί "πειραματικά" στο χαρτί μας αυτό δεν σημαίνει ότι είναι και αληθές σε έναν άλλο κόσμο (όπως, φυσικά, αυτό μπορεί να συμβεί και με τ' άλλα αξιώματα). Τέλος, το 5° αξίωμα, που είναι γνωστό και σαν "αξίωμα των παραλλήλων" δεν φαίνεται τόσο άμεσο ή προφανές όπως τα άλλα. Οφείλεται μάλλον αποκλειστικά στον Ευκλείδη και δεν πρέπει να περιείχετο στη γεωμετρική γνώση που προϋπήρχε και που κατέγραψε ο Ευκλείδης, αν και υποστηρίζεται ότι μπορεί να ήταν γνωστό και στους Πυθαγορείους.

Η ιστορία του 5° αξιώματος είναι ιδιαίτερα σημαντική. Ο ίδιος ο Ευκλείδης δεν το χρησιμοποίησε παρά μετά τις 28 πρώτες προτάσεις του (θεωρήματα). Και οι μεταγενέστεροι μαθηματικοί φαίνεται πώς το αντιμετώπισαν με αμηχανία, γι' αυτό και πάρα πολλοί θεώρησαν ότι πρέπει να είναι συνέπεια των άλλων αξιωμάτων και προσπάθησαν να το αναγάγουν σ' αυτά. Αυτό άρχισε σχεδόν αμέσως με την εμφάνιση των Στοιχείων και συνεχίστηκε μέχρι τον 19° αιώνα όταν τελικά αποδείχτηκε ότι το αξίωμα αυτό είναι ανεξάρτητο των άλλων (Eugenio Beltrami, 1868).

Όπως γνωρίζουμε, οι απόπειρες απόδειξης*) του αξιώματος των παραλλήλων μέσω των άλλων στην πραγματικότητα αποτέλεσαν άλλη διατύπωση του 5° αξιωμ

*) Αναφέρονται τουλάχιστον 28

τος, γιατί όλοι ξεκινούσαν με μία υπόθεση, που ήταν προφανής αλλά στην πραγματικότητα ήταν ένα άλλο αξίωμα. Ας αναφέρουμε μερικές τέτοιες ισοδύναμες διατυπώσεις:

1. Αξ/μα του Playfair: Από ένα σημείο εκτός ευθείας κείμενο άγεται προς την ευθεία μία και μοναδική ευθεία που είναι Παράλληλη προς τη δοθείσα.

[Με αυτή τη μορφή χρησιμοποιούμε σήμερα το 5° αξίωμα και σίγουρα αυτή η είναι πιό "ευκολόχρηστη".]

2. Το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι ίσο με δύο ορθές.
3. Υπάρχουν ζεύγη ομοίων τριγώνων. [Wallis]
4. Υπάρχει ζεύγος ευθειών που ισαπέχουν η μιά της άλλης.
5. Δοθέντων τριών (διαφορετικών) σημείων υπάρχει κύκλος που διέρχεται δι' αυτών.
6. Αν 3 γωνίες ενός 4-πλεύρου είναι ορθές, τότε είναι ορθή και η τέταρτη γωνία.
7. Αν μία ευθεία τέμνει μια από δύο παράλληλες ευθείες, τότε θα τέμνει και την άλλη.

Η άρνηση του 5° αξιώματος μπορεί να γίνει με δύο τρόπους:

α) Δεχόμαστε ότι από σημείο εκτός ευθείας άγονται 2 ή και περισσότερες παράλληλες προς τη δοθείσα,

β) Αρνούμαστε εξ ολοκλήρου την ύπαρξη της παραλληλίας.

Η άρνηση του 5° αξιώματος είχε σαν αποτέλεσμα τη δημιουργία των λεγομένων μη Ευκλείδειων γεωμετριών (της υπερβολικής, στην περίπτωση α), και της ελλειπτικής στην β)). Αυτό έγινε μετά από αιώνες, μόλις τον 19° αιώνα, και αποτελεί μιά από τις πιό συναρπαστικές εξελίξεις στην ιστορία της γεωμετρίας. Θα επανέλθουμε σ' αυτό το θέμα λίγο πιό κάτω.

Πριν πούμε λίγα πράγματα για την κριτική στην αξιωματική θεμελίωση του Ευκλείδη, ας συμπληρώσουμε ότι παράλληλα με την ανάπτυξη της γεωμετρίας έχουμε μίαν εντυπωσιακή ανάπτυξη της αστρονομίας και της μηχανικής. Χαρακτηριστικά θα αναφέρουμε σχετικά τα ονόματα του Ερατοσθένη (που μέτρησε την περίμετρο της γης, με εκπληκτική ακρίβεια γιά την εποχή του, χρησιμοποιώντας μίαν ευφυή μέθοδο), του Αρίσταρχου του Σάμιου, που μέτρησε το μέγεθος της Σελήνης (χρησιμοποιώντας γεωμετρικές μεθόδους και μιά μορφή πρωτόγονης τριγωνομετρίας) και όλως ιδιαιτέρως του Αρχιμήδη, που έβαλε τα θεμέλια της μηχανικής και του απειροστικού λογισμού. Η ανάπτυξη της γεωμετρίας συνεχίστηκε και μετά τον Ευκλείδη και τον Αρχιμήδη, και ανάμεσα στους πιό σπουδαίους γεωμέτρες της εποχής αυτής πρέπει να αναφέρουμε τον Απολλώνιο, τον Διόφαντο, τον Μενέλαο και τον Πάππο. Μετά απ' αυτούς υπάρχει η κάμψη του ελληνικού πνεύματος και μετά τον θάνατο της Υπατίας (5ος μ.Χ. αιώνας), που θεωρείται και η τελευταία μαθηματικός της μεγάλης ελληνικής παράδοσης, επήλθε η πλήρης στασιμότητα. Γιά την πληρότητα αυτής της σύντομης ιστορικής αναδρομής, θα πρέπει εκτός από τα ονόματα του Θαλή και του Πυθαγόρα, να αναφέρουμε και αυτά των: Ευδόξου, Μέναιχμου, Δεινόστρατου, Θεόδωρου του Κυρηναίου, του Αρχύτα και πλήθους άλλων, που μαζί με τον Πλάτωνα*) και τους μαθητές του έδωσαν στη γεωμετρία τη μορφή ενός πνευματικού έργου μοναδικού γιά την εποχή τους, έργο που διεφύλαξαν σε πλήρη μορφή και οργάνωση τα "Στοιχεία"

.3 ΚΡΙΤΙΚΗ
ΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ
ΑΙ ΑΞ/ΚΗ
ΘΕΜΕΛΙΩΣΗ
ΤΟΥ HILBERT

Η προσεκτική μελέτη των "Στοιχείων" σε πολύ νεώτερες εποχές απεκάλυψε ότι σε κάποιες προτάσεις (υπ' αριθμ. 1, 16, 21, 27) υπάρχει μιά σημαντική ατέλεια. Δηλ. στις προτάσεις αυτές χρησιμοποιούνται κάποιες γεωμετρικές ιδιότητες, τις οποίες ο Ευκλείδης τις θεώρησε δεδομένες, χωρίς αυτές να δικαιολογούνται από γνωστές προτάσεις ή από τα αξιώματα, χωρίς να ορίζονται και χωρίς να διατυπώνονται ρητά σαν αξιώματα ή κοινές έννοιες. Έτσι, γιά παράδειγμα, υποθέτει την συνέχεια των κύκλων, πράγμα που σημαίνει ότι δύο

---

*) Η γεωμετρία κατέχει ιδιαίτερη θέση στην Πλατωνική διδασκαλία. (πρβλ. το "Μηδείς αγεωμέτρητος εισίτω", που κοσμούσε την είσοδο της ακαδημίας).

κύκλοι (σε κατάλληλη θέση, με κατάλληλη ακτίνα) έχουν πάντοτε σημείο τομής. Επίσης δέχεται μία έννοια "μεταξύ". Ακόμη δέχεται ότι μία γραμμή μπορεί επεκτείνεται επ' άπειρον, χωρίς όρια (σύγκρινε ευθεία και μέγιστος κύκλους μιάς σφαίρας). Επίσης, μιά άλλη παραδοχή είναι οι ιδιότητες διαχωρισμού των σημείων και των γραμμών. Έτσι, δέχεται ότι ένα σημείο διαχωρίζει σε δύο διακεκριμένα σύνολα μία γραμμή ενώ μία γραμμή χωρίζει το επίπεδο σε δύο διαφορετικά μέρη (σύνολα).

Αυτές οι ατέλειες, χωρίς να μειώνουν στο ελάχιστο τη σημασία του Ευκλείδειου οικοδομήματος, έπρεπε να διορθωθούν σύμφωνα με τις απαιτήσεις της αυστηρότητας που χαρακτηρίζει τα σύγχρονα μαθηματικά. Η ανάγκη δε αυτή έγινε πιό επιτακτική με την ανακάλυψη και των μη Ευκλείδειων γεωμετριών, οπότε έγινε εναργέστερη η σημασία της τακτοποίησης του συστήματος των αξιωμάτων της κάθε μιάς γεωμετρίας. Πρός την κατεύθυνση αυτή εργάσθηκαν διάφοροι μαθηματικοί, όπως ο Birkhoff, ο Dedekind, ο D. Hilbert και άλλοι.

Στην αξιωματική θεμελίωση του Hilbert *) ("Grundlagen der Geometrie") εξ αρχής θεωρούνται σαν πρωταρχικές έννοιες, μη επιδεχόμενες ορισμό, οι έννοιες:

σημείο, γραμμή (ευθεία), επίπεδο, (κείται) επί,
μεταξύ, ισότητα/σύμπτωση (congruence)

Υπάρχει μία ομάδα αξιωμάτων συνοχής (ή σύνδεσης) (που αποτελείται από 4 αξ/τα)
μία ομάδα αξιωμάτων διάταξης (με 4 αξιώματα)
μία ομάδα αξιωμάτων ισότητας (με 5 αξιώματα)
μία ομάδα αξιωμάτων παραλληλίας (με 1 μοναδικό αξίωμα), και
μία ομάδα αξιωμάτων συνεχείας (με 2 αξιώματα).

• Η πρώτη ομάδα περιλαμβάνει αξιώματα του τύπου: "δύο διαφορετικά σημεία ορίζουν μίαν ευθεία" "υπάρχουν τουλάχιστον 3 διαφορετικά σημεία μη κείμενα επί

*) που αφορά το επίπεδο

της αυτής ευθείας" κλπ. • Η δεύτερη ομάδα περιέχει αξιώματα της μορφής: "Γιά οποιαδήποτε σημεία Α, Γ (διαφορετικά), ∃ τουλάχιστον ένα σημείο Β επί της ευθείας ΑΓ, το οποίον βρίσκεται μεταξύ των Α και Γ".

Μέσα στ' αξιώματα της ομάδας αυτής περιλαμβάνεται το αξίωμα του Pasch: "Εστω Α, Β, Γ τρία διαφορετικά σημεία που δεν κείνται επί της αυτής ευθείας και έστω ℓ μία ευθεία του επιπέδου, που ορίζουν τα Α, Β, Γ, τέτοια ώστε να μην περνάει από κανένα από τα προηγούμενα σημεία. Τότε, αν η ℓ περνάει από ένα σημείο του τμήματος ΑΒ, θα περνάει επίσης και από ένα σημείο του ΑΓ ή από ένα σημείο του ΒΓ.

Το αξίωμα αυτό ισοδυναμεί με το αξίωμα διαχωρισμού: μία ευθεία m χωρίζει τα σημεία του επιπέδου, που δεν βρίσκονται επ' αυτής, σε δύο σύνολα έτσι ώστε γιά 2 σημεία Α, Β που βρίσκονται στο ίδιο σύνολο, το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ να μην τέμνει την m, ενώ γιά τα σημεία Γ, Δ που βρίσκονται σε διαφορετικά σύνολα, το ΓΔ τέμνει την m.

• Η τρίτη ομάδα περιλαμβάνει αξιώματα του τύπου: "αν δύο (ευθύγραμμα) τμήματα είναι ίσα προς τρίτο, τότε είναι και μεταξύ τους ίσα (congruent).

• Το αξίωμα της παραλληλίας διατυπώνεται στη μορφή του Playfair που αναφέραμε πιό πάνω (σελ. 9). • Τέλος στα αξιώματα της συνεχείας περιλαμβάνεται 1) το αξίωμα του Αρχιμήδη: "αν ΑΒ και ΓΔ είναι 2 οποιαδήποτε ευθύγραμμα τμήματα, τότε υπάρχει ένας αριθμός n έτσι ώστε, αν τοποθετηθεί το ΓΔ επί του ΑΒ (ξεκινώντας από το Α), να βρίσκεται σημείο Ε με την ιδιότητα $n \cdot \Gamma\Delta = AE$ και με το Β να βρίσκεται μεταξύ των Α και Ε". 2) το αξίωμα της πληρότητας της γραμμής: "το σύστημα των σημείων επί μιάς ευθείας μαζί με τις σχέσεις της διάταξης και ισότητας (congruence) δεν μπορεί να επεκταθεί έτσι ώστε οι υπάρχουσες σχέσεις μεταξύ των στοιχείων του καθώς και οι βασικές ιδιότητες της γραμμικής διάταξης και ισότητας, που προκύπτουν από από όλα τα προηγούμενα αξιώματα εκτός του αξ/τος της παραλληλίας, να παραμένουν σε ισχύ". Τα δύο προηγούμενα αξιώματα (του Αρχιμήδη και της γραμμικής πληρότητας) μπορούν να αντικατασταθούν από το αξίωμα συνεχείας του Dedekind: "γιά οποιαδήποτε διαμέριση των σημείων μιάς ευθείας σε δύο μη κενά σύνολα, τέτοια ώστε κανένα σημείο του ενός να μην βρίσκεται μεταξύ δύο σημείων του άλλου, υπάρχει ένα σημείο του ενός συνόλου που βρίσκεται μεταξύ οποιουδήποτε άλλου σημείου αυτού του συνόλου και οποιουδήποτε σημείου του άλλου συνόλου".

Στην αξιωματική θεμελίωση του Hilbert περιλαμβάνονται, φυσικά, και οι απαραίτητοι ορισμοί, όπως του ευθυγράμμου τμήματος, του τριγώνου, της γωνίας κτλ.

Το σύστημα του Hilbert είναι διατυπωμένο με τέτοιο τρόπο ώστε να μην αναφέρεται στον κόσμο της καθημερινής εμπειρίας, προς τον οποίον ήταν περισσότερο προσανατολισμένο το σύστημα του Ευκλείδη. Έτσι το σημείο μπορεί να αναφέρεται στο σημείο της εμπειρίας μας αλλά και στο στοιχείο ενός τυχόντος συνόλου, που αυθαιρέτως τα στοιχεία του καλούμε σημεία. Το ίδιο ισχύει ισχύει και για τις ευθείες, ενώ η σχέση της σύμπτωσης ενός σημείου με μια ευθεία ή όχι (δηλ. το να κείται ένα σημείο επί ευθείας) μπορεί να αντιπροσωπεύεται από μία αφηρημένη μαθηματική σχέση (υποσύνολο καταλλήλου καρτεσιανού γινομένου). Θα τα δούμε αυτά λεπτομερέστερα σε επόμενο κεφάλαιο. Την άποψη αυτή για τη θεμελίωση της γεωμετρίας κατά τρόπο γενικό και αφηρημένο, δηλ. χωρίς αναφορά στη φυσική πραγματικότητα, στον κόσμο όπως τον αντιλαμβανόμαστε, υποστηρίζει και ο H. Poincaré, του οποίου παραθέτουμε στην επόμενη σελίδα σχετικά χαρακτηριστικά αποσπάσματα.

...Les expressions "être situé sur, passer par", etc., ne sont pas destinées à évoquer des images; elles sont simplement des synonymes du mot *déterminer*. Les mots "point, droite et plan" eux-mêmes ne doivent provoquer dans l'esprit aucune représentation sensible. Ils pourraient indifféremment désigner des objets d'une nature quelconque, pourvu qu'on pût établir entre ces objets une correspondance telle qu'à tout système de deux objets appelés points correspondît un des objets appelés droites et un seul.

...Ainsi, M. Hilbert a, pour ainsi dire, cherché à mettre les axiomes sous une forme telle qu'ils puissent être appliqués par quelqu'un qui n'en comprendrait pas le sens, parce qu'il n'aurait jamais vu ni points, ni droite, ni plan.

...On pourra ainsi construire toute la géométrie, je ne dirais pas précisement sans y rien comprendre, puisqu'on saisira l'enchaînement logique des propositions, mais tout au moins sans y rien voir. On pourrait confier les axiomes à une machine à raisoner, par exemple au "piano raisoneur" de Stanley Jevons, et on en verrait sortir toute la géométrie.

H. POINCARÉ

Les fondements de la géométrie

1.4 ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΞΙΩΜΑΤΩΝ Όπως αναφέραμε και πιό πάνω, η αξιωματική μέθοδος βασίζεται σε ένα σύστημα δομημένης λογικής, το οποίο περιέχει τα εξής στοιχεία:

- Αρχικές έννοιες (δηλ. όρους που δεν ορίζονται, όπως π.χ. σημείο, ευθεία, κλπ.)
- Ορισμούς (π.χ παράλληλες ευθείες, τρίγωνο κλπ.)
- Αξιώματα (είδαμε προηγουμένως τα αξιώματα του Ευκλείδη).
- Ενα λογικό σύστημα (όπως του Αριστοτέλη)
- Θεωρήματα (τα οποία συνάγονται από τα αξιώματα μέσω του λογικού συστήματος)

Το αξιωματικό σύστημα όμως πρέπει να ικανοποιεί ορισμένες απαιτήσεις.

(1) Πρέπει να είναι συνεπές (consistent), δηλ. πρέπει να μην υπάρχουν αξιώματα ή θεωρήματα που αντιφάσκουν μεταξύ τους. Η σημασία της συνέπειας του συστήματος είναι προφανής. Ποιά αξία θα είχε ένα σύστημα μέσα στο οποίον θα μπορούσαμε ταυτόχρονα να δείξουμε ένα συμπέρασμα και τη άρνησή του;

(2) Πρέπει να είναι ανεξάρτητο, δηλ. τα αξιώματά του να είναι ανεξάρτητα το ένα των άλλων (με άλλα λόγια, ένα αξίωμα δεν μπορεί να αποδειχτεί από τα άλλα αξιώματα)

(3) Τέλος, το σύστημα πρέπει να είναι πλήρες με την έννοια ότι για κάθε πρόταση, που διατυπώνεται με αρχικές έννοιες και με στοιχεία που ορίζονται (δίνονται μέσω των ορισμών του συστήματος), πρέπει να μπορούμε να αποφανθούμε ότι είναι (η πρότασης) αληθής ή όχι. Αυτό, ισοδύναμα, σημαίνει ότι δεν μπορούμε να προσθέσουμε στο σύστημα ένα άλλο αξίωμα, φυσικά, ανεξάρτητο από τα ήδη υπάρχοντα αξιώματα.

Η άμεση απόδειξη των παραπάνω ιδιοτήτων είναι κάτι που είναι εξαιρετικά δύσκολο, αν όχι αδύνατο, να γίνει. Ιδιαίτερα η πληρότητα είναι κάτι που τίθεται σε αμφισβήτηση μετά το Θεώρημα του Gödel. Γιά τον έλεγχο της ανεξαρτησίας και της συνέπειας πολλές φορές καταφεύγουμε στα "μοντέλα". Ενα μοντέλο γιά ένα αξιωματικό σύστημα προκύπτει όταν στους μη προσδιορισμένους όρους (δηλ. τις αρχικές έννοιες) του συστήματος δώσουμε μία συγκεκριμένη ερμηνεία έτσι ώστε τα αξιώματα να να είναι πλέον αληθείς προτάσεις γιά αντικείμενα της ερμηνείας. Τα μοντέλα μπορούν να αναφέρονται είτε στον φυσικό κόσμο είτε σε άλλα αξιωματικά συστήματα. Έτσι, αν έχουμε ένα μοντέλο μέσα στο φυσικό κόσμο και κάποια πρόταση/θεώρημα/αξίωμα του συστήματός μας μεταφράζεται σε ένα συμπέρασμα που δεν αληθεύει ή αντιφάσκει στο μοντέλο, τότε είναι προφανές ότι το αρχικό αξιωματικό σύστημα δεν είναι συνεπές. Ομοίως κι αν το μοντέλο ορίζεται σ' ένα άλλο αξιωματικό σύστημα που γνωρίζουμε ότι είναι ήδη συνεπές.

Η ανεξαρτησία ενός αξιωματικού συστήματος προφανώς οδηγεί στην επιλογή του ελάχιστου αριθμού αξιωμάτων που είναι απαραίτητα. Βέβαια, όσο πιό λίγα είναι τα αξιώματα, τόσο πιό δύσκολες είναι – οι αποδείξεις, και ο αριθμός των προς απόδειξη προτάσεων αυξάνεται. Γιά τον έλεγχο της ανεξαρτησίας ενός συστήματος και πάλι καταφεύγουμε στα μοντέλα. Μιά συνήθης διαδικασία είναι η εξής: Έστω ότι θέλουμε να ελέγξουμε στο σύστημα αξιωμάτων S την ανεξαρτησία του αξιώματος X. Προσπαθούμε να κατασκευάσουμε κατόπιν ένα μοντέλο γιά το σύστημα S', που προκύπτει από το S όταν στη θέση του X βάλουμε την άρνηση του X. Αν τώρα τα αξιώματα του S' ισχύουν στο μοντέλο, τότε έχουμε την ανεξαρτησία του X. Φυσικά η διαδικασία είναι επίπονη, αφού πρέπει να κατασκευαστούν m το πλήθος μοντέλα, αν m είναι ο αριθμός των αξιωμάτων του S.

Γιά την πληρότητα είπαμε λίγα πράγματα πιό πάνω. Θα δούμε στο επόμενο κεφάλαιο μερικά παραδείγματα μοντέλων της Συσχετισμένης και της Προβολικής Γεωμετρίας και, πολύ σύντομα, μερικά των μη ευκλείδειων γεωμετριών εδώ.

1.5 ΜΗ ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΕΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΕΣ

Οι μη ευκλείδειες γεωμετρίες είναι δημιούργημα σύγχρονο (19ος αιώνας) και προέκυψαν από τη συστηματική μελέτη της ευκλείδειας γεωμετρίας, ιδιαίτερα από την προσπάθεια της απόδειξης του Ευκλείδειου αιτήματος των παραλλήλων. Από φιλοσοφική άποψη συνάντησαν την άρνηση του Kant, αφού πάρα πολλά συμπεράσματα είναι παράξενα. Όπως έχουμε αναφέρει και πιο πάνω (σελ. 8), το ερώτημα της ανεξαρτησίας του 5ου αξιώματος απαντήθηκε οριστικά από τον E. Beltrami, ο οποίος κατασκεύασε ένα μοντέλο για την υπερβολική γεωμετρία. Η σχετική διαδικασία είναι αυτή που περιγράψαμε στην προηγούμενη σελίδα. Το αξιωματικό σύστημα S΄ της Υ.Γ προέρχεται από το S της Ε.Γ με την άρνηση του 5ου αξιώματος. Στο μοντέλο του S΄ ισχύουν όλα τα αξιώματα του S΄ (και θεωρήματα πιά), άρα το 5ο αξίωμα είναι ανεξάρτητο!

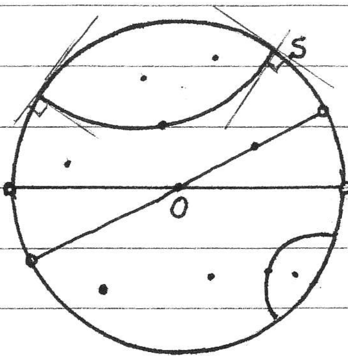
Οι μη ευκλείδειες γεωμετρίες ήταν δύσκολες στην κατανόησή τους μέχρι την ανακάλυψη μερικών απλών μοντέλων.

Αναφέρθηκε ήδη στη σελίδα 9 ότι η <u>υπερβολική γεωμετρία</u> προκύπτει αν αντί του 5ου αξ/τος δεχτούμε ότι "από σημείο εκτός ευθείας άγονται 2 ή και περισσότερες παράλληλες προς τη δοθείσα". Η αλλαγή αυτή δεν επηρεάζει ολόκληρο το οικοδόμημα της ευκλείδειας γεωμετρίας. Πολλές προτάσεις της τελευταίας ισχύουν. Άλλες όμως ανατρέπονται πλήρως και οδηγούν σε "περίεργα" (για τη συνήθη εμπειρία) συμπεράσματα, όπως ότι το "άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι μικρότερο των δύο ορθών".

Θεωρούμε σαν δημιουργούς της υπερβολικής γεωμετρίας τον Ρώσο Nikolai Ivanovich Lobachevsky και τον Ούγγρο János Bolyai, που δημοσίευσαν τα αποτελέσματά τους (ανεξάρτητα ο ένας από τον άλλον) το 1829 και 1832 αντίστοιχα. Όμως και ο K.F. Gauss είχε εργαστεί στην υπερβολική γεωμετρία, αλλά ποτέ δεν δημοσίευσε τη δουλειά του "φοβούμενος τις φωνές των Βοιωτών". Εδώ αξίζει να σημειώσουμε ότι ένας σημαντικός αριθμός αποτελεσμάτων της υπερβολικής γεωμετρίας οφείλονται και στον Ιταλό Gerolamo Saccheri (1667-1773), τα οποία προέκυψαν από την προσπάθειά του να αποδείξει το 5ο αξίωμα! Επειδή τα συμπεράσματα αυτά ήσαν ριζικά αντίθετα από τα συμπεράσματα της ευκλείδειας γεωμετρίας, θεώρησε ότι αυτά αποτελούσαν αντίφαση προς το 5ο αξίωμα (αφού μαθηματικοί, φυσικοί και φιλόσοφοι δέχονταν την ευκλείδεια γεωμετρία ως τη μόνη δυνατή), άρα αυτό οδηγούσε στην απόδειξη(!) του περιφήμου αξιώματος

Τα πράγματα έγιναν πιό ευκολονόητα με τα μοντέλα του H. Poincaré και του F. Klein. Στο πρώτο,

- ως σημεία της Υ.Γ θεωρούμε τα σημεία στο εσωτερικό ενός κύκλου S της Ε.Γ.
- ως ευθείες της Υ.Γ —"— τις διαμέτρους του S (χωρίς τα σημεία της περιφέρειας) και τους κύκλους που είναι ορθογώνιοι στον S.
- ως επίπεδο της Υ.Γ —"— το εσωτερικό του S.

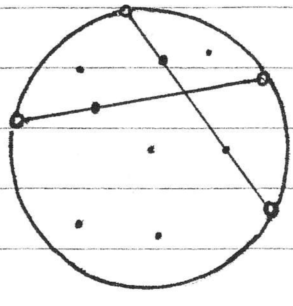


(Σχ. 1)

Με την αντιστοιχία αυτή τα αξιώματα της Υ.Γ γίνονται θεωρήματα (της Ε.Γ). Η αξία του μοντέλου αυτού είναι ιστορικά σημαντική γιατί χρησιμοποιήθηκε προκειμένου να αποδειχτεί η συνέπεια της υπερβολικής γεωμετρίας. Αξίζει να πούμε εδώ ότι στο μοντέλο αυτό δεν υπάρχει διατήρηση του μήκους της ευκλείδειας γεωμετρίας.

Το μοντέλο του Klein είναι κάπως παρόμοιο. Σ' αυτό (βλ. και Σχήμα 2)

- ως σημεία παίρνουμε πάλι τα εσωτερικά του S, ως ευθείες τις ανοιχτές χορδές και ως επίπεδο το εσωτερικό του S.



(Σχ. 2)

Το μοντέλο αυτό χρησιμοποιείται κυρίως για να δείξουμε ότι η Υπερβολική γεωμετρία είναι υποσύστημα (υπογεωμετρία) της προβολικής γεωμετρίας, για την οποία θα γίνει λόγος στο επόμενο κεφάλαιο.

Η ελλειπτική γεωμετρία, απ' το άλλο μέρος, εμφανίζεται πιο πολύπλοκη στη θεμελίωσή της απ' ότι η υπερβολική γεωμετρία. Γενικά λέμε ότι στην ελλειπτική γεωμετρία αρνούμαστε καθ' ολοκληρίαν την ύπαρξη παραλλήλων. Όμως, αν το 5ο αξίωμα αντικατασταθεί με το ελλειπτικό αξίωμα: "2 ευθείες (γραμμές) πάντοτε τέμνονται" και κρατήσουμε ως έχουν τα υπόλοιπα 4 αξιώματα της Ευκλείδειας γεωμετρίας, τότε, μέσω του 2ου αξιώματος και σχετικών προτάσεων που συνάγονται απ' αυτό, καταλήγουμε στην ύπαρξη παραλλήλων! Επομένως για να θεμελιωθεί μία γεωμετρία που να μην διαθέτει παράλληλες, θα πρέπει να διατηρήσουμε τα αξιώματα 1, 3, 4 της Ευκλείδειας γεωμετρίας, να αντικαταστήσουμε το 5ο αξίωμα με το Ελλειπτικό αξίωμα και να αντικαταστήσουμε το 2ο αξίωμα με το

Αξίωμα 2': Ένα πεπερασμένο ευθύγραμμο τμήμα μπορεί να επεκταθεί σε μία ευθεία. Η ευθεία αυτή μπορεί να είναι χωρίς όρια αλλά όχι απαραιτήτως απείρου μήκους.

Αλλά κι αυτά δεν είναι αρκετά. Πρέπει να καταργήσουμε ένα από τα επόμενα συμπεράσματα (που, όπως αποδεικνύεται, οδηγούν μοιραία στην ύπαρξη παραλλήλων):

(A) μία ευθεία χωρίζει το επίπεδο

(B) δύο (διαφορετικά) σημεία ορίζουν μιά μοναδική ευθεία.

Άρνηση του (A) με διατήρηση του (B) οδηγεί στη λεγόμενη απλή ελλειπτική γεωμετρία, ενώ άρνηση του (B)*) με διατήρηση του (A) οδηγεί στη διπλή ελλειπτική γεωμετρία.

Και στις δύο περιπτώσεις παίρνουμε μία γεωμετρία απολύτως διαφορετική από τη γεωμετρία του Ευκλείδη, χωρίς να ισχύει τίποτε από τα συμπεράσματα της τελευταίας (ενώ η υπερβολική γεωμετρία διασώζει μερικά απ' αυτά).

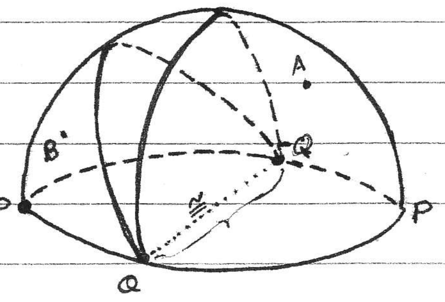
Ένα συνεπές σύστημα αξιωμάτων της ελλειπτικής γεωμετρίας, στην ακριβή του μορφή, είναι πιο πολύπλοκο από την παρακάτω βασική περιγραφή.

*) Δηλ. άρνηση της μοναδικότητας, αφού ορίζουν ευθεία λόγω του 1ου αξ.

Για την πληρότητα θα περιγράψουμε δύο μοντέλα της ελλειπτικής γεωμετρίας. Το πρώτο (Σχ. 3) αναφέρεται στην απλή ελλειπτική γεωμετρία και προκύπτει αν

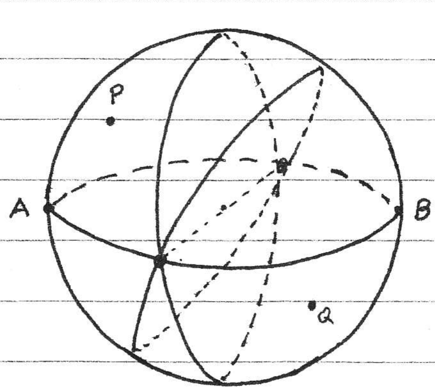
- ως σημεία της Ελ.Γ. θεωρήσουμε * τα σημεία της επιφάνειας ενός ημισφαιρίου (στον ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}^3$), εφ' όσον αυτά δεν κείνται επί της γραμμής του ισημερινού, και
  * τα σημεία του ισημερινού όταν τα ταυτίσουμε με τα αντιδιαμετρικά τους
- ως ευθείες της Ελ.Γ. —//— τους μισούς μέγιστους κύκλους
- ως μήκος της Ελ.Γ —//— το μήκος με την ευκλείδεια έννοια, λαμβάνοντας όμως υπόψη τις δύο προηγούμενες απαιτήσεις
- ως μέτρον γωνίας της Ελ.Γ —//— το μέτρο γωνίας της Ε.Γ

(Σχ. 3)



Αντίθετα, στο μοντέλο της διπλής ελλειπτικής γεωμετρίας παίρνουμε όλα τα σημεία ολόκληρης της επιφάνειας της σφαίρας και όλους τους μέγιστους κύκλους.

(Σχ. 4)



Μέσω των μοντέλων αυτών μπορούμε να διαπιστώσουμε μερικές βασικές ιδιότητες της ελλειπτικής γεωμετρίας.

Απλή ελλειπτική γεωμετρία	Διπλή ελλειπτική γεωμετρία
- μία ευθεία δεν χωρίζει το επίπεδο	- μία ευθεία χωρίζει το επίπεδο
- από 2 σημεία διέρχεται τουλάχιστον μία ευθεία	- από 2 σημεία διέρχεται τουλάχιστον μία ευθεία
- 2 ευθείες τέμνονται ακριβώς σε ένα σημείο	- 2 ευθείες τέμνονται ακριβώς σε δύο σημεία
- όλες οι ευθείες έχουν το ίδιο μήκος	- όλες οι ευθείες έχουν το ίδιο μήκος
- το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι μεγαλύτερο των 180°	- το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι μεγαλύτερο των 180°

Τα προηγούμενα μοντέλα, επειδή ανήκουν στην σφαιρική γεωμετρία, μας κάνουν πολλές φορές να χρησιμοποιούμε και τον τελευταίο όρο για την ελλειπτική γεωμετρία. Αρκετές ιδιότητες των τριγώνων της σφαιρικής γεωμετρίας ήσαν γνωστές και πριν την ανάπτυξη της ελλειπτικής γεωμετρίας, π.χ. στην κατασκευή χαρτών. Αλλά ως μέρος της ελλειπτικής γεωμετρίας η σφαιρική γεωμετρία θεωρήθηκε πολύ αργότερα. Σαν συμπληρωματική αναφορά στην ελλειπτική γεωμετρία μπορούμε να θεωρήσουμε την επί υφηγεσία διάλεξη του G.B.F. Riemann στο Πανεπιστήμιο του Göttingen με τίτλο "Επί των υποθέσεων οι οποίες υπόκεινται στα θεμέλια της γεωμετρίας".

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ 1ου ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

J. N. Cederberg: A Course in Modern Geometries, Springer (UTM), Berlin, New York, 1989

L. Mlodinow: Euclid's window, The story of Geometry from parallel lines to hyperspace, Allen Lane - The Penguin Press, London, 2001.

Ε. Σταμάτη: Ευκλείδου Γεωμετρία, Τόμος 1. Εκδ. Ν. Σάκκουλα, Αθήναι 1952

D. Davis: Η φύση και η δύναμη των Μαθηματικών. Πανεπ. Εκδόσεις Κρήτης, 2001.

Θέματα προς επεξεργασία

Η σχολή των Πυθαγορείων. Γεωμετρία και Αριθμητική.
Η γεωμετρία στην Πλατωνική Ακαδημία.
Οι προ του Ευκλείδη γεωμέτρες και η συμβολή τους.
Η γεωμετρία μετά τον Ευκλείδη μέχρι τον Descartes.
Lobachevsky - Bolyai - Gauss - Riemann.
Το 5ο αξίωμα του Ευκλείδη και οι προσπάθειες απόδειξής του.
Η αξιωματική μέθοδος στα σύγχρονα μαθηματικά. Hilbert
Τα 3 περίφημα άλυτα προβλήματα (με κανόνα και διαβήτη).
Άλλα συστήματα αξιωματικής θεμελίωσης της Ευκλείδειας Γεωμετρίας.