ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ ΚΑΙ ΒΑΣΙΚΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΗΣ (Συνέχεια)

Χαράλαμπος Α. Χαραλαμπίδης

2 Νοεμβρίου 2009

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.3. Ας θεωρήσουμε ένα σύνολο 11 ατόμων $\{a_0, a_1, \dots, a_{10}\}$ των οποίων καταγράφουμε τα γενέθλια. Να υπολογισθεί η πιθανότητα όπως το άτομο a_0 έχει γενέθλια την ίδια μέρα με (α) τουλάχιστο ένα, (β) τουλάχιστο δύο και (γ) ακριβώς τρία από τα υπόλοιπα 10 άτομα $\{a_1, a_2, \dots, a_{10}\}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

(α)

$$P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{N(A')}{N} = 1 - \frac{365 \cdot 364^{10}}{365^{11}} = 1 - \frac{364^{10}}{365^{10}}$$

(β)

$$P(B_2) = 1 - P(A_0) - P(A_1) = 1 - \frac{364^{10}}{365^{10}} - \frac{10 \cdot 364^{9}}{365^{10}}$$

(γ)

$$P(A_3) = \frac{N(A_3)}{N} = \frac{\binom{10}{3} \cdot 364^{7}}{365^{10}}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.4. Από τα πέντε κλειδιά που έχει κάποιος μόνο ένα ταιριάζει στην πόρτα του σπιτιού του. Δοκιμάζει αυτά διαδοχικά μέχρι να ανοίξει την πόρτα. Να υπολογισθεί η πιθανότητα να απαιτηθούν τρεις δοκιμές.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

$$P(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{(4)_2}{(5)_3} = \frac{(4)_2}{5(4)_2} = \frac{1}{5}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.5. Έστω ότι ένας αριθμός τηλεφώνου εκλέγεται τυχαία από τον τηλεφωνικό κατάλογο. Να υπολογισθεί η πιθανότητα $P(A)$ του ενδεχομένου A όπως και τα τέσσερα τελευταία ψηφία του είναι διαφορετικά.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

$$P(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{(10)_4}{10^4} = \frac{504}{1000}$$

1.6. *Αποβιβάσεις ανελκυστήρα.* Έστω ότι ανελκυστήρας πενταόροφου συγκροτήματος γραφείων ξεκινά από το ισόγειο με τέσσερα άτομα. Να υπολογισθούν οι πιθανότητες αποβίβασης (α) και των τεσσάρων ατόμων σε διαφορετικούς ορόφους, (β) δύο ατόμων στον τρίτο όροφο, ενός ατόμου στον τέταρτο όροφο και ενός ατόμου στον πέμπτο όροφο και (γ) δύο ατόμων στον τρίτο όροφο.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

(α)

$$P(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{(5)_4}{5^4} = \frac{24}{125}$$

(β)

$$P(B) = \frac{N(B)}{N} = \frac{\binom{4}{2} \cdot 2 \cdot 1}{5^4} = \frac{12}{725}$$

(γ)

$$P(\Gamma) = \frac{N(\Gamma)}{N} = \frac{\binom{4}{2} \cdot 4^2}{5^4}$$

1.8. Έστω $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\nu\}$ ο δειγματικός χώρος ενός στοχαστικού πειράματος. Αν $P(\{\omega_i\}) = 2P(\{\omega_{i+1}\})$, $i = 1, 2, \ldots, \nu - 1$, να υπολογισθούν οι πιθανότητες των δειγματικών σημείων $P(\{\omega_i\})$, $i = 1, 2, \ldots, \nu$. Επίσης, να υπολογισθεί η πιθανότητα του ενδεχομένου $A = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\kappa\}$, $\kappa \leq \nu$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

$$P(\{\omega_j\}) = \left(\frac{1}{2}\right) P(\{\omega_{j-1}\}) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 P(\{\omega_{j-2}\}) = \cdots = \left(\frac{1}{2}\right)^{j-1} P(\{\omega_1\}),$$

$$\sum_{j=1}^{\nu} P(\{\omega_j\}) = P(\{\omega_1\}) \sum_{j=1}^{\nu} \left(\frac{1}{2}\right)^{j-1} = P(\{\omega_1\}) \frac{1-(1/2)^{\nu}}{1-(1/2)} = 1$$

$$P(\{\omega_1\}) = \frac{1/2}{1-(1/2)^{\nu}},$$

$$P(\{\omega_j\}) = \frac{(1/2)^j}{1-(1/2)^{\nu}}, \quad j = 1, 2, \ldots, \nu.$$

$$P(A) = \sum_{j=1}^{\kappa} P(\{\omega_j\}) = \frac{1/2}{1-(1/2)^{\nu}} \sum_{j=1}^{\kappa} \left(\frac{1}{2}\right)^{j-1} = \frac{1-(1/2)^{\kappa}}{1-(1/2)^{\nu}}, \quad \kappa \leq \nu.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.10. Έστω Ω ο δειγματικός χώρος στοχαστικού πειράματος και A, B ενδεχόμενα ως προς αυτόν. Αν $P(A) = 3/4$, $P(B) = 2/3$ και $P(AB) = 3/5$, να υπολογισθούν οι πιθανότητες $P(A - B)$, $P(A \cup B)$ και $P(A'B')$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

$$P(A - B) = P(A) - P(AB) = \frac{3}{4} - \frac{3}{5} = \frac{3}{20},$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = \frac{3}{4} + \frac{2}{3} - \frac{3}{5} = \frac{49}{60},$$

$$P(A'B') = 1 - P(A) - P(B) + P(AB) = 1 - \frac{3}{4} - \frac{2}{3} + \frac{3}{5} = \frac{11}{60}.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.11. (Συνέχεια). Αν

$$P(A-B) = 1/4, \;\; 2P(A) = 3P(B) = 4P(AB),$$

να υπολογισθούν οι πιθανότητες $P(A)$, $P(B)$, $P(AB)$ και ακολούθως οι πιθανότητες $P(A \cup B)$, $P(A \cup B')$, $P(AB' \cup A'B)$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

$$P(A-B) = P(A) - P(AB) = P(A) - \frac{2}{4}P(A) = \frac{1}{2}P(A) = \frac{1}{4},$$

$$P(A) = \frac{1}{2}, \quad P(B) = \frac{2}{3}P(A) = \frac{1}{3}, \quad P(AB) = \frac{2}{4}P(A) = \frac{1}{4}.$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{7}{12},$$

$$P(A \cup B') = P(A) + P(B') - P(AB') = \frac{1}{2} + \left(1 - \frac{1}{3}\right) - \frac{1}{4} = \frac{11}{12},$$

$$P(AB' \cup A'B) = P(AB') + P(A'B) = P(A) + P(B) - 2P(AB) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{2}{4} = \frac{1}{3}.$$

1.13. Ας θεωρήσουμε το στοχαστικό πείραμα 5 διαδοχικών ρίψεων δύο διακεκριμένων κύβων. Να υπολογισθεί η πιθανότητα εμφάνισης των ζευγών $(5, 6)$, $(6, 5)$ και $(6, 6)$ τουλάχιστο μία φορά το καθένα.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

A_1: ενδεχ. να μην εμφανισθεί το ζεύγος $(5,6)$,
A_2: ενδεχ. να μην εμφανισθεί το ζεύγος $(6,5)$,
A_3: ενδεχ. να μην εμφανισθεί το ζεύγος $(6,6)$

$$
\begin{aligned}
P(A_1'A_2'A_3') =& 1 - \{P(A_1) + P(A_2) + P(A_3)\} \\
& + \{P(A_1A_2)P(A_1A_3)P(A_2A_3)\} - P(A_1A_2A_3) \\
=& 1 - 3\left(\frac{35}{36}\right)^5 + 3\left(\frac{34}{36}\right)^5 - \left(\frac{33}{36}\right)^5
\end{aligned}
$$

1.14. Από μία κάλπη που περιέχει 5 άσπρα και 5 μαύρα σφαιρίδια εξάγονται διαδοχικά και χωρίς επανάθεση δύο σφαιρίδια κάθε φορά μέχρι να εξαχθούν και τα 10 σφαιρίδια. Να υπολογισθεί η πιθανότητα όπως και τα 5 ζευγάρια αποτελούνται από ένα άσπρο και ένα μαύρο σφαιρίδιο.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

A_i: ενδεχ. το i-οστό ζεύγος αποτελείται ένα άσπρο και ένα μαύρο σφαιρίδιο, $i = 1, 2, 3, 4, 5$.

$$
\begin{aligned}
P(A_1A_2A_3A_4A_5) &= P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)P(A_4|A_1A_2A_3)P(A_5|A_1A_2A_3A_4) \\
&= \frac{\binom{5}{1}\binom{5}{1}}{\binom{10}{9}} \cdot \frac{\binom{4}{1}\binom{4}{1}}{\binom{8}{2}} \cdot \frac{\binom{3}{1}\binom{3}{1}}{\binom{6}{2}} \cdot \frac{\binom{2}{1}\binom{2}{1}}{\binom{4}{2}} \cdot \frac{\binom{1}{1}\binom{1}{1}}{\binom{2}{2}} \\
&= \frac{2 \cdot 5 \cdot 5}{10 \cdot 9} \cdot \frac{2 \cdot 4 \cdot 4}{8 \cdot 7} \cdot \frac{2 \cdot 3 \cdot 3}{6 \cdot 5} \cdot \frac{2 \cdot 2 \cdot 2}{4 \cdot 3} \cdot \frac{2 \cdot 1 \cdot 1}{2 \cdot 1} \\
&= \frac{2^5 \cdot (5!)^2}{10!} = \frac{2^5}{\binom{10}{5}}
\end{aligned}
$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.16. Οι εταιρείες ασφάλισης αυτοκινήτων κατατάσσουν τους οδηγούς σε 10 κατηγορίες ανάλογα με την πιθανότητα που έχουν να προκαλέσουν δυστύχημα. Έστω ότι η πιθανότητα όπως ένας οδηγός της κ-οστής κατηγορίας έχει σ΄ ένα δωδεκάμηνο ένα τουλάχιστο δυστύχημα είναι $\kappa/100$, $\kappa = 1, 2, \ldots, 10$. Ας θεωρήσουμε μία ασφαλιστική εταιρεία στην οποία τα $\kappa/55$ των οδηγών που ασφαλίζει ανήκουν στην κ-οστή κατηγορία, $\kappa = 1, 2, \ldots, 10$. Αν ένας οδηγός ασφαλισμένος στην εταιρεία αυτή αναφέρει ένα τουλάχιστο δυστύχημα σ΄ ένα δωδεκάμηνο ποιά είναι η πιθανότητα να ανήκει στην κ-οστή κατηγορία, για $\kappa = 1, 2, \ldots, 10$;

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

A_κ: ενδεχ. οδηγός να ανήκει στην κατηγορία κ, $\kappa = 1, 2, \ldots, 10$
B: ενδεχ. οδηγός αναφέρει ένα τουλάχιστο δυστύχημα.

$$P(A_\kappa|B) = \frac{P(A_\kappa)P(B|A_\kappa)}{\sum_{j=1}^{10} P(A_j)P(B|A_j)} = \frac{\frac{\kappa}{55}\cdot\frac{\kappa}{100}}{\sum_{j=1}^{10}\frac{j}{55}\cdot\frac{j}{100}}$$

$$= \frac{\kappa^2}{\sum_{j=1}^{10} j^2} = \frac{\kappa^2}{385}, \quad \kappa = 1, 2, \ldots, 10.$$

1.20. Ας θεωρήσουμε ένα πομπό ο οποίος εκπέμπει τα σήματα 0 και 1 σε αναλογία 1 προς 2. Ένας δέκτης των σημάτων αυτών λαμβάνει λανθασμένο σήμα σε 2% των περιπτώσεων και ένας δεύτερος δέκτης σε 3% των περιπτώσεων. Αν ο πρώτος δέκτης λάβει σήμα 0 και ο δεύτερος λάβει σήμα 1, ποιόν από τους δύο δέκτες πρέπει να εμπιστευθούμε ;

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

A_0: ενδεχ. εκπομπής 0
A_1: ενδεχ. εκπομπής 1
B_0: ενδεχ. λήψης από τον πρώτο δέκτη 0
Γ_1: ενδεχ. λήψης από το δεύτερο δέκτη 1

$$P(A_0|B_0) = \frac{P(A_0)P(B_0|A_0)}{P(A_0)P(B_0|A_0) + P(A_1)P(B_0|A_1)} = \frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{98}{100}}{\frac{1}{3}\cdot\frac{98}{100} + \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{100}} = 0{,}96,$$

$$P(A_1|\Gamma_1) = \frac{P(A_1)P(\Gamma_1|A_1)}{P(A_0)P(\Gamma_1|A_0) + P(A_1)P(\Gamma_1|A_1)} = \frac{\frac{2}{3}\cdot\frac{97}{100}}{\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{100} + \frac{2}{3}\cdot\frac{97}{100}} = 0{,}98.$$

Συμπέρασμα: Να εμπιστευθούμε το δεύτερο δέκτη.

1.26. Στο στοχαστικό πείραμα της ρίψης ενός νομίσματος δύο φορές ας θεωρήσουμε τα ενδεχόμενα όπως εμφανισθεί A: η ένδειξη κεφαλή μία τουλάχιστο φορά, B: στην πρώτη ρίψη η ένδειξη γράμματα και Γ: σε κάθε ρίψη διαφορετική ένδειξη. Υπολογίζοντας τις σχετικές πιθανότητες, δείξτε ότι

$$P(B|A) < P(B), \;\; P(\Gamma|A) > P(\Gamma), \;\; P(\Gamma|B) = P(\Gamma).$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

$$\Omega = \{(\gamma, \gamma), (\gamma, \kappa), (\kappa, \gamma), (\kappa, \kappa)\}$$

$$A = \{(\gamma, \kappa), (\kappa, \gamma), (\kappa, \kappa)\}, \quad B = \{(\gamma, \gamma), (\gamma, \kappa)\}, \quad \Gamma = \{(\gamma, \kappa), (\kappa, \gamma)\},$$

$$AB = \{(\gamma, \kappa)\}, \quad A\Gamma = \{(\gamma, \kappa), (\kappa, \gamma)\}, \quad B\Gamma = \{(\gamma, \kappa)\}.$$

$$P(B|A) = \frac{1}{3}, \quad P(B) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, \quad P(B|A) < P(B),$$

$$P(\Gamma|A) = \frac{2}{3}, \quad P(\Gamma) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, \quad P(\Gamma|A) > P(\Gamma),$$

$$P(\Gamma|B) = \frac{1}{2}, \quad P(\Gamma) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, \quad P(\Gamma|B) = P(\Gamma).$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.28. Αν τα ενδεχόμενα A και B είναι ανεξάρτητα, δείξτε ότι τα ενδεχόμενα (α) A και B', (β) A' και B και (γ) A' και B' είναι ανεξάρτητα.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

(α)

$$P(AB') = P(A - B) = P(A) - P(AB) = P(A) - P(A)P(B)$$
$$= P(A)[1 - P(B)] = P(A)P(B'),$$

(β)

$$P(A'B) = P(B - A) = P(B) - P(AB) = P(B) - P(A)P(B)$$
$$= [1 - P(A)]P(B) = P(A')P(B),$$

(γ)

$$P(A'B') = 1 - P(A) - P(B) + P(AB) = 1 - P(A) - P(B) + P(A)P(B)$$
$$= [1 - P(A)][1 - P(B)] = P(A')P(B').$$