ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ 4

Άσκηση 1 Θα συγκρίνουμε τη συσσωρευμένη αξία από την κατάθεση 1€ για ένα συγκεκριμένο χρονικό διάστημα ενός έτους το ίδιο για τις δύο επιλογές. Το επιτόκιο που δίνεται υποθέτουμε πάντα ότι είναι το ετήσιο ονομαστικό επιτόκιο r

(α) $i_1 = \frac{r_1}{12} = \frac{0.08}{12} = 0,0067$ μηνιαία

$i_2 = \frac{r}{2} = \frac{0.09}{2} = 0.045$ εξαμηνιαία

$S_1 = (1+0.0067)^{12} = 1,083$

$S_2 = (1+0.045)^2 = 1,092$ (*)

(β) $r_1 = 0,1$ ετήσια, $i_1 = r_1 = 0.1$, $S_1 = (1+r_1) = 1.1$ (*)

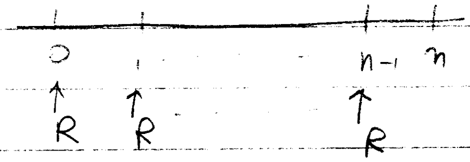
$r_2 = 0,095$ συνεχώς, $\delta = e^r - 1 \Rightarrow$ $S_2 = (1+\delta) = e^r = 1,0997$

(σχεδόν ισοδύναμα)

(γ) $r_1 = 0,18$ ετήσια $\Rightarrow$ $i = 0,18$ $S_1 = (1+0,18) = 1,18$

$r_2 = 0,188$ μην $\Rightarrow$ $i = \frac{0,188}{12} = 0,0157$, $S_2 = (1,0157)^{12} = 1,206$ (*)

Άσκηση 3 (a) Προεξοφλητική Ράντα:



Για $R=1$ η παρούσα αξία της ράντας τη στιγμή $t=0$ είναι

$$\ddot{a}_n = u^0 + u^1 + \dots + u^{n-1} = \frac{1-u^n}{1-u}, \quad u = \frac{1}{1+i}, \quad 1-u = \frac{i}{1+i}$$

Η συσσωρευμένη αξία των πληρωμών τη στιγμή n είναι

$$\ddot{s}_n = \underbrace{(1+i)^n}_{\substack{\text{πληρωμή} \\ \text{στο } t=0 \\ \text{μένει για} \\ n \text{ περιόδους}}} + \underbrace{(1+i)^{n-1}}_{\substack{t=1 \\ \text{μένει} \\ \text{για} \\ n-1 \text{ περιόδους}}} + \dots + (1+i) = (1+i)\left[\sum_{t=0}^{n-1}(1+i)^t = (1+i)\,\frac{(1+i)^n-1}{i}\right]$$

κ.ο.κ

$$\ddot{s}_n = \frac{1+i}{i}\left[(1+i)^n - 1\right] = \frac{1+i}{i}(1+i)^n\left[1-(1+i)^{-n}\right] =$$

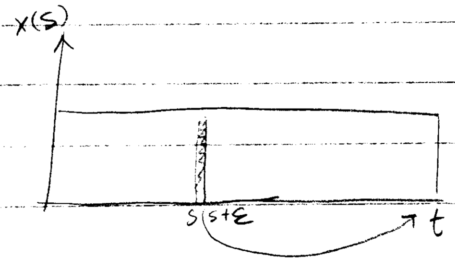
$$= (1+i)^n\,\frac{1-u^n}{1-u} = (1+i)^n\,\ddot{a}_n, \quad \text{επειδή } \frac{1+i}{i} = \frac{1}{1-u}$$

Επίσης $1-u = iu = d \Rightarrow \ddot{s}_n = \dfrac{(1+i)^n - 1}{d}$

Η σχέση $\ddot{s}_n = \ddot{a}_n(1+i)^n$ εξηγείται οικονομικά ως εξής:
Η ράντα $(0,1,\dots,n)$ ισοδυναμεί με μια μοναδική πληρωμή τη στιγμή $t=0$ ίση με την παρούσα αξία $\ddot{a}_n$.
Επομένως η συσσωρευμένη αξία της ράντας είναι ίση με τη συσσωρευμένη αξία της $\ddot{a}_n$ μετά από n περιόδους ανατοκισμού.

(b) Για τη ληξιπρόθεσμη ράντα η ανάλυση είναι αντίστοιχη.

Άσκηση 4 Έστω συνεχής ράντα (χρηματορροή) με ρυθμό $x(s) = 1$, $s \in [0,t]$, και συνεχής ανατοκισμός με ρυθμό δ



Η πληρωμή στο διάστημα $(s, s+\varepsilon)$ $(\varepsilon \to 0)$ πού είναι ίση με $x(s)\,\varepsilon$, δημιουργεί συνολικό τόκο τη στιγμή t ίσο με $e^{(t-s)\delta} \cdot x(s) \cdot \varepsilon$

Για $\varepsilon \to 0$ η συνολική συσσωρευμένη αξία της χρηματορροής είναι

$$\bar{S}_t = \int_0^t x(s)\, e^{(t-s)\delta} ds = \int_0^t e^{\delta(t-s)} ds = e^{\delta t} \int_0^t e^{-\delta s} ds =$$

$$= e^{\delta t} \cdot \frac{1}{\delta}(1 - e^{-\delta t}) = \frac{e^{\delta t} - 1}{\delta}$$

Άσκηση 8 Αρχικό ποσό δανείου $P = 3{,}5 \cdot 10^6$, $r = 24\%$, μηνιαίος ανατοκ.

$$\Rightarrow i = \frac{0{,}24}{12} = 0.02$$

Το δάνειο εξοφλείται σε n ληξιπρόθεσμες πληρωμές $R = 100 \cdot 10^3$ κάθε μ

(a)

Η παρούσα αξία της ληξιπρ. ράντας n μηνών με $i = 0{,}02$ & δόση R είναι ίση με P επομένως

$$P = R\alpha_n = R \cdot \frac{1 - u^n}{i}, \quad \text{όπου} \quad P = 3{,}5 \cdot 10^6, \; R = 100 \cdot 10^3 = 10^5,$$
$$i = 0{,}02, \; u = \frac{1}{1+i} = \frac{1}{1{,}02}.$$

Λύνοντας ως προς n: $1 - u^n = \frac{P}{R} \cdot i \Rightarrow u^n = 1 - \frac{Pi}{R} \Rightarrow$

$$\Rightarrow n \log u = \log\left(1 - \frac{Pi}{R}\right) \Rightarrow n = \frac{\log\left(1 - \frac{Pi}{R}\right)}{\log u} = 60{,}8 \text{ δηλ. } 61 \text{ μήνες.}$$

[Για να είμαστε ακριβείς θα χρειαστούν 60 δόσεις ύψους $R = 10^5$, των οποίων η παρούσα αξία είναι $R \cdot \alpha_{60} = 10^5 \cdot \frac{1-u^{60}}{i} = 3{,}476 \cdot 10^6$, και μια τελευταία στην περίοδο 61 ύψους R', τ.ω. η παρούσα αξία της να είναι ίση με $(3{,}5 - 3{,}476)10^6 =$ $= 23911$, δηλ. $R' \cdot u^{61} = 23911 \Rightarrow R' = (23{,}911) \times (1{,}02)^{61} = 80023$].

Άσκηση 10 Το ισοδύναμο μοντέλο ανατοκισμού είναι ένα "κεφάλαιο" μεγέθους 1 που ανατοκίζεται για $n=10^6$ περιόδους με επιτόκιο r ανά περίοδο. Αν η συσσωρευμένη αξία τη στιγμή n είναι ίση με $F=2{,}3\cdot10^9$ έχουμε $(1+r)^n = F \Rightarrow 1+r = F^{1/n} \Rightarrow r = F^{1/n} - 1$

Για $F=2{,}3\cdot10^9$, $n=10^6$ ο υπολογισμός $(2{,}3\cdot10^9)^{10^{-6}}$ είναι δύσκολος αριθμητικά. Χρησιμοποιώντας λογαρίθμους:

$$n\log(1+r) = \log F \Rightarrow \log(1+r) = \frac{\log F}{n} = 2{,}16\cdot10^{-5}$$

$$\Rightarrow 1+r = e^{x} \quad \text{όπου} \quad x = 2{,}16\cdot10^{-5}$$

Επειδή $x \to 0$ $\quad e^x \approx 1+x \Rightarrow r \approx x = 2{,}16\cdot10^{-5} = 0{,}00216\%$

Δηλαδή ο καθαρός ρυθμός αύξησης του πληθυσμού υπολογίζεται σε $r=0{,}00216\%$ ανά έτος. Επειδή $r=b-d$, για $d=4\%$ βρίσκουμε $b=4{,}00216\% = 40{,}0216‰$

Άσκηση 11 Τώρα το αρχικό "κεφάλαιο" είναι ίσο με $P=250\cdot10^6$ και ανατοκίζεται ετήσια για $n=1750$ περιόδους, οπότε έχει συσσωρευμένη αξία $F=790\cdot10^6$. Επομένως

$$F = P\cdot(1+r)^n \Rightarrow (1+r)^n = \frac{F}{P} = \frac{790}{250} \Rightarrow$$

$$\log(1+r) = \frac{\log\left(\frac{790}{250}\right)}{1750} = 6{,}57\cdot10^{-4} = 0{,}066\%$$

κ' με αντίστοιχο σκεπτικό όπως στην Άσκηση 10 προκύπτει $r \approx 0{,}066\%$

Για $d=4\% \Rightarrow b \approx 4{,}066\%$

(b) Μετα απο $t=30$ μήνες έχει πληρώσει 30 δόσεις των οποίων η παρούσα αξία τη στιγμή $t=0$ είναι $R\alpha_{30}$. Επομένως η παρούσα αξία του υπόλοιπου δανείου είναι ίση με $P-R\alpha_{30}$

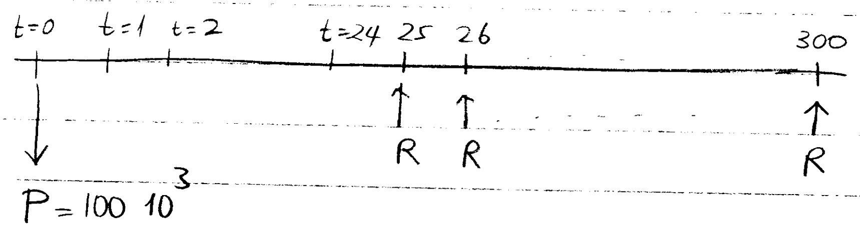
Η αξία αυτή τη στιγμή $t=30$ αντιστοιχεί σε $(1+i)^{30}\cdot(P-R\alpha_{30})$

$$=(1+0,2)^{30}\left[3,5\cdot 10^6-10^5\cdot\frac{1-u^{30}}{0,02}\right]=(1,02)^{30}\cdot 1,26\cdot 10^6=2,29\cdot 10^6.$$

Επιλεγμένες Ασκήσεις

(1) Έστω στεγαστικό δάνειο 25 ετών αξίας $100\cdot 10^3$ ευρώ με ετήσιο επιτόκιο $r=6\%$ (σταθερό για όλη τη διάρκεια του δανείου) και ληξιπρόθεσμες μηνιαίες δόσεις.
Το δάνειο έχει περίοδο χάριτος 2 χρόνια (δηλαδή στα 2 πρώτα χρόνια δε γίνεται καμμία πληρωμή)
Να βρεθεί το ποσό της δόσης για τα υπόλοιπα 23 χρόνια

Απάντηση Έχουμε τη χρηματορροή



$$i=\frac{r}{12}=0{,}5\%=0{,}005\ ,\quad u=\frac{1}{1{,}005}=0{,}99502$$

Η παρούσα αξία της χρηματοσειράς είναι

$$P=R\cdot u^{25}+Ru^{26}+\dots+Ru^{300}=Ru^{25}\cdot\sum_{t=0}^{275}u^t=Ru^{25}\,\frac{1-u^{276}}{1-u}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow R=P\cdot\frac{1-u}{u^{25}(1-u^{276})}=753{,}89$$ (δηλ. μηνιαία δόση 753,89 ευρώ)

Σημείωση: Αν δεν υπήρχε η περίοδος χάριτος η δόση θα ήταν $R=\frac{P}{a_{300}}=\frac{10^5}{\frac{1-u^{300}}{0{,}005}}=644{,}3$ ευρώ ανά μήνα

(2) Εστω στεγαστικό δάνειο αξίας $100\,10^3$ ευρώ, 25ετίας με σταθερό επιτόκιο $r = 6\%$ ετήσια. (ληξιπρόθεσμη μηνιαία δόση)

(a) Να βρεθεί το ποσό της δόσης

(b) Εστω ότι μετά την παρέλευση 3-ετίας (δηλαδή αμέσως μετά την 36^{η} δόση), ο δανειολήπτης κάνει επιπλέον πληρωμή 10.10^3 ευρώ.

Αυτό γίνεται χωρίς ποινή και ο δανειολήπτης έχει δύο επιλογές: (1) Να κρατήσει την ίδια διάρκεια του δανείου. Σ' αυτή την περίπτωση ποια θα είναι η νέα μηνιαία δόση. (2) Να κρατήσει την ίδια μηνιαία δόση. Σ' αυτή την περίπτωση μετά από πόσο χρόνο θα αποπληρώσει το δάνειο;

Απάντηση (a) Από την προηγούμενη άσκηση για $n = 300$, $r = 6\%$ ετήσιο, $i = 0{,}005$, $P = 10^5$, βρήκαμε $R = 644{,}3$ ευρώ μηνιαία.

(b) Μετά την πληρωμή της $36^{ης}$ δόσης, δηλαδή τη στιγμή $t = 36$, το υπόλοιπο του δανείου είναι $(P - Ra_{36})(1+i)^{36} =$

$$= \left(10^5 - 644{,}3 \cdot \frac{1-u^{36}}{i}\right)(1+i)^{36} = 94.324$$

Τη στιγμή αυτή γίνεται πληρωμή 10000 επομένως το χρέος μειώνεται σε 84324 ευρώ για τις υπόλοιπες $n = 300 - 36 = 264$ περιόδους

(1) αν παραμείνει η διάρκεια του υπόλοιπου δανείου $n = 264$, η νέα δόση θα είναι

$$R' = \frac{84324}{a_{264}} = \frac{84324}{\frac{1-u^{264}}{i}} = 576 \text{ ευρώ.}$$

(2) αν παραμείνει η αρχική δόση, η νέα διάρκεια n' θα είναι τέτοια ώστε

$$84324 = Ra_n = R\,\frac{1-u^n}{i} \Rightarrow 1-u^n = \frac{0{,}005 \times 84324}{644.3}$$

$$\Rightarrow 1-u^n = 0{,}6544 \Rightarrow u^n = 0{,}3456 \Rightarrow n \log\left(\frac{1}{1{,}005}\right) = \log(0{,}3456) \Rightarrow$$

$\Rightarrow n = 213$, δηλαδή 17,7 χρόνια (αντί για 22 που απέμεναν αρχικά).