ΚΑΤΑΝΟΜΕΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ ΤΥΧΑΙΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

Χαράλαμπος Α. Χαραλαμπίδης

4 Νοεμβρίου 2009

ΤΥΧΑΙΑ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗ ΚΑΙ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ

Ορισμός

Έστω Ω ο δειγματικός χώρος ενός στοχαστικού (τυχαίου) πειράματος. Μια πραγματική συνάρτηση X που ορίζεται στο δειγματικό χώρο Ω καλείται τυχαία μεταβλητή (τ.μ.). Η συνάρτηση αυτή αντιστοιχεί σε κάθε δειγματικό σημείο $\omega \in \Omega$ έναν πραγματικό αριθμό $x = X(\omega)$.

Οι τυχαίες μεταβλητές συμβολίζονται με τα κεφαλαία γράμματα χωρίς δείκτες X, Y, Z, W ή με δείκτες $X_1, X_2, \ldots, X_\kappa$ και οι τιμές τους με τα αντίστοιχα μικρά γράμματα x, y, z w ή $x_1, x_2, \ldots, x_\kappa$.

Το σύνολο των τιμών της τυχαίας μεταβλητής $R_X \subseteq R$ αποτελεί το **νέο δειγματικό χώρο** του στοχαστικού (τυχαίου) πειράματος (ή φαινομένου).

ΤΥΧΑΙΑ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗ ΚΑΙ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ

Το διάστημα $(-\infty, x]$ είναι βασικό ενδεχόμενο στο νέο δειγματικό χώρο $R_X \subseteq R$. Οποιοδήποτε άλλο ενδεχόμενο $B \subseteq R_X$ δύναται να εκφρασθεί συναρτήσει του διαστήματος αυτού.

Ορισμός

Η συνάρτηση

$$F(x) = P(X \leq x) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\}), \quad -\infty < x < \infty, \tag{1}$$

καλείται συνάρτηση κατανομής ή αθροιστική συνάρτηση κατανομής της τ.μ. X.

Στις περιπτώσεις που υπάρχει κίνδυνος σύγχυσης η συνάρτηση κατανομής της τ.μ. X συμβολίζεται με F_X και η τιμή της στο x με $F_X(x)$.

ΤΥΧΑΙΑ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗ ΚΑΙ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ

Η συνάρτηση κατανομής, ως πιθανότητα, λαμβάνει τιμές στο διάστημα $[0, 1]$,

$$0 \leq F(x) \leq 1, \quad -\infty < x < \infty.$$

Επίσης είναι αύξουσα συνάρτηση,

$$F(x_1) \leq F(x_2), \quad -\infty < x_1 < x_2 < \infty,$$

επειδή

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x_1\} \subseteq \{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x_2\}$$

και ισχύει

$$F(-\infty) = \lim_{x \to -\infty} F(x) = 0, \quad F(\infty) = \lim_{x \to \infty} F(x) = 1,$$

επειδή

$$\lim_{x \to -\infty} \{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\} = \emptyset, \quad \lim_{x \to \infty} \{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\} = \Omega.$$

ΤΥΧΑΙΑ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗ ΚΑΙ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ

Η πιθανότητα όπως μια τυχαία μεταβλητή βρίσκεται σε συγκεκριμένο διάστημα των πραγματικών αριθμών δύναται να εκφρασθεί συναρτήσει της συνάρτησης κατανομής της.

Θεώρημα

Έστω $F(x)$, $x \in R$, η συνάρτηση κατανομής μιας τυχαίας μεταβλητής X. Τότε

$$P(a < X \leq \beta) = F(\beta) - F(a), \tag{2}$$

για κάθε πραγματικούς αριθμούς a και β με $a < \beta$.

Απόδειξη.

Το ενδεχόμενο $\{\omega \in \Omega : a < X(\omega) \leq \beta\}$ δύναται να εκφρασθεί ως διαφορά δύο ενδεχομένων ως εξής:

$$\{\omega \in \Omega : a < X(\omega) \leq \beta\} = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq \beta\} - \{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq a\}$$

με

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq a\} \subseteq \{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq \beta\},$$

εφ' όσον $a < \beta$. Επομένως, χρησιμοποιώντας την

$$P(B - A) = P(B) - P(A),$$

συνάγουμε, σύμφωνα με τη (1), τη σχέση (2). $\square$

ΤΥΧΑΙΑ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗ ΚΑΙ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ

Παράδειγμα

Ας θεωρήσουμε δύο διαδοχικές ρίψεις ενός συνήθους νομίσματος. Ένας κατάλληλος δειγματικός χώρος για τη μελέτη του τυχαίου αυτού πειράματος είναι το σύνολο

$$\Omega = \{(\gamma, \gamma), (\gamma, \kappa), (\kappa, \gamma), (\kappa, \kappa)\},$$

όπου σημειώνεται με κ η όψη κεφαλή και με γ η όψη γράμματα. Η συνάρτηση

$$X(\omega) = \begin{cases} 0, & \omega = (\kappa, \kappa), \\ 1, & \omega \in \{(\gamma, \kappa), (\kappa, \gamma)\}, \\ 2, & \omega = (\gamma, \gamma), \end{cases}$$

η οποία ορίζεται στο δειγματικό χώρο Ω και παίρνει τιμές στο σύνολο $R_X = \{0, 1, 2\}$, είναι τυχαία μεταβλητή και εκφράζει τον αριθμό εμφανίσεων της όψης γράμματα.

ΤΥΧΑΙΑ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗ ΚΑΙ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ

Η συνάρτηση κατανομής $F(x)$, $x \in R$, της τ.μ. X υπολογίζεται ως εξής:

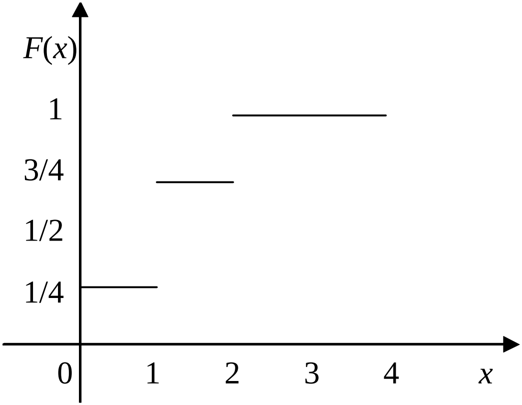
$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\} = \begin{cases} \emptyset, & -\infty < x < 0, \\ \{(\kappa,\kappa)\}, & 0 \leq x < 1, \\ \{(\kappa,\kappa),(\gamma,\kappa),(\kappa,\gamma)\}, & 1 \leq x < 2, \\ \Omega, & 2 \leq x < \infty \end{cases}$$

και σύμφωνα με τον ορισμό της συνάρτησης κατανομής,

$$F(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x < 0, \\ 1/4, & 0 \leq x < 1, \\ 3/4, & 1 \leq x < 2, \\ 1, & 2 \leq x < \infty \end{cases}$$

Η γραφική παράσταση της $F(x)$, $x \in R$, δίνεται στο ακόλουθο σχήμα. Παρατηρούμε ότι αυτή είναι σκαλωτή συνάρτηση με άλματα στα σημεία $x = 0, 1, 2$ μεγέθους $1/4$, $1/2$, $1/4$, αντίστοιχα.

ΤΥΧΑΙΑ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗ ΚΑΙ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ



ΤΥΧΑΙΑ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗ ΚΑΙ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ

Παράδειγμα

Ας θεωρήσουμε μια τυχαία μεταβλητή X *με τιμές* x *στο διάστημα* $[0, 1]$ *και ας υποθέσουμε ότι η συνολική πιθανότητα* $P(0 \leq X \leq 1) = 1$ *κατανέμεται ομοιόμορφα στο διάστημα* $[0, 1]$. *Στην περίπτωση αυτή η πιθανότητα η* X *να βρίσκεται στο διάστημα* $[x_1, x_2]$, *με* $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq 1$, *είναι ανάλογη του μήκους αυτού* $x_2 - x_1$, *δηλαδή*

$$P(x_1 \leq X \leq x_2) = c\,(x_2 - x_1),$$

όπου c *η σταθερά αναλογίας. Επιπλέον, έχουμε* $P(-\infty < X < 0) = 0$ *και* $P(1 < X < +\infty) = 0$. *Έπομένως, θέτοντας* $x_1 = 0$ *και* $x_2 = 1$, *λαμβάνουμε*

$$P(0 \leq X \leq 1) = c$$

και επειδή $P(0 \leq X \leq 1) = 1$, *συμπεραίνουμε ότι* $c = 1$.

ΤΥΧΑΙΑ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗ ΚΑΙ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ

Η συνάρτηση κατανομής $F(x)$, $x \in R$, της X είναι τότε η

$$F(x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x < 0, \\ x, & 0 \leq x < 1, \\ 1, & 1 \leq x < \infty. \end{cases}$$

Η $F(x)$, $x \in R$, είναι συνεχής συνάρτηση

ΤΥΧΑΙΑ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗ ΚΑΙ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ