Ασκήσεις Κεφαλαίου 6

Άσκηση 1

α) $\mu(x) = B \cdot 2^x = B \cdot e^{\log 2 \, x} \Rightarrow$

$$\int_0^x \mu(s)ds = \frac{B}{\log 2}\left(2^x - 1\right) \Rightarrow S(x) = e^{-\frac{B}{\log 2}\left(2^x - 1\right)}$$

β) $\mu(x) = \frac{1}{1+x} \Rightarrow \int_0^x \mu(s)ds = \int_0^x \frac{ds}{1+s} = \log(1+x)$

$$\Rightarrow S(x) = e^{-\log(1+x)} = \frac{1}{1+x}, \quad x > 0.$$

γ) $\mu(x) = x^3 \Rightarrow \int_0^x \mu(s)ds = \frac{x^4}{4} \Rightarrow S(x) = e^{-x^4/4}$

Άσκηση 2

(i) $S(x+t) = e^{-\int_0^{x+t} \mu(s)\,ds} =$

$$= e^{-\int_0^x \mu(s)ds} \, e^{-\int_x^{x+t} \mu(s)ds} = S(x)\, e^{-\int_0^t \mu(x+s)ds}$$

ii) $\mu(x) = \frac{-S'(x)}{S(x)} \Rightarrow S'(x) = -\mu(x)S(x)\,dx$

$$S(x) - S(x+t) = -\int_x^{x+t} S'(u)du = \int_x^{x+t} \mu(u)\,S(u)\,du = \int_0^t \mu(x+u)\,S(x+u)\,du$$

iii) $\left.\begin{array}{l} S(x) - S(x+t) = \int_0^t \mu(x+u)\,S(x+u)\,du \\ \text{όμως} \quad S(x+u) = S(x)\,{}_u p_x \end{array}\right\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow S(x) - S(x+t) = S(x)\int_0^t \mu(x+u)\,{}_u p_x\,du$$

Από των iii) $1-\frac{S(x+t)}{s(x)} = {}_tq_x = P(T(x) \le t) = G(t) = \int_0^t \mu(x+u)\, {}_up_x \, du$

Άσκηση 3 ${}_tp_x = P[T(x) > t] =$ (για κάποιο $s<t$

$= P[T(x) > s] \cdot \underbrace{P[T(x) > t \mid T(x) > s]}_{P(T(x+s) > t-s)} = {}_sp_x \cdot {}_{t-s}p_{x+s}$

Άσκηση 4 (i) (β) Αν $S(x) = 1 - \frac{22x}{12} + \frac{11x^2}{8} - \frac{7x^3}{24}$ $\quad 0 \le x \le 3$

τότε $S'(x) = \frac{-22}{12} + \frac{22x}{8} - \frac{21x^2}{24} = -\frac{21x^2 - 66x + 44}{24}$

Έστω $h(x) = 21x^2 - 66x + 44$. Η $h(x)$ έχει ρίζες $x_1 = 0{,}96$, $x_2 = 2{,}183$

επομένως $h(x) < 0$ για $0{,}96 < x < 2{,}183$ δηλαδή

$S'(x) > 0$ για $0{,}96 < x < 2{,}183$, άτοπο επειδή η $S(x)$ πρέπει να είναι φθίνουσα για $0 \le x \le 3$.

(ii) $\int_0^\infty \mu(x)\,dx = -\int_0^\infty \frac{S'(x)\,dx}{S(x)}$

Έστω $u = S(x) \Rightarrow du = S'(x)\,dx$. Τότε για $x=0 \Rightarrow u = S(0) = 1$

για $x \to \infty \Rightarrow u = S(x) \to 0$

$\int_0^\infty \mu(x)\,dx = -\int_{u=1}^{0} \frac{du}{u} = \int_0^1 \frac{du}{u} = +\infty.$

Άσκηση 5

$\mu(x) = 10^{-3}, \quad 20 \le x \le 25$

Τότε $\,_{2}q_{20} = P[T(20) \le 2] = 1 - \frac{s(22)}{s(20)}$

Όμως $s(22) = s(20)\, e^{-\int_{20}^{22} \mu(x)dx} = s(20)\, e^{-2 \cdot 10^{-3}}$ (βλ. άσκ. 2)

$\Rightarrow \,_{2}q_{20} = 1 - e^{-0,002} = 1 - 0,998 = 0,002$

Επίσης $\,_{2|2}q_{20} = \,_{2}p_{20} \;\, _{2}q_{22}$

$\,_{2}p_{20} = 1 - \,_{2}q_{20} = e^{-0,002}$

$\,_{2}q_{22} = 1 - \frac{S(24)}{S(22)} = 1 - \frac{S(22)\, e^{-\int_{22}^{24} \mu(x)dx}}{S(22)} =$

$= 1 - e^{-0,002}$

$\Rightarrow \,_{2|2}q_{20} = e^{-0,002}\left(1 - e^{-0,002}\right) = 0,002 \times 0,998 = 0,00199$

Άσκηση 7

Έστω $\tilde{T}_n(x)$ η υπόλοιπη ζωή ενός ατόμου ηλικίας x στο διάστημα $[x, x+n]$

Δηλ. ο αριθμός ετών που διαβιώσει στο διάστημα $[x, x+n]$

$$\tilde{T}_n(x) = \tilde{X} - x \mid X > x, \quad \text{όπου} \quad \tilde{X} = \begin{cases} X, & X \le x+n \\ x+n, & X > x+n \end{cases} = \min(X, x+n)$$

$$P[\tilde{T}_n(x) > t] = P[\tilde{X} - x > t \mid X > x] =$$

$$= P[\tilde{X} > x+t \mid X > x] = \qquad (t \le n)$$

$$= P[\tilde{X} > x+t, X \le x+n \mid X > x] + P[\tilde{X} > x+t, X > x+n \mid X > x]$$

$$= \frac{S(x+t) - S(x+n)}{S(x)} + \frac{S(x+n)}{S(x)} = \frac{S(x+t)}{S(n)} = {}_tP_x$$

$$\Rightarrow P[\tilde{T}_n(x) > t] = \begin{cases} {}_tP_x, & t < n \\ 0, & t \ge n \end{cases}$$

$$\Rightarrow f_{\tilde{T}_n(x)}(t) = \frac{-S'(x+t)}{S(x)}, \quad t < n$$

$$= -\frac{S'(x+t)}{S(x+t)} \frac{S(x+t)}{S(x)} = {}_tp_x \, \mu(x+t) \qquad 0 < t < n$$

$$\Rightarrow E\tilde{T}_n(x) = \mathring{e}_{n,x} = \int_0^\infty P[\tilde{T}_n(x) > t]\, dt = \int_0^n {}_tp_x \, dt$$

Άσκηση 8

αν $T(x) \sim \mathcal{E}xp(\lambda) \Rightarrow f_{T(x)}(t) = \lambda e^{-\lambda t}$, $t>0$

τότε $E(T(x)) = \frac{1}{\lambda}$, $V(T(x)) = \frac{1}{\lambda^2}$

$m(T(x))$: $F(m) = \frac{1}{2} \Rightarrow 1 - e^{-\lambda m} = \frac{1}{2} \Rightarrow e^{-\lambda m} = \frac{1}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \lambda m = \log 2 \Rightarrow m = \frac{\log 2}{\lambda}$

Δηλαδή $m > E(T(x))$

Άσκηση 9

$\mu_{x+t} = t$, $t \geq 0$

Τότε $\mathring{e}_x = \int_0^\infty {}_t p_x \, dt$

Όμως ${}_t p_x = \frac{S(x+t)}{S(x)} = \frac{S(x) \, e^{-\int_x^{x+t} \mu(s) ds}}{S(x)} = e^{-\int_x^{x+t} s ds} =$

$= e^{-\frac{(x+t)^2 - x^2}{2}} = e^{-\frac{t(2x+t)}{2}} = e^{-\frac{t^2}{2} - tx}$

Επομένως $\mathring{e}_x = \int_0^\infty e^{-\frac{t^2}{2}} e^{-tx} \, dt$

$= e^{x^2/2} \int_0^\infty e^{-\frac{(x+t)^2}{2}} dt = e^{x^2/2} \int_x^\infty e^{-y^2/2} dy$

$= \sqrt{2\pi} \, e^{x^2/2} \int_x^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2} dy = \sqrt{2\pi} \, e^{x^2/2} \left(1 - \Phi(x)\right)$

όπου $\Phi(x)$ η σ.κ. της $\mathcal{N}(0,1)$

Άσκηση 10

$$S(x) = \frac{\sqrt{100-x}}{10} \qquad 0 \le x \le 100$$

$$f(x) = -S'(x) = -\frac{1}{10}\cdot\frac{-1}{2\sqrt{100-x}} = \frac{1}{20\sqrt{100-x}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mu(x) = \frac{\frac{1}{20\sqrt{100-x}}}{\frac{\sqrt{100-x}}{10}} = \frac{1}{2(100-x)}$$

(α) $${}_{17}p_{19} = \frac{S(19+17)}{S(19)} = \frac{S(36)}{S(19)} = \frac{\frac{\sqrt{100-36}}{10}}{\frac{\sqrt{100-19}}{10}} = \frac{8}{9}$$

(β) $${}_{15}q_{36} = 1 - {}_{15}p_{36} = 1 - \frac{S(51)}{S(36)} = 1 - \frac{\sqrt{100-51}}{\sqrt{100-36}} = 1 - \frac{7}{8} = \frac{1}{8}$$

(γ) $${}_{15|13}q_{36} = {}_{15}p_{36} - {}_{28}p_{36} = \frac{S(51)}{S(36)} - \frac{S(64)}{S(36)} = \frac{\sqrt{49}-\sqrt{36}}{\sqrt{64}} = \frac{1}{8}$$

(δ) $$\mu_{36} = \frac{1}{2(100-36)} = \frac{1}{2\cdot 64} = \frac{1}{128}$$

(ε) $$\mathring{e}_{36} = \int_0^{\infty} {}_tp_{36}\,dt = \int_0^{64} \frac{S(t+36)}{S(36)}\,dt = \frac{\int_0^{64} \frac{\sqrt{100-36-t}}{\cancel{10}}\,dt}{\frac{\sqrt{100-36}}{\cancel{10}}} =$$

$$= \frac{\int_0^{64} \sqrt{64-t}\,dt}{8} = \frac{1}{8}\cdot\int_0^{64}\sqrt{y}\,dy = \frac{1}{8}\cdot\frac{y^{3/2}\Big|_0^{64}}{\frac{3}{2}} =$$

$$= \frac{1}{12}\cdot(64)^{3/2} = \frac{1}{12}\cdot 8^3 = \frac{2^9}{12} = \frac{512}{12} \approx 42,67.$$

(11) $\quad {}_1q_{55} = 0{,}006 \Rightarrow {}_1p_{55} = 0{,}994$

$$\tilde{\mu}(55+t) = \mu(55+t) + 0.03(1-t) \qquad 0 \le t \le 1.$$

$${}_1\tilde{p}_{55} = e^{-\int_0^1 \tilde{\mu}(55+t)dt} = e^{-\int_0^1 \mu(55+t)dt - \int_0^1 0.03(1-t)dt}$$

$$= {}_1p_{55} \cdot e^{-\int_0^1 0.03(1-t)dt} = {}_1p_{55}\, e^{-0.03\int_0^1 y\,dy} =$$

$$= {}_1p_{55}\, e^{-\frac{0.03}{2}} = 0.994 \cdot 0.985 = 0.979$$

(13) Άσκηση 13

Έστω $\tilde{\mu}_{x+t} = \mu_{x+t} - c$, $t \in [0,1]$, όπου $c > 0$.

$${}_1q_x = 1 - {}_1p_x = 1 - e^{-\int_0^1 \mu(x+t)dt}$$

$${}_1\tilde{q}_x = 1 - {}_1\tilde{p}_x = 1 - e^{-\int_0^1 \mu(x+t)dt + \int_0^1 c\,dt} =$$

$$= 1 - {}_1p_x\, e^{-c}$$

Θέλουμε ${}_1\tilde{q}_x = \frac{1}{2}\,{}_1q_x \Rightarrow 1 - (1-q_x)\,e^{+c} = \frac{1}{2} q_x \Rightarrow$

$$\Rightarrow (1-q_x)\,e^{+c} = 1 - \frac{1}{2} q_x \Rightarrow c = \frac{\log\left(1-\frac{1}{2}q_x\right)}{\log\left(1-q_x\right)}$$

Άσκηση 14

Η υπόθεση ομοιόμορφης κατανομής θανάτων μέσα σε ένα έτος (μεταξύ x και $x+1$, για $x \in \mathbb{Z}$) σημαίνει $X\big|_{x<X\leq x+1} \sim U(0,1)$

$$P\left[x < X+1 \leq x+t \,\middle|\, x < X \leq x+1\right] = t \qquad \forall \; t \in [0,1].$$

Επομένως $P\left[x < X \leq x+t \,\middle|\, X > x\right] = P\left[X \leq x+1 \,\middle|\, X > x\right] \cdot P\left[x < X \leq x+t \,\middle|\, x < X \leq x+1\right]$

$$= {}_1q_x \cdot t = t\,q_x$$

Επομένως έστω $A = P\left[70{,}5 \leq X \leq 71{,}5 \,\middle|\, X > 70\right]$

$$A = P\left[70{,}5 \leq X \leq 71 \,\middle|\, X > 70\right] + P\left[71 \leq X \leq 71{,}5 \,\middle|\, X > 70\right]$$

$$= A_1 + A_2$$

$$A_1 = P\left[70{,}5 \leq X \leq 71 \,\middle|\, 70 < X \leq 71\right] \cdot P\left[X \leq 71 \,\middle|\, X > 70\right]$$

$$= \frac{1}{2} \cdot {}_1q_{70} = \frac{1}{2} q_{70}$$

$$A_2 = P\left[X \geq 71 \,\middle|\, X > 70\right] \cdot P\left[71 \leq X \leq 72 \,\middle|\, X \geq 71\right] \cdot P\left[71 \leq X \leq 71{,}5 \,\middle|\, 71 \leq X \leq 72\right]$$

$$= {}_1p_{70} \cdot {}_1q_{71} \cdot \frac{1}{2} =$$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{2} \cdot \left[q_{70} + (1-q_{70})\, q_{71}\right] = 0{,}044$$

Άσκηση 15 $\quad \tilde{\mu}(x) = 2\mu(x)$

$${}_1\tilde{q}_x = 1 - {}_1\tilde{p}_x = 1 - e^{-\int_0^1 \tilde{\mu}(x+s)ds} = 1 - e^{-2\int_0^1 \mu(x+s)ds} = 1 - e^{-2\theta}$$

(όπου $\theta = \int_0^1 \mu(x+s)ds$)

$${}_1q_x = 1 - {}_1p_x = 1 - e^{-\theta}$$

Επομένως $\quad {}_1\tilde{q}_x - 2\,{}_1q_x = 1 - e^{-2\theta} - 2 + 2e^{-\theta} = 2e^{-\theta} - e^{-2\theta} - 1 =$

$$-\left(e^{-2\theta} - 2e^{-\theta} + 1\right) = -\left(1 - e^{-\theta}\right)^2 \leq 0 \Rightarrow \boxed{{}_1\tilde{q}_x \leq 2\,{}_1q_x \quad \forall x}$$

Άσκηση 16 $\quad \mu(x) = \dfrac{Ac^x}{1+Bc^x}, \quad A, B, c > 0$

$$\int_0^x \mu(s)ds = \frac{A}{B}\int_0^x \frac{Bc^s}{1+Bc^s}ds = \frac{A}{B}\int_0^x \frac{Be^{\theta s}ds}{1+Be^{\theta s}}, \quad (\text{όπου } \theta = \log c)$$

Θέτουμε $\quad y = Be^{\theta s} \Rightarrow dy = B\theta e^{\theta s}ds = \theta Be^{\theta s}ds$

Επομένως $\quad \displaystyle\int_0^x \mu(s)ds = \frac{A}{B\theta}\int_{y=B}^{Be^{\theta x}} \frac{dy}{1+y} = \frac{A}{B\theta}\ln\frac{1+Be^{\theta x}}{1+B}$

$$\Rightarrow S(x) = e^{-\int_0^x \mu(s)ds} = \left(\frac{1+Be^{\theta x}}{1+B}\right)^{-A/B\theta} = \left(\frac{1+Bc^x}{1+B}\right)^{-A/B\log c}$$

Η πυκνότητα πιθανότητας της X είναι:

$$f(x) = -S'(x) = -\left(-\frac{A}{B\theta}\right)\left(\frac{1+Be^{\theta x}}{1+B}\right)^{-\frac{A}{B\theta}-1} \cdot \frac{B\theta e^{\theta x}}{1+B}$$

$$= \frac{A}{1+B}\left(\frac{1+Be^{\theta x}}{1+B}\right)^{-\frac{A}{B\theta}-1} \cdot e^{\theta x} =$$

Για να βρούμε την κορυφή της X (σημείο μεγίστου της f.)

$$f'(x) = \frac{A}{1+B}\left[-\left(\frac{A}{B\theta}+1\right)\cdot\left(\frac{1+Be^{\theta x}}{1+B}\right)^{-\frac{A}{B\theta}-2}\cdot\frac{B\theta e^{\theta x}}{1+B}\,e^{\theta x}+\left(\frac{1+Be^{\theta x}}{1+B}\right)^{-\frac{A}{B\theta}-1}\theta e^{\theta x}\right]$$

$$= \underbrace{\frac{A}{1+B}\cdot\left(\frac{1+Be^{\theta x}}{1+B}\right)^{-\frac{A}{B\theta}-2}\theta e^{\theta x}}_{K(x)}\left[-\frac{A+B\theta}{B\theta}\cdot\frac{Be^{\theta x}}{1+B}+\frac{1+Be^{\theta x}}{1+B}\right]$$

$$= K(x)\left[\frac{\theta+\theta Be^{\theta x}-Ae^{\theta x}-B\theta e^{\theta x}}{\theta(1+B)}\right]=\frac{K(x)}{\theta(1+B)}\left(\theta-Ae^{\theta x}\right)$$

Θέτοντας $f'(x)=0$ προκύπτει $\theta-Ae^{\theta x}=0 \Rightarrow e^{\theta x}=\frac{\theta}{A} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \theta x=\log\theta-\log A \Rightarrow x=\frac{\log(\log c)-\log A}{\log c}$$

Επιπλέον Ασκήσεις Κεφ. 6

(1) Αν $\mu(x) = \dfrac{x}{40(40+x)}$, $x > 0$ να βρεθούν

(α) $s(x)$ για $x > 0$

(β) Η πιθανότητα άτομο ηλικίας 40 ετών να πεθάνει μεταξύ 50 κ' 60 ετών

(γ) Η αναμενόμενη διάρκεια υπόλοιπης ζωής ατόμου 40 ετών

(α) $s(x) = e^{-\int_0^x \mu(s)ds}$

$$\int_0^x \mu(s)ds = \frac{1}{40}\int_0^x \frac{s}{40+s}ds = \frac{1}{40}\int_0^x \left(1 - \frac{40}{40+s}ds\right) =$$

$$= \frac{1}{40}\left(x - 40\log\frac{40+x}{40}\right) = \frac{x}{40} - \log\left(1+\frac{x}{40}\right)$$

$$\Rightarrow S(x) = \left(1+\frac{x}{40}\right)e^{-x/40}$$

(β) $P\left[50 \leq X \leq 60 \mid X > 40\right] = \dfrac{s(50) - s(60)}{s(40)} =$ (αντικ στο α):

$$= \frac{9e^{-1/4} - 10e^{-1/2}}{8} = 0.118$$

(γ) $E(T(40)) = \int_0^\infty {}_tP_{40}\,dt$

Όμως $${}_tP_{40} = \frac{S(40+t)}{S(40)} = \frac{\left(1+\frac{40+t}{40}\right)e^{-\frac{40+t}{40}}}{\left(1+\frac{40}{40}\right)e^{-\frac{40}{40}}} =$$

$$= \frac{80+t}{80}\cdot e^{-t/40} = \left(1+\frac{t}{80}\right)e^{-t/40}$$

$$\Rightarrow E(T(40)) = \int_0^\infty \left(1+\frac{t}{80}\right) e^{-t/40}\, dt$$

$$= \int_0^\infty e^{-t/40} dt + \frac{1}{80}\int_0^\infty t e^{-t/40} dt = 40 + \frac{1}{80}\cdot 40 \int_0^\infty t\cdot \frac{1}{40} e^{-\frac{1}{40}t} dt$$

Το τελευταίο ολοκλήρωμα είναι η μέση τιμή της εκθετικής κατανομής με $\lambda = \frac{1}{40}$ επομένως ίσο με $\frac{1}{\lambda} = 40$.

Συνεπώς $E(T(40)) = 40 + \frac{40\cdot 40}{80} = 60$.

---

(2) Έστω ένα άτομο A του οποίου η διάρκεια ζωής έχει ένταση θνησιμότητας $\mu(x) = \frac{1}{x}$ στο ηλικιακό διάστημα $[30, 49]$.

Έστω επίσης ένα άτομο B του οποίου η ένταση θνησιμότητας είναι $\tilde{\mu}(x) = 2\mu(x)$ για $x \in [30, 36]$ κ' $\tilde{\mu}(x) = \frac{1}{2}\mu(x)$ για $x \in (36, 49]$.

(a) Να βρεθεί η πιθανότητα επιβίωσης ${}_{19}p_{30}$ του A

(β) Να βρεθεί η ίδια πιθανότητα για το B κ' να συγκριθεί με αυτή του A.

(a) Γνωρίζουμε ${}_tp_x = e^{-\int_0^t \mu(x+s)ds}$. Για $x=30; t=19$:

$$\int_0^{19} \mu(30+s)ds = \int_0^{19} \frac{1}{30+s} ds = \log(49) - \log(30) = \log\frac{49}{30} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow {}_{19}p_{30} = e^{-\log\left(\frac{49}{30}\right)} = \frac{30}{49}$$

β) Για το β έχουμε

$$\int_0^{19} \tilde{\mu}(30+s) = \int_0^{6} \frac{2}{30+s}\, ds + \int_6^{13} \frac{1}{2(30+s)}\, ds$$

$$= 2 \log \frac{36}{30} + \frac{1}{2} \log \frac{49}{36} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow {}_{19}\tilde{p}_{30} = e^{-\int_0^{19} \tilde{\mu}(30+s)ds} =$$

$$= \left(\frac{30}{36}\right)^2 \left(\frac{36}{49}\right)^{1/2} = \frac{30^2}{36^2} \frac{6}{7} = \frac{30^2}{7 \cdot 6^3} = \frac{5^2 6^2}{7\, 6^3} = \frac{25}{42}$$

Επομένως $\quad {}_{19}\tilde{p}_{30} = \frac{25}{42} < \frac{30}{49} = {}_{19}p_{30}$