Ασκήσεις Κεφαλαίου 2

Ασκηση 1

Νόμισμα $p = 1/2$

N = αρ. ρίψεων έως την πρώτη κεφαλή

κέρδος $X = 2^N$

$$P(N=k) = (1-p)^{k-1}p, \quad k=1,2,\dots$$

$N \sim Geom(1/2)$

$$EN = \frac{1}{p} = 2, \quad Var(N) = q/p^2 = \frac{1/2}{(1/2)^2} = 1/2.$$

(a) $EX = E(2^N) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^k (1-p)^{k-1} p =$

$= 2p \sum_{k=1}^{\infty} (2q)^{k-1}$

Για $p = q = 1/2 \Rightarrow EX = \infty$

(b) Εστω $u(w) = \log w \Rightarrow \log X = \log(2^N) = N \log 2$

$\Rightarrow Eu(X) = E(N \log 2) = EN \log 2 = 2 \log 2 < \infty$

Ασκηση 2

$u(w-G) = Eu(w-X)$

Απο ανισότητα Jensen $Eu(w-X) \leq u(E(w-X)) = u(w-\mu)$

$\Rightarrow u(w-G) \leq w(u-\mu) \Rightarrow w-G \leq w-\mu \Rightarrow G \geq \mu$

Άσκηση 3 $\quad u(w) = \log w, \quad u'(w) = \frac{1}{w} > 0, \quad u''(w) = -\frac{1}{w^2} < 0$

Άσκηση 4 $\quad u(w) = k \log w$

$$X \sim U(0,1) \Rightarrow f(x) = 1 \quad (0 \le x \le 1)$$

$$E(u(w-X)) = k\int_0^1 \log(w-x)\,dx = -k\int_w^{w-1} \log y\,dy = k\int_{w-1}^{w} \log y\,dy$$

$$= k\left(y\log y - y\right)\Big|_{w-1}^{w} = k\left[w\log w - w - (w-1)\log(w-1) + w - 1\right]$$

$$= k\left(w\log w - (w-1)\log(w-1) - 1\right)$$

Από την εξίσωση του ασφαλισμένου $\quad u(w-G) = Eu(w-X)$

$$\Rightarrow \log(w - G_{max}) = w\log w - (w-1)\log(w-1) - 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow w - G_{max} = \frac{w^w}{(w-1)^{w-1}}\,\frac{1}{e} \Rightarrow \boxed{G_{max} = w - \frac{w^w}{e\,(w-1)^{w-1}}}$$

Άσκηση 5 Υπάρχει λάθος στην εκφώνηση: Η σωστή συνάρτηση ωφελιμότητας είναι $u(w) = -e^{-\alpha w}$, $\alpha > 0$.

Η απόδειξη ότι $G > n$ είναι άμεση συνέπεια της ιδιότητας $G_{max} \geq \mu$ για κοίλη ωφελιμοσυνάρτηση u. Επομένως αρκεί να δείξουμε $EX = n$

Αν $X \sim \chi^2_n \Rightarrow X \sim Gamma\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\right)$, Γνωρίζουμε ότι

αν $X \sim Gamma(a, b)$ τότε $E(X) = \frac{\alpha}{b}$, επομένως για $\alpha = \frac{n}{2}$, $b = \frac{1}{2}$
$\Rightarrow EX = n$ και έχει δειχθεί το ζητούμενο.

Επιπλέον από το ζητούμενο, μπορούμε και να υπολογίσουμε το μέγιστο ασφάλιστρο G_{max} του ασφαλισμένου:

$$u(w - G_{max}) = E u(w - X) \Rightarrow -e^{-\alpha(w - G_{max})} = -E\left[e^{-\alpha(w-X)}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e^{\alpha G_{max}} = E(e^{\alpha X}) = M_X(\alpha) \Rightarrow G_{max} = \frac{1}{\alpha} \log(M_x(\alpha)) \quad (1)$$

όπου $M_x(\alpha)$ η ροπογεννήτρια της X. Επομένως αρκεί να υπολογίσουμε την $M_X(\alpha)$ για $X \sim \chi^2_n$

$$E(e^{\alpha X}) = \int_0^\infty e^{\alpha x} f(x)\, dx = \int_0^\infty e^{\alpha x} \frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-x/2}\, dx =$$

$$= \frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)} \int_0^\infty x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)x}\, dx. \quad \left(\text{ορίζεται για } a < 1/2\right)$$

Από την κατανομή $Y \sim Gamma\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2} - \alpha\right)$ με σππ

$$f_Y(y) = \frac{\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)^{n/2} y^{\frac{n}{2}-1} e^{-\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)y}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)},$$ και επειδή $\int_0^\infty f_Y(y)\, dy = 1$, παίρνουμε

$$\int_0^{\infty} e^{\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)x} dx = \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)^{-n/2}$$, Επομένως

$$E(e^{\alpha X}) = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{2^{\frac{n}{2}}\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)^{n/2}\Gamma(n/2)} = \frac{1}{(1-2\alpha)^{n/2}}$$

Από την (1) το μέγιστο ασφάλιστρο είναι ίσο με

$$G_{max} = \frac{1}{\alpha}\log\left(\frac{1}{(1-2\alpha)^{n/2}}\right) = -\frac{n}{2\alpha}\log(1-2\alpha)$$

Άσκηση 6 Η X ακολουθεί μεικτή κατανομή, δηλ. η τιμή της $X=0$, και $X \sim Exp(0{,}01)$, με πιθανότητες $\frac{3}{4}$ κ' $\frac{1}{4}$ αντίστοιχα

Επομένως $P(X=0)=\frac{3}{4}$ και $f(x) = \frac{1}{4}\, 0{,}01 e^{-0{,}01x}$, $x>0$

Για $u = -e^{-\alpha w}$, γνωρίζουμε ότι $G_{max} = \frac{1}{\alpha}\log(M_X(\alpha))$ (βλ. άσκ. 5)

Εδώ $M_X(\alpha) = E(e^{\alpha X}) = \frac{3}{4}E(e^0) + \frac{1}{4}\int_0^{\infty} e^{\alpha x}\, 0{,}01\, e^{-0{,}01x}dx$ (για $\alpha<0{,}01$)

$= \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\frac{0{,}01}{0{,}01-\alpha}$, και για $\alpha = \frac{1}{150} \Rightarrow M_X(1/150) = \frac{3}{2}$

$\Rightarrow G_{max} = 150\log\left(\frac{3}{2}\right) = 60.8$

Άσκηση 7 Γενικότερα έστω $X = \begin{cases} a & \text{μπ } p \\ b & \text{μπ } q=1-p \end{cases}$

(a) Η μικρή ασφάλεια θέλει να ασφαλίσει το κεφάλαιό της αξίας w έναντι ζημιάς X.

Από την εξίσωση ασφαλιομένου

$u(w-G_{max}) = E\,u(w-X) \Rightarrow$

$\Rightarrow \log(w-G_{max}) = p\log(w-\alpha) + q\log(w-b)$

$\Rightarrow w - G_{max} = (w-a)^p(w-b)^q \Rightarrow \boxed{G_{max} = w - (w-a)^p(w-b)^q}$

Για $w=1$, $\alpha=0$, $b=0{,}51$, $p=q=1/2$

$G = 1-(1\cdot 0{,}49)^{1/2} = 1-\sqrt{0{,}49} = 0.3$

(b) Εστω w_I το κεφάλαιο του ασφαλιστή
Η εξίσωση του ασφαλιστή είναι

$E(u(w_I + G_{min} - X)) = u(w_I) \Rightarrow$

$p\log(w_I + G_{min} - \alpha) + q\log(w_I + G_{min} - \beta) = \log w$

$\Rightarrow (w_I + G_{min} - \alpha)^p(w_I + G_{min} - \beta)^q = w$

Το G_{min} είναι η λύση της παραπάνω εξίσωσης

Για $w_I = 6{,}5$, $\alpha=0$, $b=0{,}51$, $p=q=1/2 \Rightarrow$

$$\sqrt{(6,5+G_{min})(5,99+G_{min})} = 6,5 \Rightarrow$$

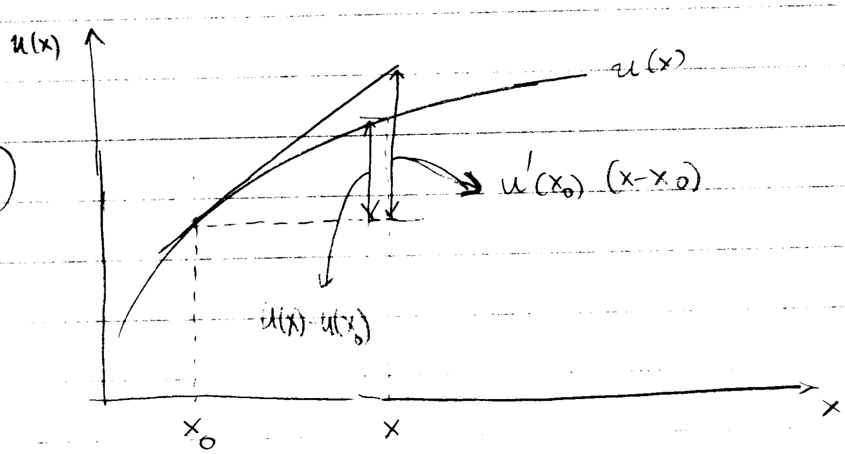
$$\Rightarrow (6,5+G_{min})(5,99+G_{min}) = 6,5^2 \Rightarrow G_{min}^2 + 12,49\, G_{min} - 3.315 = 0$$

Η δεκτή λύση της παραπάνω εξίσωσης είναι $G_{min} = 0,26$

Επειδή $G_{min} < G_{max}$, οποιαδήποτε ασφάλιση με ασφάλιστρο G τέτοιο ώστε $0,26 < G < 0,30$ είναι εφικτή.

Ασκηση 9

(a)



(b) Παίρνοντας το ανάπτυγμα Taylor της $u(x)$ πέριξ το x_0 έχουμε:

$\forall x \in \mathbb{R} \quad \exists \xi \in \mathbb{R} \quad u(x) = u(x_0) + u'(x_0)\cdot(x-x_0) + u''(\xi)\dfrac{(x-x_0)^2}{2}$

Επειδή $u''(\xi) \le 0 \quad \forall \xi \Rightarrow u(x) \le u(x_0) + u'(x_0)(x-x_0)$

Ασκηση 10

Θέτουμε $x_0 = \mu = EX$

$\forall x \in \mathbb{R} \quad u(x) \le u(\mu) + u'(\mu)\cdot(x-\mu) \Rightarrow E(u(X)) \le u(\mu) + u'(\mu)E(X-\mu)$

όμως $E(X-\mu) = 0 \Rightarrow E(u(X)) \le u(\mu) = u(EX)$

Άσκηση 11

(α) Έστω $I_p^*(x) = px$, $(0<p<1)$

και $I_d(x) = \max(x-d,0)$

Για να ισχύει $E[I(X)] = K$ θα πρέπει:

$$E(I_p^*(X)) = K \Rightarrow E(pX) = K \Rightarrow p\,EX = K \Rightarrow p = \frac{K}{EX}$$

Για $X \sim U(0,100) \Rightarrow EX = 50$, $K = 12{,}5 \Rightarrow \boxed{p = 1/4}$

Για να ισχύει $E(I_d(X)) = K$ θα πρέπει

$$E[I_d(X)] = \int_{x=0}^{\infty} \max(x-d,0)\, f(x)\,dx = \int_{x=d}^{\infty} (x-d)\, f(x)\,dx = K$$

Για $X \sim U(0,100) \Rightarrow$

$$\int_{x=d}^{\infty} (x-d) f(x)\,dx = \int_{x=d}^{100} (x-d)\frac{1}{100}\,dx = \frac{1}{100}\int_{z=0}^{100-d} z\,dz = \frac{(100-d)^2}{200} = 12{,}5$$

$$\Rightarrow (100-d)^2 = 2500 \Rightarrow 100-d = 50 \Rightarrow \boxed{d = 50}$$

(β) Για τις διασπορές ισχύει:

$$Var(X - I_p^*(X)) = Var(X - pX) = Var((1-p)X) =$$

$$=(1-p)V(X^2) = (1-p)^2\,\frac{100^2}{12} = \frac{9}{16}\,\frac{10^4}{12} = 468{,}75$$

Για την $I_d(X)$ έχουμε

$$X - I_d(X) = X - \max(X-d, 0) = \min(X, d)$$

Επομένως $Var(X - I_d(X)) = Var(\min(X,d))$

$$= E\left[(\min(X,d))^2\right] - \left[E(\min(X,d))\right]^2$$

Όμως $E(\min(X,d)) = EX - EI_d(X) = 50 - \frac{50}{4} = \frac{3}{4} \cdot 50$

$$E\left[(\min(X,d))^2\right] = \int_0^d x^2 f(x)\,dx + \int_d^\infty d^2 f(x)\,dx =$$

$$= \frac{1}{100}\left[\int_0^d x^2 dx + d^2 \int_d^{100} dx\right] = \frac{1}{100} \cdot \left\{\frac{d^3}{3} + d^2(100-d)\right\}$$

$$= d^2\left(1 - \frac{2d}{300}\right)$$ και για $d=50$: $E(\min(X,d))^2 = \frac{2}{3} \cdot 50^2$

Επομένως $Var(\min(X,d)) = \frac{2}{3} \cdot 50^2 - \left(\frac{3}{4} \cdot 50\right)^2 =$

$$= \frac{2}{3} \cdot 50^2 - \frac{9}{16} \cdot 50^2 = \left(\frac{2}{3} - \frac{9}{16}\right) 50^2 = \frac{5}{48} \cdot 50^2 = 260,4$$

Επομένως $Var(X - I_d(X)) \leq Var(X - I_p^*(X))$

για τη συγκεκριμένη κατανομή κ' συνάρτηση κάλυψης

Άσκηση 12 Θα δείξουμε τη γενίκευση της Άσκησης 11, δηλαδή ότι

$\forall\, I(X)$ τέτοια ώστε $E(I(X)) = p$, η διασπορά

$$Var\left(X - I(X)\right) \geq Var\left(X - I_d(X)\right),$$

όπου $I_d(x) = \max(x-d, 0)$ με d τ.ω. $E\left[I_d(X)\right] = p$

Έστω $s(X) = X - I(X)$, $s_d(X) = X - I_d(X) = \begin{cases} X, & X \leq d \\ d, & X \geq d \end{cases} = \min(X, d)$

Έχουμε $E(s(X)) = EX - EI(X) = EX - p$
$E(s_d(X)) = EX - EI_d(X) = EX - p$ | δηλ. οι $s(X)$ κ' $s_d(X)$ έχουν ίδιες μέσες τιμές

Επομένως για να δ.ο. $Var\left(s(X)\right) \geq Var\left(s_d(X)\right)$

αρκεί ν.δ.ο. $E\left(s^2(X)\right) \geq E\left(s_d^2(X)\right)$ (*)

Έχουμε $s^2(X) - s_d^2(X) = \left[s(X) - s_d(X)\right]^2 + 2\, s_d(X)\left[s(X) - s_d(X)\right]$

$$\Rightarrow E\left(s^2(X) - s_d^2(X)\right) \geq 2\, E\left[s_d(X)\left[s(X) - s_d(X)\right]\right]$$

Επομένως αρκεί ν.δ.ο. $E\left[s_d(X)\left(s(X) - s_d(X)\right)\right] \geq 0$ (**)

Όμως $E\left[s_d(X)\left(s(X) - s_d(X)\right)\right] =$

$$= \int_{x=0}^{\infty} s_d(x)\left[s(x) - s_d(x)\right] f(x)\,dx = \int_{x=0}^{d} x\left(s(x) - x\right) f(x)\,dx + \int_{x=d}^{\infty} d\left(s(x) - d\right) f(x)\,dx =$$

$$= \int_{x=0}^{d} x\left(s(x) - x\right) f(x)\,dx + d\int_{d}^{\infty}\left(s(x) - d\right) f(x)\,dx \qquad (1)$$

Επειδή $E[S(X)] = E(S_d(X))$, παίρνουμε $E(S(X) - S_d(X)) = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \int_0^\infty (S(x) - S_d(x)) f(x) = 0 \Rightarrow \int_0^d (S(x) - x) f(x)\,dx + \int_d^\infty (S(x) - d) f(x)\,dx = 0$$

$$\Rightarrow \int_d^\infty (S(x) - d) f(x)\,dx = - \int_0^d (S(x) - x) f(x)\,dx$$

Αντικαθιστώντας αυτή την εξίσωση στο δεύτερο μέρος της (1)

$$E[S_d(X)(S(X) - S_d(X))] = \int_0^d x\,(S(x) - x) f(x)\,dx - d\int_0^d (S(x) - x)\, f(x)\,dx =$$

$$= \int_0^d (x - d)(S(x) - x) f(x)\,dx .$$

Όμως για $0 \le x \le d \Rightarrow x - d \le 0$
Επίσης γενικά ισχύει $S(x) \le x \Rightarrow S(x) - x \le 0$ $\Bigg\} \Rightarrow \int_0^d (x-d)(S(x)-x) f(x)\,dx \ge 0$

Επομένως ισχύει $E[S_d(X)(S(X) - S_d(X))] \ge 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow E[S^2(X)] \ge E[S_d^2(X)]$$

και συνεπώς $\boxed{Var(S(X)) \ge Var(S_d(X))}$

Άσκηση 13

Έστω X συνεχής τ.μ. με τιμές σε ένα διάστημα $[a,b]$, $0 \le a < b < \infty$ και σ.π.π. $f(x) > 0$ $x \in [a,b]$, και $E(X) = \mu < \infty$

Ν.δ.ο. η εξίσωση $E I_d(X) = p$ έχει μοναδική λύση για $p \le \mu$ και δεν έχει καμμία λύση για $p > \mu$

Απόδειξη Γνωρίζουμε ότι $I_d(x) = \max(x-d, 0) = \begin{cases} 0, & x \le d \\ x-d, & x \ge d \end{cases}$

Έστω $h(d) = E I_d(X) = \int_a^b \max(x-d,0) f(x)dx$

Αν $d < a$, τότε $x \ge d$ για $x \in [a,b] \Rightarrow$

$$h(d) = \int_a^b (x-d) f(x) dx = \mu - d$$

Αν $d > b$ τότε $x \le d$ $\forall x \in [a,b] \Rightarrow h(d) = 0$

Αν $a \le d \le b$ το ολοκλήρωμα γράφεται

$$h(d) = \int_a^d 0 f(x) dx + \int_d^b (x-d) f(x) dx = \int_d^b (x-d) f(x) dx$$

Επομένως έχουμε συνοπτικά

$$\Rightarrow h(d) = \begin{cases} \mu - d & d \le a \\ \int_d^b (x-d) f(x) dx & a \le d \le b \\ 0 & d \ge b \end{cases}$$

Για $d = a+$ $h(a+) = \int_{a+}^b (x-d) f(x) dx = \int_a^b (x-d) f(x) dx = \mu - d = h(a-)$

Για $d = b-$ $h(b-) = \int_{b-}^b (x-d) f(x) dx = 0 = h(b+)$

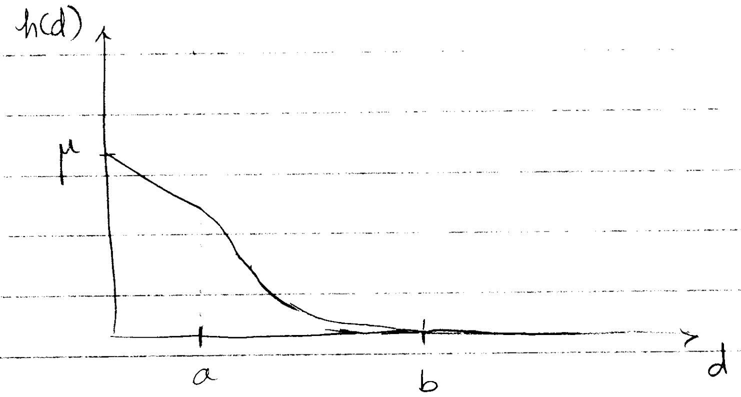
Επομένως η $h(d)$ είναι συνεχής συνάρτηση για $d \in [0, \infty)$

Όσον αφορά τη μονοτονία, εξετάζουμε την παράγωγο της h

Για $d \leq a$ $\quad h'(d) = -1$

Για $a \leq d \leq b$ $\quad h'(d) = \int_d^b (-1) f(x)dx - 1 \cdot (d-d) f(d) = -\int_d^b f(x)dx < 0$

Επομένως η h είναι γνησίως φθίνουσα για $d \in [0,b]$



Συνεπώς για $d \in [0,b]$ η h είναι 1-1 και επί, με τιμές $h(d) \in [0,\mu]$, δηλαδή παίρνει κάθε τιμή στο $[0,\mu]$ ακριβώς μια φορά.

Άρα για $P \in (0,\mu]$ η εξίσωση $h(d) = P$ έχει ακριβώς μια λύση $d = h^{-1}(P)$, για $P > \mu$ δεν έχει καμμιά λύση, ενώ για $P = 0$ οποιαδήποτε τιμή $d \geq b$ είναι λύση.

<u>Σημείωση</u> Αν η X παίρνει τιμές στο διάστημα $[a,\infty)$

τα παραπάνω ισχύουν με τη διαφορά ότι $h(d)$ είναι γνησίως φθίνουσα για $d \in [0,\infty)$ με $h(0) = \mu$, $\lim_{d \to \infty} h(d) = 0$. επομένως η ύπαρξη μοναδικής λύσης για $P < \mu$ συνεχίζει να ισχύει

Ασκηση 14 Θα δείξουμε μια λίγο γενικότερη προσέγγιση

Εστω $\mu = E(X)$, $\sigma^2 = Var(X)$, $\theta = \dfrac{u'(w-\mu)}{u''(w-\mu)}$

Θεωρούμε την εξίσωση του κεφαλαιομένου:

$$E[u(w-X)] = u(w-G) \quad (1)$$

Παίρνουμε την προσέγγιση βάσει του αναπτύγματος Taylor και στα δύο μέρη της (1)

Για το αριστερό μέρος παίρνουμε το ανάπτυγμα Taylor $2^{ης}$ τάξης γύρω από το $w-\mu$

$$u(w-X) \approx u(w-\mu) + [(w-X)-(w-\mu)] \cdot u'(w-\mu) + \frac{1}{2}[(w-X)-(w-\mu)]^2 u''(w-\mu)$$

$$= u(w-\mu) + u'(w-\mu) \cdot (\mu-X) + \frac{1}{2}(\mu-X)^2 u''(w-\mu)$$

$$\Rightarrow E[u(w-X)] \approx u(w-\mu) + u'(w-\mu) E(\mu-X) + \frac{1}{2} u''(w-\mu) E((\mu-X)^2)$$

Ομως $E(\mu-X) = 0$ και $E(\mu-X)^2 = Var(X) = \sigma^2$

(Επειδή ο πρώτος όρος του αναπτύγματος μηδενίζεται, για την προσέγγιση της $E[u(w-X)]$ είναι απαραίτητο να πάρουμε ανάπτυγμα Taylor τουλάχιστον $2^{ης}$ τάξης)

Επομένως $Eu(w-X) \approx u(w-\mu) + \dfrac{1}{2} u''(w-\mu)\sigma^2 \quad (2)$

Για την προσέγγιση του $u(w-G)$ μπορούμε να πάρουμε

το ανάπτυγμα Taylor $1^{ης}$ ή $2^{ης}$ τάξης. Επομένως γενικά μπορούμε να πάρουμε

$$u(w-G) \approx u(w-\mu) + (\mu - G)\, u'(w-\mu) + \gamma \cdot \frac{1}{2} u''(w-\mu)(\mu-G)^2 \quad (3)$$

όπου $\gamma \in \{0,1\}$ (για $\gamma=0$ έχουμε ανάπτυγμα $1^{\eta\varsigma}$ τάξης και για $\gamma=1$ $2^{\eta\varsigma}$).

από (1) – (3) παίρνουμε, θέτοντας $\delta = \mu - G$

$$u(w-\mu) + \delta u'(w-\mu) + \gamma \cdot \frac{1}{2} u''(w-\mu)\delta^2 = u(w-\mu) + \frac{1}{2} u''(w-\mu)\sigma^2$$

Απλοποιώντας το $u(w-\mu)$ κ' διαιρώντας με $u'(w-\mu)$:

$$\delta + \gamma \cdot \frac{1}{2} \frac{\delta^2}{\theta} = \frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{\theta} \quad (4)$$

Τώρα μπορούμε να διακρίνουμε 2 περιπτώσεις

(i) Αν $\sigma^2 \ll \theta \Rightarrow \frac{\sigma^2}{\theta} \approx 0$, τότε η λύση της 4 είναι $\delta \simeq 0$

κ' επομένως $\delta^2 \ll \delta$, δηλαδή αρκεί το ανάπτυγμα $1^{\eta\varsigma}$ τάξης στην (3) και $\gamma=0$

Συνεπώς $\delta \approx \frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{\theta} \Rightarrow \mu - G = \frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{\theta} \Rightarrow G \approx \mu - \frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{\theta}$

(που είναι και το ζητούμενο).

(ii) Αν η ποσότητα $\frac{\sigma^2}{\theta}$ δεν είναι αμελητέα, τότε

στην (4) δεν θα ισχύει $\delta \simeq 0$ κ' επομένως το ανάπτυγμα $2^{\eta\varsigma}$ τάξης ($\gamma=1$) θα δώσει καλύτερη προσέγγιση για το ασφάλιστρο. Απο την (4) για $\gamma=1$:

$$\delta + \frac{1}{2}\frac{\delta^2}{\theta} = \frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{\theta} \Rightarrow \delta^2 + 2\theta\delta - \sigma^2 = 0 \Rightarrow \delta = \theta \pm \sqrt{\theta^2 + \sigma^2}$$

$$= \theta \pm \theta\sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\theta^2}}$$

Αν θεωρήσουμε κοίλη συνάρτηση ωφέλειας, τότε

$\theta = \frac{u'(w-\mu)}{u''(w-\mu)} < 0$, Επομένως $\theta + \theta\sqrt{1+\sigma^2/\theta^2} < 0$ κ' $\theta - \theta\sqrt{1+\sigma^2/\theta^2} > 0$

Επειδή $\delta = \mu - G > 0$, θέλουμε τη θετική ρίζα του τριωνύμου, οπότε

$$\delta = \theta - \theta\sqrt{1+\sigma^2/\theta^2} \Rightarrow G \approx \mu - \theta + \theta\sqrt{1+\sigma^2/\theta^2}$$

Σημείωση: Μπορούμε να επιβεβαιώσουμε ότι αυτή η προσέγγιση είναι γενικότερη από την προηγούμενη ως εξής

Αν $\frac{\sigma^2}{\theta} \approx 0 \Rightarrow \frac{1}{\theta}\frac{\sigma^2}{\theta} \approx 0$, τότε από την προσέγγιση $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2}$

Παίρνουμε $\delta \approx \theta - \theta\left(1 + \frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{\theta^2}\right) \Rightarrow \delta \approx \frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{\theta}$

που αντιστοιχεί στην περίπτωση (i) με το ανάπτυγμα Taylor $1^{ης}$ τάξης για το $u(w-G)$.

Άσκηση 15 Για κάλυψη της μισής ζημιάς η συνάρτηση κάλυψης είναι $I(x) = \frac{1}{2}x$. Η εξίσωση ασφαλισμένου για μερική κάλυψη είναι

$$E[u(w-G-X+I(X))] = E[u(w-X)] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E[u(w-G-\tfrac{1}{2}X)] = E[u(w-X)]$$

Για $w=100$, $u(w)=w^2$, και $X \sim U(0,100) \Rightarrow f(x) = \frac{1}{100}$, $0 \le x \le 100$:

$$\int_{x=0}^{100} \frac{1}{100}\left(100-G-\frac{x}{2}\right)^2 dx = \int_0^{100} \frac{1}{100}(100-x)^2 dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_0^{100} (100-G-x/2)^2 dx = \int_0^{100} (100-x)^2 dx \qquad (1)$$

Για το αριστερό μέρος, θέτουμε $y = 100-G-\frac{x}{2}$, επομένως

$$\int_{x=0}^{100} \left(100-G-\frac{x}{2}\right)^2 dx = \int_{y=50-G}^{100-G} 2y^2 dy = 2\left[\frac{(100-G)^3}{3} - \frac{(50-G)^3}{3}\right]$$

$$= \frac{2}{3}\left((100-G)-(50-G)\right)\cdot\left[(100-G)^2 + (100-G)(50-G) + (50-G)^2\right]$$

$$= \frac{100}{3}\cdot\left[100^2 + G^2 - 200G + 50\cdot 100 - 150G + G^2 + 50^2 - 100G + G^2\right]$$

$$= \frac{100}{3}\cdot\left[3G^2 - 450G + 17500\right]$$

Για το δεξί μέρος, θέτοντας $y = 100 - x$

$$\int_{x=0}^{100} (100-x)^2 dx = \int_{y=0}^{100} y^2 dy = \frac{1}{3} \cdot 100^3$$

Επομένως από την (1) παίρνουμε

$$3G^2 - 450G + 17500 = 100^2 = 10000 \Rightarrow 3G^2 - 450G + 7500 = 0$$

$$\Rightarrow G^2 - 150G + 2500 = 0 \Rightarrow G^2 - 150G + 50^2 = 0$$

$$\Rightarrow G = 75 \pm \sqrt{75^2 - 50^2} = 75 \pm \sqrt{(75-50)(75+50)}$$

$$= 75 \pm \sqrt{25 \cdot 125} = 75 \pm 25\sqrt{5}$$

Επειδή πρέπει $G \leq \frac{1}{2} \cdot 100 = 50$ (που είναι η μέγιστη δυνατή αποζημίωση

δεχόμαστε τη ρίζα με το αρνητικό πρόσημο, δηλαδή

$$G = 75 - 25\sqrt{5} \Rightarrow \boxed{G = 19,1}$$