ΚΑΤΑΝΟΜΕΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ ΤΥΧΑΙΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ (Συνέχεια)

Χαράλαμπος Α. Χαραλαμπίδης

9 Νοεμβρίου 2009

ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΠΥΚΝΟΤΗΤΑΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ

Ορισμός

Μία τυχαία μεταβλητή X καλείται διακριτή ή απαριθμητή αν παίρνει με πιθανότητα 1 αριθμήσιμο (πεπερασμένο ή άπειρο) σύνολο τιμών $R_X = \{x_0, x_1, \ldots, x_\upsilon, \ldots\}$.
Η συνάρτηση

$$f(x_\kappa) = P(X = x_\kappa) = P(\{\omega \in \Omega : \ X(\omega) = x_\kappa\}), \quad \kappa = 0, 1, \ldots, \upsilon, \ldots, \qquad (1)$$

η οποία σε κάθε σημείο x_κ εκχωρεί την πιθανότητά του, καλείται συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας ή απλώς συνάρτηση πιθανότητας της τ.μ. X.

Στις περιπτώσεις που υπάρχει κίνδυνος σύγχυσης η συνάρτηση πιθανότητας της τ.μ. X συμβολίζεται με f_X και η τιμή της στο σημείο x_κ με $f_X(x_\kappa)$.

ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΠΥΚΝΟΤΗΤΑΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ

Η συνθήκη ότι η τυχαία μεταβλητή X παίρνει με πιθανότητα 1 τιμές στο σύνολο R_X, χρησιμοποιώντας την παράσταση

$$R_X = \{x_0\} \cup \{x_1\} \cdots \cup \{x_\upsilon\} \cup \cdots ,$$

δύναται να γραφεί στη μορφή

$$\sum_{\kappa=0}^{\infty} P(X = x_\kappa) = 1.$$

ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΠΥΚΝΟΤΗΤΑΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ

Η συνάρτηση πιθανότητας, όπως προκύτει άμεσα από τον ορισμό της, είναι μη αρνητική,

$$f(x_\kappa) \geq 0, \quad \kappa = 0, 1, \ldots, \upsilon, \ldots, \quad f(x) = 0, \quad x \notin R_X, \tag{2}$$

και αθροίζει στη μονάδα,

$$\sum_{\kappa=0}^{\infty} f(x_\kappa) = 1. \tag{3}$$

Στην περίπτωση που το σύνολο των τιμών της τ.μ. X είναι πεπερασμένο, $R_X = \{x_0, x_1, \ldots, x_\upsilon\}$, η σειρά (3) γίνεται ένα πεπερασμένο άθροισμα,

$$\sum_{\kappa=0}^{\upsilon} f(x_\kappa) = 1.$$

ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΠΥΚΝΟΤΗΤΑΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ

Η συνάρτηση πιθανότητας $f(x_\kappa) = P(X = x_\kappa)$, $\kappa = 0, 1, \ldots,$ μιας διακριτής τυχαίας μεταβλητής συνδέεται με τη συνάρτηση κατανομής αυτής $F(x) = P(X \leq x)$, $-\infty < x < \infty$:

$$F(x) = \sum_{x_\kappa \leq x} f(x_\kappa), \quad -\infty < x < \infty \tag{4}$$

και

$$f(x_0) = F(x_0), \quad f(x_\kappa) = F(x_\kappa) - F(x_{\kappa-1}), \quad \kappa = 1, 2, \ldots\,. \tag{5}$$

Σημειώνουμε ότι η συνάρτηση κατανομής $F(x) = P(X \leq x)$, $-\infty < x < \infty$, μιας διακριτής τ.μ. X είναι σταθερά κατά διαστήματα και αυξάνει μόνο με άλματα στα σημεία $x_\kappa \in R_X$.

ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΠΥΚΝΟΤΗΤΑΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ

Ορισμός

Μία τυχαία μεταβλητή X καλείται συνεχής αν υπάρχει μη αρνητική συνάρτηση,

$$f(x) \geq 0, \quad x \in R, \tag{6}$$

με

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1, \tag{7}$$

τέτοια ώστε για κάθε πραγματικούς αριθμούς α και β, με $\alpha < \beta$,

$$P(\alpha < X \leq \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx. \tag{8}$$

Η $f(x)$, $x \in R$, καλείται συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας ή απλώς συνάρτηση πυκνότητας της τ.μ. X.

ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΠΥΚΝΟΤΗΤΑΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ

Σημειώνουμε ότι η σχέση (8) συνεπάγεται άμεσα τη σχέση

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt, \quad -\infty < x < \infty. \tag{9}$$

η οποία δείχνει ότι η συνάρτηση κατανομής $F(x) = P(X \leq x)$, $-\infty < x < \infty$, μιας συνεχούς τ.μ. X είναι συνεχής.

Επίσης, αν η συνάρτηση $f(x)$ είναι συνεχής στο σημείο x, τότε παραγωγίζοντας τη σχέση (9), παίρνουμε την

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x). \tag{10}$$

ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΠΥΚΝΟΤΗΤΑΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ

Επισημαίνουμε ότι η συνάρτηση πυκνότητας $f(x)$, $-\infty < x < \infty$, σε αντίθεση με τη συνάρτηση πιθανότητας, δεν παριστάνει την πιθανότητα κάποιου ενδεχομένου.

Η πιθανότητα $P(X = x) = 0$, για οποιοδήποτε $x \in R$, και επομένως η $f(x)$ δεν παριστάνει βέβαια αυτή την πιθανότητα.

Μόνον όταν η συνάρτηση αυτή ολοκληρώνεται μεταξύ δύο σημείων, όπως στην (8), δίνει κάποια πιθανότητα.

Κατά προσέγγιση, για μικρό $h > 0$, έχουμε

$$f(x) \cong P(x < X \leq x + h)/h.$$

Παράδειγμα

Ας θεωρήσουμε έναν πομπό ο οποίος εκπέμπει τις λέξεις ενός μηνύματος κωδικοποιημένες ως ακολουθίες των σημάτων 0 *και* 1.
Ο δειγματικός χώρος μιας τυχαία επιλεγόμενης ακολουθίας τριών σημάτων είναι το σύνολο

$$\begin{aligned} \Omega = \{&(0,0,0),(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1),\\ &(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1),(1,1,1)\}. \end{aligned}$$

Τα δειγματικά σημεία, λόγω του τυχαίου της επιλογής της ακολουθίας, είναι ισοπίθανα.
Ο αριθμός X των εμφανίσεων του σήματος 1 *στην ακολουθία των τριών σημάτων είναι μια διακριτή τυχαία μεταβλητή με σύνολο τιμών* $R_X = \{0,1,2,3\}$.

ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΠΥΚΝΟΤΗΤΑΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ

Η συνάρτηση πιθανότητας της τ.μ. X υπολογίζεται, σύμφωνα με τον ορισμό, ως εξής:

$$f(0) = P(X = 0) = P(\{(0,0,0)\}) = \frac{1}{8},$$

$$f(1) = P(X = 1) = P(\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}) = \frac{3}{8},$$

$$f(2) = P(X = 2) = P(\{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\}) = \frac{3}{8},$$

$$f(3) = P(X = 3) = P(\{(1,1,1)\}) = \frac{1}{8}.$$

Σημειώνουμε ότι

$$\sum_{x=0}^{3} f(x) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = 1,$$

όπως απαιτείται από τον ορισμό μιας διακριτής τυχαίας μεταβλητής.

ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΠΥΚΝΟΤΗΤΑΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ

Παράδειγμα

Ας θεωρήσουμε μία τυχαία μεταβλητή X με τιμές x στο διάστημα $[0, 1]$ και ας υποθέσουμε ότι η συνολική πιθανότητα κατανέμεται ομοιόμορφα στο διάστημα αυτό. Να προσδιορισθεί η συνάρτηση πυκνότητας της X. Η συνάρτηση κατανομής της X έχει υπολογισθεί σε προηγούμενο παράδειγμα και είναι η

$$F(x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x < 0, \\ x, & 0 \leq x < 1, \\ 1, & 1 \leq x < \infty. \end{cases}$$

ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΠΥΚΝΟΤΗΤΑΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ

Παραγωγίζοντας αυτή συνάγουμε, σύμφωνα με την (10), τη συνάρτηση πυκνότητας της X

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & x < 0 \text{ ή } x > 1. \end{cases}$$

Σημειώνουμε ότι η συνάρτηση f δεν είναι συνεχής στα σημεία 0 και 1 και έτσι οι τιμές $f(0)$ και $f(1)$ μπορούν να ορισθούν αυθαίρετα. Στη συγκεκριμένη περίπτωση έχουν ορισθεί ως $f(0) = f(1) = 1$.

ΚΑΤΑΝΟΜΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΤΥΧΑΙΑΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ

Στην πιθανοθεωρητική μελέτη ενός στοχαστικού (τυχαίου) πειράματος (ή φαινομένου), όπως επίσης και στη στατιστική συμπερασματολογία, αναφύεται συχνά η ανάγκη προσδιορισμού της κατανομής μιας τυχαίας μεταβλητής $Y = g(X)$, η οποία είναι συνάρτηση μιας άλλης τυχαίας μεταβλητής X με γνωστή κατανομή.

Συνήθως το ενδιαφέρον αφορά την περίπτωση που τόσο η τυχαία μεταβλητή X όσο και η τυχαία μεταβλητή Y είναι συνεχείς.

Στην περίπτωση αυτή ο προσδιορισμός της κατανομής της Y επιτυγχάνεται ευκολότερα με την εύρεση, αρχικά, της συνάρτησης κατανομής.

Η συνάρτηση πυκνότητας της Y προσδιορίζεται με παραγώγιση της συνάρτησης κατανομής

ΚΑΤΑΝΟΜΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΤΥΧΑΙΑΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ

Η έκφραση της συνάρτησης κατανομής της τυχαίας μεταβλητής $Y = g(X)$,

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P[g(X) \leq y],$$

συναρτήσει της συνάρτησης κατανομής της τυχαίας μεταβλητής X απαιτεί τον προσδιορισμό του συνόλου $\{x : g(x) \leq y\}$.

Τούτο επιτυγχάνεται εύκολα αν ο μετασχηματισμός $y = g(x)$ είναι ένα προς ένα από το σύνολο R_X των τιμών της X επί του συνόλου R_Y των τιμών της Y και γνησίως μονότονος.
Τότε υπάρχει ο αντίστροφος μετασχηματισμός $x = g^{-1}(y)$ και είναι γνησίως μονότονος.

Στην περίπτωση αυτή η σχέση $g(x) \leq y$ είναι ισοδύναμη με τη σχέση $x \leq g^{-1}(y)$, αν η $y = g(x)$ είναι γνησίως αύξουσα και με τη σχέση $x \geq g^{-1}(y)$, αν η $y = g(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα.

Επομένως

$$F_Y(y) = P[X \leq g^{-1}(y)] = F_X(g^{-1}(y)),$$

αν η $y = g(x)$ είναι γνησίως αύξουσα, και

$$\begin{aligned} F_Y(y) = P[X \geq g^{-1}(y)] &= 1 - P[X < g^{-1}(y)] \\ &= 1 - P[X \leq g^{-1}(y)] = 1 - F_X(g^{-1}(y)), \end{aligned}$$

αν η $y = g(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα.

ΚΑΤΑΝΟΜΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΤΥΧΑΙΑΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ

Αν η αντίστροφη συνάρτηση $x = g^{-1}(y)$ παραγωγίζεται και η παράγωγος

$$(g^{-1}(y))' = \frac{dg^{-1}(y)}{dy}$$

είναι συνεχής για κάθε y στο R_Y, τότε παραγωγίζοντας την ανωτέρω έκφραση της συνάρτησης κατανομής $F_Y(y)$, σύμφωνα με τον κανόνα παραγώγισης σύνθετης συνάρτησης, συνάγουμε τη σχέση

$$f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y))\frac{dg^{-1}(y)}{dy},$$

αν η $y = g(x)$ είναι γνησίως αύξουσα, και τη σχέση

$$f_Y(y) = -f_X(g^{-1}(y))\frac{dg^{-1}(y)}{dy},$$

αν η $y = g(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα.

ΚΑΤΑΝΟΜΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΤΥΧΑΙΑΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ

Θεώρημα

Έστω ότι η X *είναι μία συνεχής τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πυκνότητας* $f_X(x) > 0$, $x \in R_X \subseteq R$. *Επίσης, έστω ότι ο μετασχηματισμός* $y = g(x)$ *είναι γνησίως μονότονος από το σύνολο* R_X *επί του συνόλου* $R_Y = g(R_X)$. *Αν υπάρχει η παράγωγος* $dg^{-1}(y)/dy$ *και είναι συνεχής για κάθε* $y \in R_Y$, *τότε η* $Y = g(X)$ *είναι μία συνεχής τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πυκνότητας*

$$f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y))\left|\frac{dg^{-1}(y)}{dy}\right|, \quad y \in R_Y. \tag{11}$$

Στη μερική περίπτωση που $y = g(x) = \alpha x + \beta$, όπου α και β πραγματικές σταθερές με $\alpha \neq 0$, ο αντίστροφος μετασχηματισμός είναι ο $x = g^{-1}(y) = (y - \beta)/\alpha$ και $dg^{-1}(y)/dy = 1/\alpha$. Έτσι συνάγουμε το ακόλουθο πόρισμα.

Πόρισμα

Έστω ότι η X είναι μία συνεχής τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πυκνότητας $f_X(x) > 0$, $x \in R_X$. Τότε η $Y = \alpha X + \beta$, με $\alpha \neq 0$, είναι μία συνεχής τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πυκνότητας

$$f_Y(y) = \frac{1}{|\alpha|} f_X\left(\frac{y - \beta}{\alpha}\right), \quad y \in R_Y. \tag{12}$$

Παράδειγμα

Ας θεωρήσουμε μια συνεχή τυχαία μεταβλητή X με συνάρτηση πυκνότητας

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right], \quad -\infty < x < \infty,$$

όπου $-\infty < \mu < \infty$ και $0 < \sigma < \infty$ είναι παράμετροι της κατανομής. Σημειώνουμε ότι αυτή είναι η συνάρτηση πυκνότητας της κανονικής κατανομής.

Να προσδιορισθεί η συνάρτηση πυκνότητας της τ.μ. $Y = aX + \beta$, με $a \neq 0$.

ΚΑΤΑΝΟΜΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΤΥΧΑΙΑΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ

Χρησιμοποιώντας το Πόρισμα, παίρνουμε

$$f_Y(y) = \frac{1}{|a|\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(y - a\mu - \beta)^2}{2(a\sigma)^2} \right], \quad -\infty < y < \infty.$$

Θέτοντας

$$\mu_Y = a\mu + \beta, \quad \sigma_Y = |a|\sigma,$$

η πυκνότητα αυτή γράφεται στη μορφή

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sigma_Y\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(y - \mu_Y)^2}{2\sigma_Y^2} \right], \quad -\infty < y < \infty,$$

η οποία είναι η συνάρτηση πυκνότητας της κανονικής κατανομής με παραμέτρους $\mu_Y = a\mu + \beta$ και $\sigma_Y = |a|\sigma$.

ΚΑΤΑΝΟΜΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΤΥΧΑΙΑΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ

Ειδικά για $a = 1/\sigma$ και $\beta = -\mu/\sigma$,
οπότε $\mu_Y = 0$ και $\sigma_Y = 1$,
η συνάρτηση πυκνότητας της τυχαίας μεταβλητής $Y = (X - \mu)/\sigma$
παίρνει τη μορφή

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2}, \quad -\infty < y < \infty$$

η οποία είναι γνωστή ως τυποποιημένη κανονική πυκνότητα.

ΚΑΤΑΝΟΜΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΤΥΧΑΙΑΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ

Η περίπτωση που ο μετασχηματισμός $y = g(x)$ δεν είναι αμφιμονοσήμαντος από το σύνολο R_X των τιμών της τ.μ. X στο επί του συνόλου R_Y των τιμών της τ.μ. Y δύναται να αντιμετωπισθεί με τον προσδιορισμό του συνόλου $\{x : g(x) \leq y\}$ και την εύρεση, αρχικά, της συνάρτησης κατανομής της τυχαίας μεταβλητής Y.

Παράδειγμα

Έστω ότι η τυχαία μεταβλητή X έχει την τυποποιημένη κανονική συνάρτηση πυκνότητας

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}, \quad -\infty < x < \infty.$$

Να προσδιορισθεί η συνάρτηση πυκνότητας της τ.μ. $Y = X^2$.

Η τυχαία μεταβλητή Y δεν μπορεί να πάρει αρνητικές τιμές και έτσι $F_Y(y) = 0$, για $-\infty < y \leq 0$, ενώ

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y \leq y) = P(X^2 \leq y) \\ &= P(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}) = F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y}), \end{aligned}$$

για $0 < y < \infty$.

ΚΑΤΑΝΟΜΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΤΥΧΑΙΑΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ

Παραγωγίζοντας τη συνάρτηση αυτή, σύμφωνα με τον κανόνα παραγώγισης σύνθετης συνάρτησης, συνάγουμε τη συνάρτηση πυκνότητας

$$f_Y(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}\{f_X(\sqrt{y}) + f_X(-\sqrt{y})\}, \ \ 0 < y < \infty,$$

η οποία, επειδή η συνάρτηση $f_X(x)$, $-\infty < x < \infty$, είναι άρτια, $f_X(-\sqrt{y}) = f_X(\sqrt{y}), 0 < y < \infty$, γίνεται

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{y}} f_X(\sqrt{y}), \ \ 0 < y < \infty.$$

Επομένως, στην περίπτωση που η τ.μ. X έχει την τυποποιημένη κανονική συνάρτηση πυκνότητας, η συνάρτηση πυκνότητας της τ.μ. $Y = X^2$ είναι η

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi y}} e^{-y/2}, \ \ 0 < y < \infty.$$

ΜΕΣΗ ΤΙΜΗ ΚΑΙ ΔΙΑΣΠΟΡΑ ΤΥΧΑΙΑΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ

Η κατανομή πιθανότητας μιας τυχαίας μεταβλητής δύναται να εκφρασθεί είτε από τη συνάρτηση κατανομής είτε από τη συνάρτηση πιθανότητας ή πυκνότητας αυτής.

Μια περιληπτική περιγραφή της πιθανοθεωρητικής συμπεριφοράς μιας τυχαίας μεταβλητής παρέχεται από τη θεώρηση και μελέτη μερικών βασικών παραμέτρων της κατανομής της.

Η μέση τιμή που αποτελεί μέτρο θέσης ή κεντρικής τάσης και η διασπορά που αποτελεί μέτρο συγκεντρωτικότητας ή μεταβλητότητας είναι οι πιο βασικές παράμετροι της κατανομής μιας τυχαίας μεταβλητής.

ΜΕΣΗ ΤΙΜΗ ΚΑΙ ΔΙΑΣΠΟΡΑ ΤΥΧΑΙΑΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ

Η μέση τιμή μιας τυχαίας μεταβλητής αποτελεί γενίκευση του αριθμητικού μέσου μιας ακολουθίας τιμών.

Ορισμός

(α) *Έστω X μία διακριτή τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πιθανότητας* $f(x_\kappa) = P(X = x_\kappa)$, $\kappa = 0, 1, \ldots$ *. Τότε η μεση τιμή αυτής, συμβολιζόμενη με* $E(X)$ *ή* μ_X *ή απλώς* μ*, αν δεν υπάρχει κίνδυνος σύγχυσης, ορίζεται από τη σχέση*

$$\mu = E(X) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} x_\kappa f(x_\kappa). \tag{13}$$

(β) *Έστω X μία συνεχής τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πυκνότητας* $f(x)$*. Τότε η μέση τιμή αυτής ορίζεται από τη σχέση*

$$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx. \tag{14}$$

ΜΕΣΗ ΤΙΜΗ ΚΑΙ ΔΙΑΣΠΟΡΑ ΤΥΧΑΙΑΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ

Αξίζει να επισημανθεί η αναλογία μεταξύ της μέσης τιμής μιας τυχαίας μεταβλητής και του κέντρου βάρους μάζας στη μηχανική.

Αν μια μονάδα μάζας κατανέμεται στα σημεία $\{x_0, x_1, \ldots, \}$ μιας ευθείας και $f(x_\kappa)$ είναι η μάζα στο σημείο x_κ, $\kappa = 0, 1, \ldots,$ τότε η (13) παριστάνει το κέντρο βάρους (περί την αρχή).

Κατά τον ίδιο τρόπο αν η μονάδα μάζας έχει συνεχή κατανομή σε μια ευθεία και αν η $f(x)$ παριστάνει την πυκνότητα μάζας στο x, τότε η (14) ορίζει και πάλιν το κέντρο βάρους.

Με την έννοια αυτή η μέση τιμή θεωρείται ως το κέντρο της κατανομής πιθανότητας.

Παράδειγμα

Ας θεωρήσουμε στοχαστικό πείραμα της ρίψης ενός συνήθους κύβου και έστω X ο αριθμός που εμφανίζεται στην επάνω έδρα του. Να υπολογισθεί η μέση τιμή $E(X)$.

Η συνάρτηση πιθανότητας της τ.μ. X, δίνεται από την

$$f(x) = P(X = x) = \frac{1}{6}, \quad x = 1, 2, \ldots, 6.$$

Επομένως, σύμφωνα με τον ορισμό της μέσης τιμής,

$$E(X) = \frac{1}{6}\sum_{x=1}^{6} x = \frac{1+2+3+4+5+6}{6} = \frac{21}{6} = \frac{7}{2}.$$

ΜΕΣΗ ΤΙΜΗ ΚΑΙ ΔΙΑΣΠΟΡΑ ΤΥΧΑΙΑΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ

Παράδειγμα

Ας θεωρήσουμε μία συνεχή τυχαία μεταβλητή X η οποία κατανέμεται ομοιόμορφα στο διάστημα $[-\partial, \partial]$.
Να υπολογισθεί η μέση τιμή $E(X)$.

Η συνάρτηση πυκνότητας της τ.μ. X δίνεται από την

$$f(x) = \frac{1}{2\partial}, \quad -\partial \leq x \leq \partial.$$

Επομένως, σύμφωνα με τον ορισμό της μέσης τιμής,

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \frac{1}{2\partial}\int_{-\partial}^{\partial} xdx = \left[\frac{x^2}{4\partial}\right]_{-\partial}^{\partial} = 0.$$

ΜΕΣΗ ΤΙΜΗ ΚΑΙ ΔΙΑΣΠΟΡΑ ΤΥΧΑΙΑΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ

Μέση τιμή της $Y = g(X)$:

$$E(Y) \equiv E[g(X)] = \sum_{\kappa=0}^{\infty} g(x_\kappa) f_X(x_\kappa), \tag{15}$$

αν η X είναι διακριτή, και η έκφραση

$$E(Y) \equiv E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x) dx, \tag{16}$$

αν η X είναι συνεχής.

ΜΕΣΗ ΤΙΜΗ ΚΑΙ ΔΙΑΣΠΟΡΑ ΤΥΧΑΙΑΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ

Η διασπορά μιας τυχαίας μεταβλητής αποτελεί ένα μέτρο της συγκεντρωτικότητας ή μεταβλητότητας της κατανομής της.

Η ύπαρξη κατανομών οι οποίες έχουν την ίδια μέση τιμή και των οποίων οι τιμές είναι περισσότερες ή λιγότερο διασπαρμένες και απομακρισμένες από αυτήν καθιστά αναγκαία την εισαγωγή ενός τέτοιου μέτρου.

Η διασπορά, η οποία δύναται να χρησιμοποιηθεί για τη διάκριση των κατανομών αυτών, είναι η μέση τιμή του τετραγώνου της απόκλισης $g(X) = (X - \mu)^2$ της τυχαίας μεταβλητής X από τη μέση της τιμή $\mu = E(X)$.

ΜΕΣΗ ΤΙΜΗ ΚΑΙ ΔΙΑΣΠΟΡΑ ΤΥΧΑΙΑΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ

Ορισμός

Έστω X μία τυχαία μεταβλητή της οποίας υπάρχει η μέση τιμή $\mu = E(X)$. Τότε η διασπορά ή διακύμανση της X, συμβολιζόμενη με $V(X)$ ή σ_X^2 ή απλώς σ^2, αν δεν υπάρχει κίνδυνος σύγχυσης, ορίζεται από τη σχέση

$$\sigma^2 = V(X) = E[(X - \mu)^2]. \tag{17}$$

Η θετική τετραγωνική ρίζα της διασποράς $V(X)$,

$$\sigma = \sigma_X = \sqrt{V(X)}, \tag{18}$$

καλείται τυπική απόκλιση της τυχαίας μεταβλητής X.

ΜΕΣΗ ΤΙΜΗ ΚΑΙ ΔΙΑΣΠΟΡΑ ΤΥΧΑΙΑΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ

Θεώρημα

Έστω X μία τυχαία μεταβλητή της οποίας υπάρχουν η μέση τιμή και η διασπορά και α, β σταθερές. Τότε

$$E(\alpha X+\beta)=\alpha E(X)+\beta, \tag{19}$$

$$E[g(X)+h(X)]=E[g(X)]+E[h(X)] \tag{20}$$

και

$$V(\alpha X+\beta)=\alpha^2 V(X), \tag{21}$$

$$V(X)=E(X^2)-[E(X)]^2, \tag{22}$$

Απόδειξη.

Έστω ότι η X είναι μία διακριτή τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πιθανότητας $f_X(x_\kappa) = P(X = x_\kappa)$, $\kappa = 0, 1, \ldots$. Τότε, σύμφωνα με την (15),

$$\begin{aligned} E(aX + \beta) &= \sum_{\kappa=0}^{\infty} (ax_\kappa + \beta) f_X(x_\kappa) \\ &= a \sum_{\kappa=0}^{\infty} x_\kappa f_X(x_\kappa) + \beta \sum_{\kappa=0}^{\infty} f_X(x_\kappa) = aE(X) + \beta. \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} E[g(X) + h(X)] &= \sum_{\kappa=0}^{\infty} [g(x_\kappa) + h(x_\kappa)] f_X(x_\kappa) \\ &= \sum_{\kappa=0}^{\infty} g(x_\kappa) f_X(x_\kappa) + \sum_{\kappa=0}^{\infty} h(x_\kappa) f_X(x_\kappa) = E[g(X)] + E[h(X)]. \end{aligned}$$

Σύμφωνα με τον ορισμό της διασποράς και χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες (19) και (20) της μέσης τιμής, συνάγουμε τη σχέση

$$\begin{aligned} V(aX+\beta) &= E([aX+\beta) - E(aX+\beta)]^2) = E([aX+\beta - aE(X) - \beta]^2) \\ &= E(a^2[X-E(X)]^2) = a^2 E[(X-\mu_X)^2] = a^2 V(X). \end{aligned}$$

Αναπτύσσοντας το τετράγωνο $(X-\mu)^2$, της απόκλισης της X από τη μέση της τιμή $\mu = E(X)$, κατά το διώνυμο του Νεύτωνα, και χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες (19) και (20) της μέσης τιμής, παίρνουμε

$$\begin{aligned} V(X) &= E[(X-\mu)^2] = E(X^2 - 2\mu X + \mu^2) = E(X^2) - 2\mu E(X) + \mu^2 \\ &= E(X^2) - [E(X)]^2. \end{aligned}$$

Παρατήρηση

Ροπές και παραγοντικές ροπές.

Αν τυχαία μεταβλητή X είναι μη αρνητική ακέραιη, τότε η διασπορά της υπολογίζεται ευκολότερα με τη χρησιμοποίηση της δεύτερης τάξης παραγοντικής ροπής ,

$$\mu_{(2)} = E[(X)_2],$$

όπου $(X)_2 = X(X-1)$. Συγκεκριμένα, έχουμε

$$V(X) = E[(X)_2] + E(X) - [E(X)]^2. \tag{23}$$

Η σχέση αυτή συνάγεται άμεσα από την (22) και την

$$E[(X)_2] = E[X(X-1)] = E(X^2 - X) = E(X^2) - E(X).$$

ΜΕΣΗ ΤΙΜΗ ΚΑΙ ΔΙΑΣΠΟΡΑ ΤΥΧΑΙΑΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ

Παρατήρηση

Τυποποιημένη τυχαία μεταβλητή.

Αν X είναι μία τυχαία μεταβλητή με $E(X) = \mu$ και $V(X) = \sigma^2$, τότε η τυχαία μεταβλητή

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

καλείται τυποποιημένη τυχαία μεταβλητή που αντιστοιχεί στη X.

Η τ.μ. Z έχει μέση τιμή, σύμφωνα με την (19),

$$E(Z) = E\left(\frac{X - \mu}{\sigma}\right) = \frac{E(X) - \mu}{\sigma} = 0$$

και διασπορά, σύμφωνα με την (21),

$$V(Z) = V\left(\frac{X - \mu}{\sigma}\right) = \frac{V(X)}{\sigma^2} = 1.$$

ΜΕΣΗ ΤΙΜΗ ΚΑΙ ΔΙΑΣΠΟΡΑ ΤΥΧΑΙΑΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ

Παράδειγμα

Ας θεωρήσουμε στοχαστικό πείραμα της ρίψης ενός συνήθους κύβου και έστω X ο αριθμός που εμφανίζεται στην επάνω έδρα του.
Να υπολογισθεί η διασπορά $V(X)$. .

Η συνάρτηση πιθανότητας της τ.μ. X δίνεται από την

$$f(x) = P(X = x) = \frac{1}{6}, \quad x = 1, 2, \ldots, 6.$$

Επομένως, σύμφωνα με την (15),

$$E(X^2) = \frac{1}{6}\sum_{x=1}^{6} x^2 = \frac{1+4+9+16+25+36}{6} = \frac{91}{6}.$$

Χρησιμοποιώντας τη (22) και το ότι $E(X) = 7/2$, παίρνουμε

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{91}{6} - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{91}{6} - \frac{49}{4} = \frac{35}{12}.$$

ΜΕΣΗ ΤΙΜΗ ΚΑΙ ΔΙΑΣΠΟΡΑ ΤΥΧΑΙΑΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ

Παράδειγμα

Ας θεωρήσουμε μία συνεχή τυχαία μεταβλητή X η οποία κατανέμεται ομοιόμορφα στο διάστημα $[-\vartheta, \vartheta]$.
Να υπολογισθεί η διασπορά $V(X)$.

Η συνάρτηση πυκνότητας της τ.μ. X δίνεται από την

$$f(x) = \frac{1}{2\vartheta}, \quad -\vartheta \leq x \leq \vartheta.$$

Επομένως, σύμφωνα με την (16),

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx = \frac{1}{2\vartheta} \int_{-\vartheta}^{\vartheta} x^2 dx = \left[\frac{x^3}{6\vartheta}\right]_{-\vartheta}^{\vartheta} = \frac{\vartheta^2}{3}.$$

Χρησιμοποιώντας τη (22) και το ότι $E(X) = 0$, παίρνουμε

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = E(X^2) = \frac{\vartheta^2}{3}.$$