ΚΑΤΑΝΟΜΕΣ ΔΙΔΙΑΣΤΑΤΩΝ ΤΥΧΑΙΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

Χαράλαμπος Α. Χαραλαμπίδης

16 Δεκεμβρίου 2009

ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ

Ενδιαφέρον τόσο από θεωρητική άποψη, όσο και από άποψη εφαρμογών, παρουσιάζει και η από κοινού μελέτη δύο χαρακτηριστικών των δειγματικών σημείων.

Στην περίπτωση αυτή μπορούμε να αντιστοιχήσουμε σε κάθε δειγματικό σημείο ένα ζεύγος πραγματικών αριθμών.

Η αντιστοίχηση αυτή γίνεται από ένα ζεύγος πραγματικών συναρτήσεων με (κοινό) πεδίο ορισμού τον δειγματικό χώρο.

Σχετικά θέτουμε τον ακόλουθο ορισμό.

ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ

Ορισμός

Έστω Ω ο δειγματικός χώρος ενός στοχαστικού (τυχαίου) πειράματος. Ένα ζεύγος πραγματικών συναρτήσεων (X, Y) που ορίζεται στο δειγματικό χώρο Ω καλείται διδιάστατη τυχαία μεταβλητή.
Το ζεύγος των συναρτήσεων αυτών αντιστοιχεί σε κάθε δειγματικό σημείο $\omega \in \Omega$ ένα ζεύγος πραγματικών αριθμών (x, y) με $x = X(\omega)$ και $y = Y(\omega)$.

Σημειώνουμε ότι αν (X, Y) είναι μία διδιάστατη τυχαία μεταβλητή, τότε τόσο η X όσο και η Y είναι (μονοδιάστατες) τυχαίες μεταβλητές και αντίστροφα.
Η συνάρτηση κατανομής μίας διδιάστατης τυχαίας μεταβλητής ορίζεται, κατ' αναλογία με τη μονοδιάστατη περίπτωση, ως εξής:

ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ

Ορισμός

Η συνάρτηση

$$F(x,y) = P(X \leq x, Y \leq y) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x, Y(\omega) \leq y),\ \ x, y \in R, \tag{1}$$

καλείται συνάρτηση κατανομής της διδιάστατης τυχαίας μεταβλητής (X, Y) ή από κοινού συνάρτηση κατανομής των τυχαίων μεταβλητών X και Y.

Σημειώνεται ότι, για συγκεκριμένους πραγματικούς αριθμούς x και y, η $F(x,y) = P(X \leq x, Y \leq y)$ παριστάνει την πιθανότητα του ενδεχομένου

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\} \cap \{\omega \in \Omega : Y(\omega) \leq y\} = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x \text{ και } Y(\omega) \leq y\},$$

το οποίο συμβολίζεται και ως

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x, Y(\omega) \leq y\} \text{ ή } \{X \leq x, Y \leq y\}.$$

ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ

Η συνάρτηση κατανομής, ως πιθανότητα, λαμβάνει τιμές στο διάστημα $[0, 1]$, δηλαδή

$$0 \leq F(x, y) \leq 1, \quad -\infty < x < \infty, \quad -\infty < y < \infty. \tag{2}$$

Επίσης ικανοποιεί τις οριακές σχέσεις

$$\begin{aligned} F(-\infty, y) &= \lim_{x \to -\infty} F(x, y) = P(\emptyset) = 0, \quad -\infty < y < \infty, \\ F(x, -\infty) &= \lim_{y \to -\infty} F(x, y) = P(\emptyset) = 0, \quad -\infty < x < \infty, \\ F(+\infty, +\infty) &= \lim_{\substack{x \to +\infty \\ y \to +\infty}} F(x, y) = P(\Omega) = 1 \end{aligned}$$

ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ

και

$$F(x,+\infty) = \lim_{y\to+\infty} F(x,y) = P(X \le x) = F_X(x), \quad -\infty < x < \infty, \quad (3)$$

$$F(+\infty,y) = \lim_{x\to+\infty} F(x,y) = P(Y \le y) = F_Y(y), \quad -\infty < y < \infty. \quad (4)$$

Η συνάρτηση κατανομής $F_X(x) = P(X \le x), -\infty < x < \infty$, της τυχαίας μεταβλητής X, θεωρούμενη στο πλαίσιο της διδιάστατης τυχαίας μεταβλητής (X, Y) καλείται, ιδιαιτέρως, *περιθώρια συνάρτηση κατανομής* της X.
Ομοίως η συνάρτηση κατανομής $F_Y(y) = P(Y \le y), -\infty < y < \infty$ της τυχαίας μεταβλητής Y καλείται *περιθώρια συνάρτηση κατανομής* της Y.

ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ

Παράδειγμα

Ας θεωρήσουμε το στοχαστικό πείραμα της εξαγωγής ενός σφαιριδίου από μια κληρωτίδα που περιέχει 10 σφαιρίδια φέροντα τους αριθμούς $\Omega = \{1, 2, \ldots, 10\}$ *και τα ενδεχόμενα* $A = \{1, 2\}$ *και* $B = \{3, 4, 5, 6\}$.
Έστω

$$X = \begin{cases} 1, & \text{αν ο εξαγόμενος αριθμός ανήκει στο } A, \\ 0, & \text{αν ο εξαγόμενος αριθμός δεν ανήκει στο } A, \end{cases}$$

και

$$Y = \begin{cases} 1, & \text{αν ο εξαγόμενος αριθμός ανήκει στο } B, \\ 0, & \text{αν ο εξαγόμενος αριθμός δεν ανήκει στο } B, \end{cases}$$

Να υπολογισθούν η από κοινού συνάρτηση κατανομής $F(x, y)$, $x, y \in R$, *και οι περιθώριες συναρτήσεις κατανομής* $F_X(x)$, $x \in R$, *και* $F_Y(y)$, $y \in R$, *των τυχαίων μεταβλητών* X *και* Y.

ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ

Παρατηρούμε ότι το ενδεχόμενο $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x, Y(\omega) \leq y\}$, για τις διάφορες τιμές των x και y, ισούται με:

(α) $\emptyset$, αν $x < 0$, ή $y < 0$,

(β) $\{7, 8, 9, 10\}$, αν $0 \leq x < 1$ και $0 \leq y < 1$,

(γ) $\{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, αν $0 \leq x < 1$ και $y \geq 1$,

(δ) $\{1, 2, 7, 8, 9, 10\}$, αν $x \geq 1$ και $0 \leq y < 1$,

(ε) Ω, αν $x \geq 1$ και $y \geq 1$,

Έτσι, η από κοινού συνάρτηση κατανομής των τυχαίων μεταβλητών X και Y, σύμφωνα με την (1), δίνεται από την

$$F(x, y) = \begin{cases} 0, & x < 0, \text{ ή } \; y < 0, \\ 2/5, & 0 \leq x < 1, \;\; 0 \leq y < 1, \\ 4/5, & 0 \leq x < 1, \;\; y \geq 1, \\ 3/5, & x \geq 1, \;\; 0 \leq y < 1, \\ 1, & x \geq 1, \;\; y \geq 1. \end{cases}$$

ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ

Οι περιθώριες συναρτήσεις κατανομής των X και Y, σύμφωνα με τις (3) και (4), δίνονται από τις

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 4/5, & 0 \leq x < 1, \\ 1, & x \geq 1, \end{cases} \qquad F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < 0, \\ 3/5, & 0 \leq y < 1, \\ 1, & y \geq 1. \end{cases}$$

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΠΥΚΝΟΤΗΤΑΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ

Ορισμός

Μία διδιάστατη τυχαία μεταβλητή (X, Y) *καλείται διακριτή ή απαριθμητή αν παίρνει, με πιθανότητα* 1, *τιμές σ΄ ένα πεπερασμένο ή αριθμησίμως άπειρο σύνολο* $R_{X,Y} = \{(x_0, y_0), (x_0, y_1), (x_1, y_0), \ldots, (x_i, y_j), \ldots\}$.
Η συνάρτηση f, *η οποία σε κάθε σημείο* (x_i, y_j) *εκχωρεί την πιθανότητά του,*

$$f(x_i, y_j) = P(X = x_i, Y = y_j) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) = x_i, Y(\omega) = y_j), \tag{5}$$

για $i = 0, 1, \ldots, j = 0, 1, \ldots$, *καλείται συνάρτηση (πυκνότητας) πιθανότητας της διδιάστατης τυχαίας μεταβλητής* (X, Y) *ή από κοινού συνάρτηση (πυκνότητας) πιθανότητας των τυχαίων μεταβλητών* X *και* Y.

Στις περιπτώσεις που υπάρχει κίνδυνος σύγχυσης η συνάρτηση πιθανότητας της διδιάστατης τυχαίας μεταβλητής (X, Y) συμβολίζεται με $f_{X,Y}$ και η τιμή της στο (x_i, y_j) με $f_{X,Y}(x_i, y_j)$.

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΠΥΚΝΟΤΗΤΑΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ

Η συνθήκη ότι η (X, Y) παίρνει, με πιθανότητα 1, τιμές στο σύνολο $R_{X,Y}$, χρησιμοποιώντας την παράσταση

$$R_{X,Y} = \{(x_0, y_0)\} \cup \{(x_0, y_1)\} \cup \{(x_1, y_0)\} \cup \cdots \cup \{(x_i, y_j)\} \cup \cdots ,$$

μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} P(X = x_i, Y = y_j) = 1.$$

Σημειώνουμε οτι η συνάρτηση πιθανότητας (5), όπως προκύπτει άμεσα από τον ορισμό της, είναι μη αρνητική:

$$f(x_i, y_j) \geq 0, \quad i = 0, 1, \ldots, \quad j = 0, 1, \ldots, \qquad f(x, y) = 0, \quad (x, y) \notin R_{X,Y}. \tag{6}$$

και

$$\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} f(x_i, y_j) = 1. \tag{7}$$

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΠΥΚΝΟΤΗΤΑΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ

Η συνάρτηση πιθανότητας $f(x_i, y_j)$ μιας διακριτής διδιάστατης τυχαίας μεταβλητής (X, Y) συνδέεται με τη συνάρτηση κατανομής αυτής $F(x, y)$. Συγκεκριμένα

$$F(x, y) = \sum_{y_j \leq y} \sum_{x_i \leq x} f(x_i, y_j), \quad x, y \in R, \tag{8}$$

και

$$f(x_i, y_j) = F(x_i, y_j) - F(x_i, y_{j-1}) - F(x_{i-1}, y_j) + F(x_{i-1}, y_{j-1}), \tag{9}$$

για $i = 0, 1, \ldots, j = 0, 1, \ldots,$ όπου $x_{-1} = -\infty$, $y_{-1} = -\infty$.

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΠΥΚΝΟΤΗΤΑΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ

Ορισμός

Μία διδιάστατη τυχαία μεταβλητή (X, Y) καλείται συνεχής αν υπάρχει μη αρνητική συνάρτηση

$$f(x, y) \geq 0, \quad x, y \in R, \tag{10}$$

με

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy = 1, \tag{11}$$

τέτοια ώστε για κάθε πραγματικούς αριθμούς α, β, γ και δ με $\alpha < \beta$ και $\gamma < \delta$,

$$P(\alpha < X \leq \beta\ ,\ \gamma < Y \leq \delta) = \int_{\gamma}^{\delta} \int_{\alpha}^{\beta} f(x, y) dx dy. \tag{12}$$

Η συνάρτηση $f(x, y)$, $x, y \in R$, καλείται συνάρτηση πυκνότητας (πιθανότητας) της διδιάστατης τυχαίας μεταβλητής (X, Y) ή από κοινού συνάρτηση πυκνότητας (πιθανότητας) των τυχαίων μεταβλητών X και Y.

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΠΥΚΝΟΤΗΤΑΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ

Σημειώνουμε ότι η (12) είναι ισοδύναμη με την

$$F(x,y) = \int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f(t,u)\,dt\,du, \quad x,y \in R. \tag{13}$$

Αν η συνάρτηση $f(x,y)$ είναι συνεχής στο σημείο (x,y), τότε παραγωγίζοντας τη σχέση αυτή παίρνουμε

$$f(x,y) = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial y \partial x}. \tag{14}$$

Οι σχέσεις (13) και (14) είναι οι αντίστοιχες των (8) και (9) για συνεχείς τυχαίες μεταβλητές.
Σύμφωνα με τον ορισμό της μερικής παραγώγου και χρησιμοποιώντας την (14) συνάγουμε, για μικρά $h_1 > 0$, $h_2 > 0$, την προσεγγιστική σχέση

$$P(x < X \leq x + h_1\ , y < Y \leq y + h_2) \cong f(x,y)h_1 h_2.$$

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΠΥΚΝΟΤΗΤΑΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ

Ας επανέλθουμε στην περίπτωση μιας διακριτής διδιάστατης τυχαίας μεταβλητής (X, Y) με συνάρτηση πιθανότητας

$$f(x_i, y_j) = P(X = x_i, Y = y_j), \quad i, j = 0, 1, \ldots \ .$$

και ας θεωρήσουμε τη συνάρτηση

$$f_X(x_i) = \sum_{j=0}^{\infty} f(x_i, y_j), \quad i = 0, 1, \ldots \ . \tag{15}$$

Χρησιμοποιώντας τη σχέση

$$\sum_{j=0}^{\infty} P(X = x_i, Y = y_j) = P(X = x_i), \quad i = 0, 1, \ldots,$$

συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση αυτή είναι η συνάρτηση πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής X,

$$f_X(x_i) = P(X = x_i), \quad i = 0, 1, \ldots,$$

η οποία θεωρούμενη στο πλαίσιο της διδιάστατης τυχαίας μεταβλητής (X, Y), καλείται *περιθώρια συνάρτηση πιθανότητας* της X.

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΠΥΚΝΟΤΗΤΑΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ

Ανάλογα προκύπτει και η περιθώρια συνάρτηση πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής Y:

$$f_Y(y_j) = \sum_{i=0}^{\infty} f(x_i, y_j), \quad j = 0, 1, \ldots . \tag{16}$$

Ο χαρακτηρισμός των συναρτήσεων πιθανότητας $f_X(x_i)$ και $f_Y(y_j)$ ως περιθωρίων, θεωρουμένων στο πλαίσιο της συνάρτησης πιθανότητας $f(x_i, y_j)$ της διδιάστατης τυχαίας μεταβλητής (X, Y), δικαιολογείται από τη σχηματική παρουσία τους στον Πίνακα 5.1.

Σημειώνουμε ότι στον πίνακα αυτόν τα στοιχεία της τελευταίας στήλης και τα στοιχεία της τελευταίας γραμμής προκύπτουν, σύμφωνα με τις (15) και (16), με άθροιση των στοιχείων των αντιστοίχων γραμμών ή στηλών.

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΠΥΚΝΟΤΗΤΑΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ

$f_{X,Y}(x,y)$						
$x \backslash y$	y_0	y_1	$\cdots$	y_j	$\cdots$	$f_X(x)$
x_0	$f(x_0, y_0)$	$f(x_0, y_1)$	$\cdots$	$f(x_0, y_j)$	$\cdots$	$f_X(x_0)$
x_1	$f(x_1, y_0)$	$f(x_1, y_1)$	$\cdots$	$f(x_1, y_j)$	$\cdots$	$f_X(x_1)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$
x_i	$f(x_i, y_0)$	$f(x_i, y_1)$	$\cdots$	$f(x_i, y_j)$	$\cdots$	$f_X(x_i)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$
$f_Y(y)$	$f_Y(y_0)$	$f_Y(y_1)$	$\cdots$	$f_Y(y_j)$	$\cdots$	1

Πίνακας 5.1. Η από κοινού και οι περιθώριες συναρτήσεις πιθανότητας

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΠΥΚΝΟΤΗΤΑΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ

Στην περίπτωση μιας συνεχούς διδιάστατης τυχαίας μεταβλητής (X, Y) με συνάρτηση πυκνότητας $f(x, y)$, $x, y \in R$, οι περιθώριες συναρτήσεις πυκνότητας των τυχαίων μεταβλητών X και Y δίνονται από τις σχέσεις

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dy, \ x \in R, \quad f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dx, \ y \in R. \quad (17)$$

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΠΥΚΝΟΤΗΤΑΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ

Παράδειγμα

Ας θεωρήσουμε τις τυχαίες μεταβλητές X και Y του Παραδείγματος 1. Η από κοινού και οι περιθώριες συναρτήσεις πιθανότητας των X, Y, οι οποίες υπολογίζονται σύμφωνα με τον Ορισμό 4 και τις σχέσεις (15) και (16), δίνονται στον Πίνακα 5.2.

$f_{X,Y}(x,y)$			
$x \backslash y$	0	1	$f_X(x)$
0	2/5	2/5	4/5
1	1/5	0	1/5
$f_Y(y)$	3/5	2/5	1

Πίνακας 5.2. *Από κοινού και περιθώριες συναρτήσεις πιθανότητας*

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΠΥΚΝΟΤΗΤΑΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ

Παράδειγμα

Ας θεωρήσουμε μία διδιάστατη τυχαία μεταβλητή (X, Y) *η οποία κατανέμεται ομοιόμορφα στο τετράγωνο* $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$.
Να προσδιορισθούν οι από κοινού συναρτήσεις κατανομής και πυκνότητας και οι περιθώριες συναρτήσεις πυκνότητας των τυχαίων μεταβλητών X *και* Y.

Η υπόθεση της ομοιόμορφης κατανομής της πιθανότητας συνεπάγεται ότι, για κάθε x_1, x_2 *και* y_1, y_2, *με* $0 \leq x_1 < x_2 \leq 1$, *και* $0 \leq y_1 < y_2 \leq 1$,

$$P(x_1 \leq X \leq x_2 \ , \ y_1 \leq Y \leq y_2) = c \cdot (x_2 - x_1)(y_2 - y_1),$$

όπου c *η σταθερά αναλογίας. Θέτοντας στη σχέση αυτή* $x_1 = y_1 = 0$, $x_2 = y_2 = 1$ *και επειδή*

$$P(0 \leq X \leq 1 \ , \ 0 \leq Y \leq 1) = 1,$$

συμπεραίνουμε ότι $c = 1$.

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΠΥΚΝΟΤΗΤΑΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ

Επομένως η συνάρτηση κατανομής $F(x,y) = P(X \leq x, Y \leq y)$ της διδιάστατης τυχαίας μεταβλητής (X,Y) δίνεται από την

$$F(x,y) = \begin{cases} 0, & x < 0 \text{ ή } y < 0, \\ xy, & 0 \leq x < 1, \quad 0 \leq y < 1, \\ x, & 0 \leq x < 1, \quad y \geq 1, \\ y, & x \geq 1, \quad 0 \leq y < 1, \\ 1, & x \geq 1, \quad y \geq 1. \end{cases}$$

Παραγωγίζοντας αυτή συνάγουμε, σύμφωνα με την (14), τη συνάρτηση πυκνότητας της (X,Y):

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1, \\ 0, & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΠΥΚΝΟΤΗΤΑΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ

Οι περιθώριες συναρτήσεις πυκνότητας των X και Y, σύμφωνα με την (17), δίνονται από τις

$$f_X(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{διαφορετικά}, \end{cases} \quad \text{και} \quad f_Y(y) = \begin{cases} 1, & 0 \leq y \leq 1, \\ 0, & \text{διαφορετικά}, \end{cases}$$

που σημαίνει ότι τόσο η X όσο και η Y ακολουθούν ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $[0, 1]$.

ΔΕΣΜΕΥΜΕΝΕΣ ΚΑΤΑΝΟΜΕΣ

Ας θεωρήσουμε μία διακριτή διδιάστατη τυχαία μεταβλητή (X, Y) με συνάρτηση πιθανότητας

$$f_{X,Y}(x_i, y_j) = P(X = x_i, Y = y_j), \quad i, j = 0, 1, \ldots,$$

και έστω

$$f_Y(y_j) = P(Y = y_j), \quad j = 0, 1, \ldots$$

η περιθώρια συνάρτηση πιθανότητας της Y. Η συνάρτηση

$$f_{X|Y}(x_i|y_j) = \frac{f_{X,Y}(x_i, y_j)}{f_Y(y_j)}, \quad i = 0, 1, \ldots, \tag{18}$$

θεωρούμενη ως συνάρτηση του x_i, με y_j δεδομένη τιμή της τυχαίας μεταβλητής Y για την οποία $f_Y(y_j) > 0$, είναι μία συνάρτηση πιθανότητας. Συγκεκριμένα, σύμφωνα με τον ορισμό της δεσμευμένης πιθανότητας,

$$P(X = x_i|Y = y_j) = \frac{P(X = x_i, Y = y_j)}{P(Y = y_j)}, \quad i = 0, 1, \ldots,$$

και έτσι

$$f_{X|Y}(x_i|y_j) = P(X = x_i|Y = y_j), \quad i = 0, 1, \ldots .$$

ΔΕΣΜΕΥΜΕΝΕΣ ΚΑΤΑΝΟΜΕΣ

Ορισμός

Έστω (X, Y) μία διακριτή διδιάστατη τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πιθανότητας $f_{X,Y}(x_i, y_j)$, $i, j = 0, 1, \ldots,$ και $f_Y(y_j)$, $j = 0, 1, \ldots,$ η περιθώρια συνάρτηση πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής Y.
Η συνάρτηση πιθανότητας (18) καλείται δεσμευμένη συνάρτηση πιθανότητας της X δεδομένης της $Y = y_j$, και ορίζεται μόνο για εκείνα τα y_j για τα οποία $f_Y(y_j) > 0$.

Ανάλογα ορίζεται και η δεσμευμένη συνάρτηση πιθανότητας της Y, για δεδομένη τιμή x_i της τυχαίας μεταβλητής X με $f_X(x_i) > 0$,

$$f_{Y|X}(y_j|x_i) = \frac{f_{X,Y}(x_i, y_j)}{f_X(x_i)}, \quad j = 0, 1, \ldots . \qquad (19)$$

ΔΕΣΜΕΥΜΕΝΕΣ ΚΑΤΑΝΟΜΕΣ

Στην περίπτωση συνεχών τυχαίων μεταβλητών, οι δεσμευμένες συναρτήσεις πυκνότητας ορίζονται ανάλογα.

Ορισμός

Έστω (X, Y) μία συνεχής διδιάστατη τυχαία μεταβλητή με $f_{X,Y}(x, y)$, $x, y \in R$, συνάρτηση πυκνότητας και $f_Y(y)$, $y \in R$, περιθώρια συνάρτηση πυκνότητας της Y. Η συνάρτηση

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_Y(y)}, \quad x \in R, \tag{20}$$

θεωρούμενη ως συνάρτηση του x, με δεδομένο y τέτοιο ώστε $f_Y(y) > 0$, καλείται δεσμευμένη συνάρτηση πυκνότητας της X δεδομένης της $Y = y$.

Ανάλογα, ορίζεται και η δεσμευμένη συνάρτηση πυκνότητας της Y, για δεδομένη τιμή x της τυχαίας μεταβλητής X με $f_X(x) > 0$,

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_X(x)}, \quad y \in R. \tag{21}$$

Παρατήρηση

(α) Σημειώνουμε ότι η συνάρτηση $f_{X|Y}(x|y)$*, η οποία ορίζεται από την (20), είναι μία γνήσια συνάρτηση πυκνότητας. Πράγματι* $f_{X|Y}(x|y) \geq 0$ *και, λόγω της (17),*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_{X|Y}(x|y)dx = \frac{1}{f_Y(y)} \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dx = \frac{f_Y(y)}{f_Y(y)} = 1.$$

(β) Σε αντίθεση με τη διακριτή περίπτωση, η συνάρτηση $f_{X|Y}(x|y)$ *δεν εκφράζει την πιθανότητα* $P(X = x|Y = y)$ *και γενικά δεν εκφράζει κάποια δεσμευμένη πιθανότητα.*
Η φυσική της σημασία είναι ότι για μικρά $h_1 > 0$ *και* $h_2 > 0$ *ισχύει κατά προσέγγιση*

$$P(x \leq X \leq x + h_1 | y \leq Y \leq y + h_2) \cong f_{X|Y}(x|y)h_1.$$

Παράδειγμα

Έστω (X, Y) *μία διακριτή διδιάστατη τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πιθανότητας*

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{x + y}{21}, \quad x = 1, 2, \quad y = 1, 2, 3.$$

Να υπολογισθούν οι δεσμευμένες συναρτήσεις πιθανότητας της X *δεδομένης της* $Y = y$ *και της* Y *δεδομένης της* $X = x$.

Οι περιθώριες συναρτήσεις πιθανότητας των X *και* Y *είναι*

$$f_X(x) = \sum_{y=1}^{3} \frac{x + y}{21} = \frac{3x + 6}{21}, \quad x = 1, 2,$$

και

$$f_Y(y) = \sum_{x=1}^{2} \frac{x + y}{21} = \frac{2y + 3}{21}, \quad y = 1, 2, 3.$$

Επομένως, σύμφωνα με τον ορισμό, οι ζητούμενες δεσμευμένες συναρτήσεις πιθανότητας δίνονται από τις

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{x+y}{2y+3}, \quad x = 1, 2, \quad (y = 1, 2, 3),$$

και

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{x+y}{3x+6}, \quad y = 1, 2, 3, \quad (x = 1, 2).$$

Σημειώνουμε ότι οι δεσμευμένες αυτές συναρτήσεις πιθανότητας δύνανται να δοθούν και στη μορφή πινάκων ως εξής:

$f_{X\|Y}(x\|y)$			
$x \backslash y$	1	2	3
1	2/5	3/7	4/9
2	3/5	4/7	5/9

$f_{Y\|X}(y\|x)$			
$x \backslash y$	1	2	3
1	2/9	3/9	4/9
2	3/12	4/12	5/12

Πίνακας 5.3. Δεσμευμένες συναρτήσεις πιθανότητας

Παράδειγμα

Έστω (X, Y) *μια συνεχής διδιάστατη τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πυκνότητας*

$$f_{X,Y}(x, y) = 2, \ \ 0 \leq x \leq y \leq 1.$$

Να υπολογισθούν οι δεσμευμένες συναρτήσεις πυκνότητας της X *δεδομένης της* $Y = y$ *και της* Y *δεδομένης της* $X = x$.

Οι περιθώριες συναρτήσεις πυκνότητας των X *και* Y *είναι*

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dy = 2\int_x^1 dy = 2(1 - x), \ \ 0 \leq x \leq 1,$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dx = 2\int_0^y dx = 2y, \ \ 0 \leq y \leq 1.$$

Επομένως, σύμφωνα με την (20), η δεσμευμένη συνάρτηση πυκνότητας της X δεδομένης της $Y = y$ δίνεται από την

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{1}{y}, \ \ 0 \leq x \leq y, \ \ (0 < y \leq 1).$$

Κατά τον ίδιο τρόπο,

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{1}{1-x}, \ \ x \leq y \leq 1, \ \ (0 \leq x < 1).$$