# ΒΑΣΙΚΕΣ ΣΥΝΕΧΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΜΕΣ (ΣΥΝΕΧΕΙΑ)

Χαράλαμπος Α. Χαραλαμπίδης

14 Δεκεμβρίου 2009

**4.2** Έστω ότι ο χρόνος $X$ σε ώρες που απαιτείται για την επισκευή μιας ηλεκτρονικής συσκευής είναι μια συνεχής τυχαία μεταβλητή με ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $[1, 3]$. Να υπολογισθούν
(α) ο μέσος χρόνος επισκευής της συσκευής και
(β) το αναμενόμενο κόστος επισκευής της συσκευής, αν το κόστος επισκευής $Y$ σε ευρώ δίνεται από την $Y = 3X^2 + 5$.

(α) Η συνάρτηση πυκνότητας της τ.μ. $X$ είναι η

$$f(x) = \frac{1}{2}, \quad 1 \leq x \leq 3$$

και έτσι ο μέσος χρόνος επισκευής της συσκευής είναι

$$E(X) = \frac{1}{2}\int_1^3 x dx = \left[\frac{x^2}{4}\right]_1^3 = 2.$$

(β) Επίσης

$$E(X^2) = \frac{1}{2}\int_1^3 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{6}\right]_1^3 = \frac{13}{3}$$

και έτσι το αναμενόμενο κόστος επισκευής της συσκευής είναι

$$E(Y) = E(3X^2 + 5) = 3E(X^2) + 5 = 13 + 5 = 18.$$

**4.5.** Ο χρόνος ζωής $X$ σε ώρες μιας ορισμένης ηλεκτρονικής λυχνίας ακολουθεί την εκθετική κατανομή με μέση τιμή $E(X) = 1000$ ώρες.
Το εργοστάσιο που κατασκευάζει τις λυχνίες δίδει εγγύηση $\alpha$ ωρών στους πελάτες του.
Να υπολογισθεί το $\alpha$ έτσι ώστε με πιθανότητα τουλάχιστο 0,95 οι λυχνίες να επιζούν του χρόνου εγγύησης.

$$P(X > \alpha) \geq 0{,}95,$$

$$F(x) = 1 - e^{-\partial x}, \quad E(X) = \frac{1}{\partial} = 1000$$

$$e^{-\partial \alpha} \geq 0{,}95,$$

$$\alpha \leq -\frac{1}{\partial} \log 0{,}95 = (0,0513)1000 = 51{,}3.$$

**4.6.** Ο χρόνος ζωής $X$ του ιού της γρίπης μέσα στον οργανισμό ενός ατόμου ακολουθεί την εκθετική κατανομή με μέση τιμή 3 μέρες. Να υπολογισθούν οι πιθανότητες των ενδεχομένων

(α) ένα άτομο που προσβλήθηκε από τον ιό να γίνει καλά στο χρονικό διάστημα από 2 μέχρι 4 μέρες,

(β) ένα άτομο που προσβλήθηκε από τον ιό να γίνει καλά σε λιγότερο από 5 συνολικά μέρες δεδομένου ότι έχει 2 μέρες άρρωστος και

(γ) τρία τουλάχιστο από 10 άτομα που προσβλήθηκαν από τον ιό να γίνουν καλά στο χρονικό διάστημα από 2 μέχρι 4 μέρες.

# ΒΑΣΙΚΕΣ ΣΥΝΕΧΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΜΕΣ

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

(α)

$$f(x) = \partial e^{-\partial x}, \;\; x \geq 0, \;\; E(X) = 1/\partial = 3, \;\; \partial = 1/3$$

$$F(x) = 1 - e^{-x/3}, \;\; x \geq 0, \;\; F(x) = 0, \;\; x < 0.$$

$$p = P(2 < X \leq 4) = F_X(4) - F_X(2) = (1 - e^{-4/3}) - (1 - e^{-2/3}) = e^{-2/3} - e^{-4/3}$$

(β) Χρησιμοποιώντας την αμνήμονα ιδιότητα, παίρνουμε

$$P(X < 5 | X > 2) = P(X < 3) = F_X(3) = 1 - e^{-1}.$$

(γ) Ο αριθμός $Y$ των ατόμων που γίνονται καλά στο διάστημα $(2, 4]$ ακολουθεί τη διωνυμική με $\upsilon = 10$ και $p = e^{-2/3}(1 - e^{-2/3})$. Επομένως

$$P(Y \geq 3) = 1 - P(Y \leq 2) = 1 - (1-p)^{10} - 10p(1-p)^9 - 45p^2(1-p)^8.$$

**4.7.** Έστω ότι η τυχαία μεταβλητή $X$ ακολουθεί την εκθετική κατανομή με παράμετρο $\partial$. Να βρεθεί η συνάρτηση πυκνότητας της τυχαίας μεταβλητής $Y = 1 - e^{-\partial X}$.

Η συνάρτηση κατανομής της τ.μ. $Y$ δίνεται από την

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y \leq y) = P(1 - e^{-\partial X} \leq y) = P(e^{-\partial X} \geq 1 - y) \\ &= P(X \leq -(1/\partial)\log(1-y)) = F_X(-(1/\partial)\log(1-y)) \end{aligned}$$

και επειδή

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1 - e^{-\partial x} & x \geq 0, \end{cases}$$

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < 0 \\ y, & 0 \leq y < 1 \\ 1 & y \geq 1. \end{cases}$$

και

$$f_Y(y) = \begin{cases} 1, & 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & y < 0, \text{ ή, } y \geq 1. \end{cases}$$

**4.12.** Το ύψος των ανδρών ενός πληθυσμού ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέσο $\mu = 175$ cm και τυπική απόκλιση $\sigma = 5$ cm. Να υπολογισθούν τα ποσοστά των ανδρών με ύψος
(α) μικρότερο από 175 cm και
(β) μεταξύ 170 cm και 180 cm.
Επίσης, αν 6 άνδρες εκλέγονται τυχαία από τον πληθυσμό αυτό, να υπολογισθούν οι πιθανότητες
(γ) όλοι να έχουν ύψος μεγαλύτερο από 180 cm και
(δ) δύο να είναι υψηλότεροι και τέσσερεις χαμηλότεροι από το μέσο ύψος του πληθυσμού.

(α) Έστω $X$ το ύψος οποιουδήποτε άνδρα του πληθυσμού. Τότε

$$P(X < 175) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{175-175}{5}\right) = P(Z < 0) = \Phi(0) = \frac{1}{2}$$

(β)

$$P(170 < X < 180) = P\left(\frac{170-175}{5} < \frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{180-175}{5}\right) = P(-1 < Z < 1)$$
$$= \Phi(1) - \Phi(-1) = 2\Phi(1) - 1 = 2(0{,}8413) - 1 = 0{,}6826.$$

(γ)

$$P(X > 180) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} > \frac{180-175}{5}\right)$$
$$= P(Z > 1) = 1 - \Phi(1) = 1 - 0{,}8413 = 0{,}1587.$$

$$[P(X > 180)]^6 = (0{,}1587)^6.$$

(δ) Έστω $Y$ ο αριθμός εκλεγομένων των ανδρών με ύψος μεγαλύτερο του μέσου. Τότε

$$P(Y = y) = \binom{6}{y}(1/2)^6, \quad P(Y = 2) = \binom{6}{2}(1/2)^6 = 15/64.$$

**4.17.** (α) Έστω $X$ μια συνεχής τυχαία μεταβλητή η οποία ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέση τιμή $\mu$ και διασπορά $\sigma^2$. Αν $c$ είναι ένας πραγματικός αριθμός τέτοιος ώστε

$$P(X > c) = 2P(X \leq c),$$

δείξτε ότι

$$c = \mu - (0{,}43)\sigma.$$

(β) Αν η τιμή $X$ του σιδήρου στο αίμα των ανδρών ενός πληθυσμού ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέση τιμή 110 mg/dl και τυπική απόκλιση 5 mg/dl, να βρεθεί η τιμή $c$ του σιδήρου για την οποία το ποσοστό ανδρών που την υπερβαίνει είναι διπλάσιο του ποσοστού που δεν την υπερβαίνει.

(α)

$$P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} > \frac{c-\mu}{\sigma}\right) = 2P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{c-\mu}{\sigma}\right),$$

$$1-\Phi\left(\frac{c-\mu}{\sigma}\right) = 2\Phi\left(\frac{c-\mu}{\sigma}\right), \quad \Phi\left(\frac{c-\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{3} = 0{,}3333,$$

$$\Phi\left(-\frac{c-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}6667 = \Phi(0{,}43),$$

$$\frac{\mu-c}{\sigma} = 0{,}43, \quad c = \mu - (0{,}43)\sigma.$$

(β)

$$c = \mu - (0{,}43)\sigma = 110 - (0{,}43)5 = 110 - 2{,}15 = 107{,}85.$$